

เสถียรภาพยูแลมสำหรับการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์อันดับสอง

(Ulam stability for second order nonhomogeneous differentail eqautions)

นางสาวพานิภัค จอกมา

รหัส 630510494

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2566

เสถียรภาพยูแลมสำหรับการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์อันดับสอง

(Ulam stability for second order nonhomogeneous differential equations)

นางสาวพานิภัค จอกมา

630510494

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

เสถียรภาพยูแลมสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์อันดับสอง

(Ulam stability for second order nonhomogeneous differential equations)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ



(ผศ. ดร. จีรนุช สีเบเจริญ)

ประธานกรรมการ



(อ. ดร. ขวัญชัย กันไวก)

กรรมการ

วันที่ 7 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษา ค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาจิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางจิตศาสตร์ในการทำการศึกษา ค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง เสถียรภาพบุคลิกภาพสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรเดช สืบเจริญ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษา งานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.ขวัญชัย กันไฉ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณาและตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาจิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาจิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นางสาวพานิภัค จอกมา

หัวข้อ (ภาษาไทย)	เสถียรภาพยูแลมสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์อันดับสอง
(ภาษาอังกฤษ)	Ulam stability for second order nonhomogeneous differential equations
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นางสาวพานิภัค จอกมา รหัสนักศึกษา 630510494
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ. ดร. อธิรุช สืบเจริญ
ชื่อกรรมการสอบ	อ. ดร. ขวัญชัย กันไฉ

บทคัดย่อ

การศึกษานี้เน้นไปที่เสถียรภาพยูแลมของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองไม่เอกพันธ์ที่อยู่ในรูป $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ โดยที่ $x \in I$ โดยใช้วิธีแปรพารามิเตอร์ในการหาผลเฉลยเฉพาะ และยังเป็นวิธีที่ใช้ในการศึกษาเสถียรภาพยูแลมของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองไม่เอกพันธ์ นอกจากนี้เรานำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้กับสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์ และมีตัวอย่างประกอบเพื่อแสดงให้เห็นว่าสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่นำเสนอ

Abstract

This study is focused on the Ulam stability of second order nonhomogeneous linear differential equations of the form $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ where $x \in I$ by using the method of variation of parameters to find the particular solution and this method is also utilized to study the Ulam stability of second order nonhomogeneous linear differential equations. Furthermore, we apply the obtained results to the nonhomogeneous Cauchy-Euler equations. Some examples are given to show that the proposed theorems are satisfied.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main results)	6
บทที่ 4 ตัวอย่าง (Example)	17
บรรณานุกรม	26
ภาคผนวก	27

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

การค้นคว้าอิสระนี้เพื่อศึกษาเสถียรภาพของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยใช้ทฤษฎีบทและยกตัวอย่างประกอบเพื่อแสดงให้เห็นว่าสอดคล้องกับทฤษฎีบท ในการแสดงการหาเสถียรภาพของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองโดยมีตัวควบคุม เพื่อเปรียบเทียบผลเฉลยทั่วไปของทั้งสองสมการซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง จะใช้วิธีการแปรพารามิเตอร์หาในการหาผลเฉลยเฉพาะเนื่องจากเป็นวิธีที่ครอบคลุมในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง และนำทฤษฎีที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ และสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

บทนิยาม 2.1 [1] สมการที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ ตัวแปรตาม และอนุพันธ์สามัญของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวเท่านั้น จะเรียกสมการนี้ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (ordinary differential equation)

บทนิยาม 2.2 [1] **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n** (linear ordinary differential equation of order n) ในตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x คือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.1)$$

เมื่อ $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ และ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งของจำนวนจริง และ $a_0(x) \neq 0$ ถ้า $b(x) \neq 0$ จะเรียกสมการ (2.1) ว่า **สมการไม่เอกพันธ์** (nonhomogeneous equation) และถ้าให้ $b(x) = 0$ จะเรียกสมการ (2.1) ว่า **สมการเอกพันธ์** (homogeneous equation) ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \quad (2.2)$$

บทนิยาม 2.3 [1] ผลเฉลยของสมการ (2.1) จะประกอบไปด้วยสองส่วนคือ **ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์** (homogeneous solution) และ**ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution) คือผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์ ดังนั้น **ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ (2.1) มีรูปแบบ

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

เมื่อ $y_c(x)$ คือผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ ส่วน $y_p(x)$ คือผลเฉลยเฉพาะ

บทนิยาม 2.4 [1] **วิธีแปรพารามิเตอร์** เป็นหนึ่งในวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์ และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ หรือเป็นตัวแปร

พิจารณา สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสองคือสมการที่อยู่ในรูป

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = b(x) \quad (2.3)$$

เมื่อ $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ และ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_0(x) \neq 0$ ใน I ให้ $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ เป็นผลเฉลยสมการเอกพันธ์ของ (2.3) นั่นคือ

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (2.4)$$

แทนตัวคงค่าไม่เจาะจง c_1 และ c_2 ในสมการ (2.4) ด้วย $u_1(x)$ และ $u_2(x)$ ตามลำดับจะได้ว่า

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (2.5)$$

เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์ จากนั้นหา $u_1(x)$ และ $u_2(x)$ เนื่องจากตัวไม่ทราบค่ามี 2 ตัว ดังนั้นจะต้องมีเงื่อนไข 2 เงื่อนไขเพราะฉะนั้นจากสมการ (2.5) หาอนุพันธ์จะได้

$$y'_p(x) = u_1(x)y'_1(x) + u'_1(x)y_1(x) + u_2(x)y'_2(x) + u'_2(x)y_2(x) \quad (2.6)$$

ซึ่งสามารถกำหนดเงื่อนไขแรกได้ดังนี้

$$u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) = 0 \quad (2.7)$$

จากสมการ (2.7) ทำให้สมการ (2.6) ได้เป็น

$$y'_p(x) = u_1(x)y'_1(x) + u_2(x)y'_2(x) \quad (2.8)$$

ต่อไปจะหาอนุพันธ์ของ (2.8) จะได้ว่า

$$y''_p(x) = u'_1(x)y'_1(x) + u_1(x)y''_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) + u_2(x)y''_2(x)$$

แทนค่า $y_p(x)$, $y'_p(x)$ และ $y''_p(x)$ ลงในสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} b(x) &= a_0(x)[u_1(x)y''_1(x) + u'_1(x)y'_1(x) + u_2(x)y''_2(x) + u'_2(x)y'_2(x)] \\ &\quad + a_1(x)[u_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y'_2(x)] \\ &\quad + a_2(x)[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)] \end{aligned}$$

จัดสมการใหม่จะได้เป็น

$$\begin{aligned} b(x) &= u_1(x)[a_0(x)y''_1(x) + a_1(x)y'_1(x) + a_2(x)y_1(x)] \\ &\quad + u_2(x)[a_0(x)y''_2(x) + a_1(x)y'_2(x) + a_2(x)y_2(x)] \\ &\quad + a_0(x)[u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

เนื่องจาก $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นผลเฉลยสมการเอกพันธ์ของ (2.3) ทำให้พจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของสมการ (2.9) มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (2.9) จะอยู่ในรูป

$$u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)} \quad (2.10)$$

ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่สอง ดังนั้นจากสมการ (2.7) และ (2.10) จะเป็นระบบสมการคือ

$$\begin{aligned} u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) &= 0 \\ u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{aligned}$$

หา $u'_1(x)$ และ $u'_2(x)$ จากการแก้ระบบสมการโดยใช้กฎคราเมอร์ จะได้ว่า

$$u'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{b(x)}{a_0(x)} & y'_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)}{y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)} \cdot \frac{b(x)}{a_0(x)} \quad (2.11)$$

และ

$$u'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y'_1(x) & \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)}{y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)} \cdot \frac{b(x)}{a_0(x)} \quad (2.12)$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (2.11) และ (2.12) เทียบตัวแปร t จาก x_0 ถึง x

$$u_1(x) + \hat{c}_1 = \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t)b(t)}{a_0(t)W} dt$$

$$u_2(x) + \hat{c}_2 = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)b(t)}{a_0(t)W} dt$$

แทน $u_1(x)$ และ $u_2(x)$ ใน (2.5) จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการ (2.3) ดังต่อไปนี้

$$y_p(x) = \hat{c}_1 y_1(x) + \hat{c}_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t)b(t)}{a_0(t)W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)b(t)}{a_0(t)W(y_1, y_2)(t)} dt$$

เมื่อ $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ เป็นค่าคงตัว และสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ตามสมการนี้

$$y_p(x) = \hat{c}_1 y_1(x) + \hat{c}_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{W_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{W_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \quad (2.13)$$

เมื่อ $W_i(x)$ คือรอนสเกียนที่แทนคอลัมน์ที่ i ด้วย $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{bmatrix}$

และ $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}, \forall x \in I$

ในบทนิยามต่อไปนี้จะกล่าวถึงสมการโคชี-ออยเลอร์และการเปลี่ยนสมการจากสมการโคชี-ออยเลอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 2.5 [1] สมการโคชี-ออยเลอร์ คือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรจะอยู่ในรูป

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \quad (2.14)$$

เมื่อ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว ถ้าแทนค่าตัวแปร x ในสมการ(2.14) ด้วย e^t แล้วสมการ (2.14) จะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มี t เป็นตัวแปรอิสระอยู่ในรูป

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = f(e^t) = F(t) \quad (2.15)$$

เมื่อ $b_0, b_1, \dots, b_n$ เป็นค่าคงตัว สมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์สามารถมีได้ n อันดับแต่ในงานนี้จะกล่าวถึงเฉพาะอันดับสอง

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้เพื่อใช้ในการคำนวณหาระยะของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

ทฤษฎีบท 2.6 [3] ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ แล้ว $|f|$ หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ และ

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

บทนิยามสุดท้ายนี้จะกล่าวถึงมีเสถียรภาพยูคลิดของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง

บทนิยาม 2.7 [4] สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (2.16)$$

ให้ I เป็นช่วงใดๆ โดยที่ $p \in C(I)$ และ $q \in C(I)$ มีเสถียรภาพยูคลิด เมื่อมี $L > 0$ ที่สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ และทุก $y_\varphi \in C^2(I)$ สอดคล้องกับ

$$|y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

สำหรับ $x \in I$ และจะมีผลเฉลย $y \in C^2(I)$ ของสมการ (2.16) ซึ่ง

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq L\varepsilon$$

สำหรับ $x \in I$ ในที่นี้เรียก L ว่าค่าคงที่ยูคลิด

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main results)

ในผลการศึกษาจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการมีเสถียรภาพยูแลมของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสองและสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์โดยพิจารณาจากผลเฉลยทั่วไปของทั้งสองสมการพร้อมพิสูจน์ กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (3.1)$$

โดย $x \in I, p, q, f \in C(I)$

จากวิธีการแปรพารามิเตอร์ในบทนิยาม 2.4 ทำให้ได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง (3.1) เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $p, q, f \in C(I, \mathbb{R})$ และ $y_1(x), y_2(x)$ เป็นผลเฉลยสมการเอกพันธ์ของ (3.1) แล้วผลเฉลยทั่วไป $y(x)$ ของ (3.1) จะอยู่ในรูป

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{W_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{W_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว, $W_i(x)$ คือรอนสเกียนที่แทนคอลัมน์ที่ i ด้วย $\begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$

$$\text{และ } W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \forall x \in I$$

□

ต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการมีเสถียรภาพยูแลมของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง (3.1)

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $p, q, f \in C(I, \mathbb{R})$ และ $y_1(x), y_1(x)$ เป็นผลเฉลยสมการเอกพันธ์ของ (3.1) สมมติให้ $\varphi : I \rightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า $y_\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ สอดคล้องกับสมการ

$$|y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varphi(x), \forall x \in I \quad (3.2)$$

แล้วจะมี $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ นั่นคือ $y(x)$ ที่สอดคล้องกับ (3.1) ที่ทำให้

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| \varphi(t) dt \right|$$

สำหรับทุก $x \in I$ โดย $W(y_1, y_2)(t, x) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$

พิสูจน์ กำหนดให้

$$y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) := f_\varphi(x) \quad (3.3)$$

โดยที่ $f_\varphi(x) = f(x) + \varphi(x)$

จากทฤษฎีบท 3.1 ได้ว่า

$$y_\varphi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t) f_\varphi(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t) f_\varphi(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

และ

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t) f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t) f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของ (3.3) และ (3.1) ตามลำดับ

พิจารณา

$$\begin{aligned} |y_\varphi(x) - y(x)| &= \left| y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t) (f_\varphi(t) - f(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t) (f_\varphi(t) - f(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \frac{-y_1(x) y_2(t) (f_\varphi(t) - f(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt + \int_{x_0}^x \frac{y_2(x) y_1(t) (f_\varphi(t) - f(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \frac{-y_1(x) y_2(t) (f_\varphi(t) - f(t)) + y_2(x) y_1(t) (f_\varphi(t) - f(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \frac{(f_\varphi(t) - f(t))(-y_1(x) y_2(t) + y_2(x) y_1(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \frac{(f(t) + \varphi(t) - f(t))(-y_1(x) y_2(t) + y_2(x) y_1(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| \varphi(t) dt \right| \end{aligned}$$

สำหรับทุก $x \in I$

□

บทแทรก 3.3 ให้ $p, q, f \in C([a, b], \mathbb{R})$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ถ้า $y_\varphi \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์อันดับได้ถึงอันดับสองซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$|y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

แล้วจะมีผลเฉลย $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ ของสมการ (2.3) ที่ทำให้

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq L\varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$ โดย

$$L = \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt$$

พิสูจน์ กำหนดให้

$$y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) := f_\varepsilon(x) \quad (3.4)$$

โดยที่ $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon$

จากทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| \varphi(t) dt \right|$$

ถ้าแทน $\varphi(t)$ ด้วย ε โดย $[x_0, x] = [a, b]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |y_\varphi(x) - y(x)| &\leq \left| \int_a^b \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| \varepsilon dt \right| \\ &\leq L\varepsilon \end{aligned}$$

□

กำหนดสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์อันดับสอง

$$x^2 y''(x) + \mu x y'(x) + \nu y(x) = f(x) \quad (3.5)$$

โดย $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ และ $\mu, \nu \in \mathbb{R}, 0 < a < b$ จากวิธีการแปรพารามิเตอร์ในบทนิยาม 2.4 ทำให้ได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับสอง (3.5) เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ และ $\mu, \nu \in \mathbb{R}, 0 < a < b$ โดย $y_1(x), y_2(x)$ เป็นผลเฉลยเอกพันธ์ของ (3.5) แล้วผลเฉลยทั่วไป $y(x)$ ของ (3.5) จะอยู่ในรูป

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{W_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{W_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว, $W_i(x)$ คือรอนสเกียนที่แทนคอลัมน์ที่ i ด้วย $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{x^2} \end{bmatrix}$

$$\text{และ } W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \forall x \in I$$

□

ต่อไปจะเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องการมีเสถียรภาพของสมการโคชี-ออยเลอร์ (3.5)

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\mu, v \in \mathbb{R}$ และ $y_1(x), y_2(x)$ เป็นผลเฉลยเอกพันธ์ของ (3.5) สมมติให้ $\varepsilon > 0$ ถ้า $y_\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ สอดคล้องกับสมการ

$$|x^2 y_\varphi''(x) + \mu x y_\varphi'(x) + v y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b] \quad (3.6)$$

แล้วจะมี $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ นั่นคือ $y(x)$ ที่สอดคล้องกับ (3.5) ที่ทำให้

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \varepsilon \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{t^2} \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt \right|$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$ โดย $W(y_1, y_2)(t, x) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$

พิสูจน์ กำหนดให้

$$x^2 y_\varphi''(x) + \mu x y_\varphi'(x) + v y_\varphi(x) := f_\varepsilon(x) \quad (3.7)$$

โดยที่ $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon$

จากทฤษฎีบท 3.4 ได้ว่า

$$y_\varphi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t) f_\varepsilon(t)}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t) f_\varepsilon(t)}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt$$

และ

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t) f(t)}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t) f(t)}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของ (3.4) และ (3.1) ตามลำดับ

พิจารณา

$$\begin{aligned}
|y_\varphi(x) - y(x)| &= \left| y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t) (f_\varepsilon(t) - f(t))}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t) (f_\varepsilon(t) - f(t))}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x \frac{-y_1(x)y_2(t) (f_\varepsilon(t) - f(t))}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt + \int_{x_0}^x \frac{y_2(x)y_1(t) (f_\varepsilon(t) - f(t))}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x \frac{-y_1(x)y_2(t) (f_\varepsilon(t) - f(t)) + y_2(x)y_1(t) (f_\varepsilon(t) - f(t))}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x \frac{(f_\varepsilon(t) - f(t))(-y_1(x)y_2(t) + y_2(x)y_1(t))}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x \frac{(f(t) + \varepsilon - f(t))(-y_1(x)y_2(t) + y_2(x)y_1(t))}{t^2 W(y_1, y_2)(t)} dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{t^2} \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt \right| \\
&= \varepsilon \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{t^2} \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt \right|
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq L\varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$ โดย

$$L = \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t^2} \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt$$

□

ในขั้นตอนต่อไปจะนำบทแทรกที่ 3.3 ไปประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่โดยแบ่งพิจารณาเป็น 3 กรณีตามรากของสมการช่วยของสมการเอกพันธ์ดังนี้
กรณีแรกคือ รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงสองตัวที่แตกต่างกัน

บทแทรก 3.6 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์อันดับสอง

$$y''(x) + \gamma y'(x) + \delta y(x) = f(x) \quad (3.8)$$

โดย γ, δ เป็นจำนวนจริง และ $f \in C(I, \mathbb{R})$ ซึ่งมีสมการช่วยคือ

$$m^2 + \gamma m + \delta = 0 \quad (3.9)$$

ให้ $\varphi : I \rightarrow [0, +\infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงสองตัวที่แตกต่างกัน m_1 และ m_2 ถ้า $y_\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

$$|y_\varphi''(x) + \gamma y_\varphi'(x) + \delta y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varphi(x) \quad (3.10)$$

สำหรับทุก $x \in I$ แล้วจะมีผลเฉลยของ $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ ของสมการ (3.8) ที่ซึ่ง

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{1}{|m_1 - m_2|} \left| \int_{x_0}^x |e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)}| \varphi(t) dt \right|$$

สำหรับทุก $x \in I$

พิสูจน์ กำหนดให้ $y_1(x) = e^{m_1 x}$ และ $y_2(x) = e^{m_2 x}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} &= \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)} \\ &= \frac{e^{m_1 t} \cdot e^{m_2 x} - e^{m_1 x} \cdot e^{m_2 t}}{e^{m_1 t} \cdot m_2 e^{m_2 t} - m_1 e^{m_1 t} \cdot e^{m_2 t}} \\ &= \frac{e^{m_2 x}}{m_2 e^{m_2 t} - m_1 e^{m_2 t}} - \frac{e^{m_1 x}}{m_2 e^{m_1 t} - m_1 e^{m_1 t}} \\ &= \frac{e^{m_2 x}}{e^{m_2 t}(m_2 - m_1)} - \frac{e^{m_1 x}}{e^{m_1 t}(m_2 - m_1)} \\ &= \frac{1}{m_2 - m_1} (e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)}) \end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt &= \int_{x_0}^x \left| \frac{1}{m_2 - m_1} (e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)}) \right| dt \\ &= \frac{1}{|m_2 - m_1|} \int_{x_0}^x |e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)}| dt \end{aligned}$$

เนื่องจากทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |y_\varphi(x) - y(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|m_2 - m_1|} \left| \int_{x_0}^x |e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)}| \varphi(t) dt \right| \end{aligned}$$

□

บทแทรกต่อไปจะกล่าวถึงการมีเสถียรภาพของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับสองที่มีรากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงสองจำนวนที่มีค่าเท่ากัน

บทแทรก 3.7 ให้ $\varphi : I \rightarrow [0, +\infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงสองตัวที่เหมือนกัน $m_1 = m_2$ ถ้า $y_\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (3.10) สำหรับทุก $x \in I$ แล้วจะมีผลเฉลยของ $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ ของสมการ (3.8) ที่ซึ่ง

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |(x-t)e^{m_1(x-t)}| \varphi(t) dt \right|$$

สำหรับทุก $x \in I$

พิสูจน์ กำหนดให้ $y_1(x) = e^{m_1 x}$ และ $y_2(x) = xe^{m_1 x}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} &= \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)} \\ &= \frac{e^{m_1 t}(xe^{m_1 x}) - e^{m_1 x}(te^{m_1 t})}{e^{2m_1 t}(m_1 t + 1) - e^{2m_1 t}(m_1 t)} \\ &= \frac{e^{m_1 t}(xe^{m_1 x})}{e^{2m_1 t}(m_1 t + 1 - m_1 t)} - \frac{e^{m_1 t}(te^{m_1 x})}{e^{2m_1 t}(m_1 t + 1 - m_1 t)} \\ &= \frac{xe^{m_1 x}}{e^{m_1 t}} - \frac{te^{m_1 x}}{e^{m_1 t}} \\ &= \frac{(x-t)e^{m_1 x}}{e^{m_1 t}} \\ &= (x-t)e^{m_1(x-t)} \end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt = \int_{x_0}^x |(x-t)e^{m_1(x-t)}| dt$$

เนื่องจากทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |y_\varphi(x) - y(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |(x-t)e^{m_1(x-t)}| \varphi(t) dt \right| \end{aligned}$$

□

บทแทรกต่อไปจะกล่าวถึงการมีเสถียรภาพของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับสองที่มีรากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน

บทแทรก 3.8 ให้ $\varphi : I \rightarrow [0, +\infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสมการช่วยมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน และสัมประสิทธิ์ของจำนวนเชิงซ้อน คือ $m_1 = \alpha + \beta i$ และ $m_2 = \alpha - \beta i$ ถ้า $y_\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (3.10) สำหรับทุก $x \in I$ แล้วจะมีผลเฉลยของ $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ ของสมการ (3.8) ที่ซึ่ง

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{1}{\beta} \left| \int_{x_0}^x |e^{\alpha(x-t)} \sin[\beta(x-t)]| \varphi(t) dt \right|$$

สำหรับทุก $x \in I$

พิสูจน์ กำหนดให้ $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ และ $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} &= \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)} \\ &= \frac{e^{\alpha t}e^{\alpha x}(\cos \beta t \sin \beta x) - e^{\alpha t}e^{\alpha x}(\cos \beta x \sin \beta t)}{e^{2\alpha t}(\beta \cos^2 \beta t + \alpha \sin \beta t \cos \beta t) - e^{2\alpha t}(-\beta \sin^2 \beta t + \alpha \sin \beta t \cos \beta t)} \\ &= \frac{e^{\alpha(x+t)}(\cos \beta t \sin \beta x - \cos \beta x \sin \beta t)}{e^{2\alpha t}(\beta \cos^2 \beta t + \beta \sin^2 \beta t)} \\ &= \frac{e^{\alpha(x+t)}(\sin[\beta(x-t)])}{e^{2\alpha t}\beta} \\ &= \frac{e^{\alpha(x-t)}(\sin[\beta(x-t)])}{\beta} \end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt &= \int_{x_0}^x \left| \frac{e^{\alpha(x-t)}(\sin[\beta(x-t)])}{\beta} \right| dt \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{x_0}^x |e^{\alpha(x-t)}(\sin[\beta(x-t)])| dt \end{aligned}$$

เนื่องจากทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |y_\varphi(x) - y(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\beta} \left| \int_{x_0}^x |e^{\alpha(x-t)} (\sin [\beta(x-t)])| \varphi(t) dt \right| \end{aligned}$$

□

ในขั้นตอนต่อไปได้บทแทรกที่ 3.3 ไปประยุกต์ใช้กับสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์กรณีแรกคือ รากของสมการช่วยของสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธ์เป็นจำนวนจริงสองตัวที่แตกต่างกัน

บทแทรก 3.9 กำหนดสมการออยเลอร์-โคชีอันดับสอง

$$x^2 y''(x) + \mu x y'(x) + v y(x) = f(x) \quad (3.11)$$

โดย μ, v เป็นจำนวนจริง และ $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $0 < a < b$ สามารถเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ที่มี t เป็นตัวแปรอิสระโดยให้ $x = e^t$ จะได้ $t = \ln x$ และ $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ จากกฎลูกโซ่ของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$$

และ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ในสมการ (3.11) จะได้

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right) + \mu x \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \right) + v y(t) &= f(e^t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \mu \frac{dy}{dt} + v y(t) &= F(t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + (\mu - 1) \frac{dy}{dt} + v y(t) &= F(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

สมการช่วยของสมการ (3.12) คือ

$$m^2 + (\mu - 1)m + v = 0 \quad (3.13)$$

ให้ $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ และ $\mu, v \in \mathbb{R}$ โดย $(\mu - 1)^2 - 4v > 0$ นั่นคือ สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงสองตัวที่แตกต่างกันคือ m_1 และ m_2

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ ถ้า $y_\varphi \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

$$|x^2 y_\varphi''(x) + \mu x y_\varphi'(x) + \nu y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (3.14)$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้วจะมีผลเฉลยของ $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ ของสมการ (3.11) ที่ซึ่ง

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|m_2 - m_1|} \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} - \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \right| dt$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$

พิสูจน์ กำหนดให้ $y_1(x) = x^{m_1}$ และ $y_2(x) = x^{m_2}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} &= \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)} \\ &= \frac{t^{m_1}x^{m_2} - x^{m_1}t^{m_2}}{t^{m_1} \cdot m_2 t^{m_2-1} - m_1 t^{m_1-1} \cdot t^{m_2}} \\ &= \frac{t^{m_1}x^{m_2}}{t^{m_1}(m_2 t^{m_2-1} - m_1 t^{m_2-1})} - \frac{x^{m_1}t^{m_2}}{t^{m_2}(m_2 t^{m_1-1} - m_1 t^{m_1-1})} \\ &= \frac{x^{m_2}}{t^{m_2-1}(m_2 - m_1)} - \frac{x^{m_1}}{t^{m_1-1}(m_2 - m_1)} \\ &= \frac{1}{m_2 - m_1} \left[t \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} - \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \right) \right] \end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt = \frac{1}{|m_2 - m_1|} \left| \int_{x_0}^x \left[t \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} - \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \right) \right] dt \right|$$

เนื่องจากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |y_\varphi(x) - y(x)| &\leq L\varepsilon \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t^2} \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt \cdot \varepsilon \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|m_2 - m_1|} \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} - \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \right| dt \end{aligned}$$

□

บทแทรกต่อไปจะกล่าวถึงการมีเสถียรภาพของสมการโคชี-ออยเลอร์ที่มีรากของสมการช่วยของสมการเอกพันธ์เป็นจำนวนจริงสองจำนวนที่มีค่าเท่ากัน

บทแทรก 3.10 ให้ $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ และ $\mu, v \in \mathbb{R}$ โดย $(\mu - 1)^2 - 4v = 0$ นั่นคือ สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงสองตัวที่เหมือนกันคือ $m_1 = m_2$ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ ถ้า $y_\varphi \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (3.14) สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้วจะมีผลเฉลยของ $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ ของสมการ (3.11) ที่ซึ่ง

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} \ln \left(\frac{x}{t} \right) \right| dt \cdot \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$

พิสูจน์ กำหนดให้ $y_1(x) = x^{m_1}$ และ $y_2(x) = x^{m_1} \ln x$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} &= \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)} \\ &= \frac{t^{m_1}(x^{m_1} \ln x) - x^{m_1}(t^{m_1} \ln t)}{t^{m_1}(t^{m_1-1} + m_1 t^{m_1-1} \ln t) - m_1 t^{m_1-1}(t^{m_1} \ln t)} \\ &= \frac{t^{m_1} \cdot x^{m_1} (\ln x - \ln t)}{t^{2m_1-1} + m_1 t^{2m_1-1} \cdot \ln t - m_1 t^{2m_1-1} \cdot \ln t} \\ &= \frac{t^{m_1} \cdot x^{m_1} \cdot \ln \left(\frac{x}{t} \right)}{t^{2m_1-1}(1 + m_1 \ln t - m_1 \ln t)} \\ &= \frac{t^{m_1} \cdot x^{m_1} \cdot \ln \left(\frac{x}{t} \right)}{t^{2m_1-1}} \\ &= t \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \ln \left(\frac{x}{t} \right) \end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\int_{x_0}^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt = \int_{x_0}^x \left| t \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \ln \left(\frac{x}{t} \right) \right| dt$$

เนื่องจากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |y_\varphi(x) - y(x)| &\leq L\varepsilon \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t^2} \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt \cdot \varepsilon \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \ln \left(\frac{x}{t} \right) \right| dt \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

□

บทที่ 4

ตัวอย่าง (Example)

ตัวอย่าง 1 : กรณีที่รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงสองตัวที่แตกต่างกัน กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 2 \quad \text{เมื่อ } x \in [0, 1] \quad (4.1)$$

จะแสดงว่าสมการ (4.1) มีเสียรภาพยูคลิด

หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ที่สอดคล้องกับสมการ (4.1) คือ $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$
สมการช่วย คือ

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$(m - 1)(m + 3) = 0$$

ดังนั้น $m_1 = 1$ และ $m_2 = -3$

ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ คือ $y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ โดย c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

นั่นคือ $y_1(x) = e^x$ และ $y_2(x) = e^{-3x}$

หาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีแปรพารามิเตอร์ได้ ดังนี้

กำหนดให้

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

นั่นคือ $y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-3x}$

$$\text{พิจารณา } W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -4e^{-2x}$$

$$W_{1,2(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ 2 & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} \quad \text{และ} \quad W_{2,2(x)} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 2 \end{vmatrix} = 2e^x$$

และ

$$u_1'(x) = \frac{W_{1,2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)} = \frac{e^{-x}}{2} \quad \text{และ} \quad u_2'(x) = \frac{W_{2,2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)} = -\frac{e^{3x}}{2} \quad (4.2)$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (4.2) เทียบตัวแปร t จาก 0 ถึง x

$$u_1(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt = -\frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad u_2(x) = -\int_0^x \frac{e^{3t}}{2} dt = -\frac{e^{3x}}{6} + \frac{1}{6}$$

นั่นคือ $y_p(x) = e^x \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} \right) + e^{-3x} \left(-\frac{e^{3x}}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-3x}}{6} - \frac{2}{3}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.1) คือ

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{2}{3} \quad (4.3)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$y''_{\varphi}(x) + 2y'_{\varphi}(x) - 3y_{\varphi}(x) = \frac{5}{2} \quad (4.4)$$

เมื่อ $x \in [0, 1]$ และ $\varphi(x) = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ที่สอดคล้องกับสมการ (4.4) คือ $y''_{\varphi}(x) + 2y'_{\varphi}(x) - 3y_{\varphi}(x) = 0$
สมการช่วย คือ

$$\begin{aligned} m^2 + 2m - 3 &= 0 \\ (m - 1)(m + 3) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $m_1 = 1$ และ $m_2 = -3$

ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ คือ $y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ โดย c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

นั่นคือ $y_1(x) = e^x$ และ $y_2(x) = e^{-3x}$

หาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีแปรพารามิเตอร์ได้ ดังนี้

กำหนดให้

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

นั่นคือ $y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-3x}$

พิจารณา $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -4e^{-2x}$

$$W_{1,2}(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ \frac{5}{2} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}e^{-3x} \quad \text{และ} \quad W_{2,2}(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}e^x$$

และ

$$u'_1(x) = \frac{W_{1,2}(x)}{W(y_1, y_2)(x)} = \frac{5}{8}e^{-x} \quad \text{และ} \quad u'_2(x) = \frac{W_{2,2}(x)}{W(y_1, y_2)(x)} = -\frac{5}{8}e^{3x} \quad (4.5)$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (4.5) เทียบตัวแปร t จาก 0 ถึง x

$$u_1(x) = \int_0^x \frac{5}{8}e^{-t} dt = -\frac{5}{8}e^{-x} + \frac{5}{8} \quad \text{และ} \quad u_2(x) = -\int_0^x \frac{5}{8}e^{3t} dt = -\frac{5}{24}e^{3x} + \frac{5}{24}$$

$$\text{นั่นคือ } y_p(x) = e^x \left(-\frac{5}{8}e^{-x} + \frac{5}{8} \right) + e^{-3x} \left(-\frac{5}{24}e^{3x} + \frac{5}{24} \right) = \frac{5}{8}e^x + \frac{5}{24}e^{-3x} - \frac{5}{6}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.4) คือ

$$y_\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{5}{6} \quad (4.6)$$

ให้ $m_1 = 1, m_2 = -3$ และ $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ โดย $x \in [0, 1]$ จากสมการ (4.1) จะได้ว่า

$$|y_\varphi''(x) + 2y_\varphi'(x) - 3y_\varphi(x) - 2| \leq \frac{1}{2}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{1}{|m_1 - m_2|} \left| \int_{x_0}^x |e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)}| \varphi(t) dt \right| &= \frac{1}{|1 - (-3)|} \left| \int_0^x |e^{-3(x-t)} - e^{(x-t)}| \frac{1}{2} dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left| \int_0^x (e^{-3x+3t} - e^{x-t}) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left| \left[\frac{e^{-3x+3t}}{3} + e^{x-t} \right]_0^x \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left| \frac{1}{3} + 1 - \frac{e^{-3x}}{3} - e^x \right| \\ &\leq \frac{1}{2} L \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } L = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{3} - \frac{e^{-3x}}{12} - \frac{e^x}{4} \right| = 0.3503$$

ดังนั้น สมการ (4.1) มีเสถียรภาพยูแลม และมีค่าคงที่ยูแลมเท่ากับ 0.3503 ต่อไปจะพิจารณาเสถียรภาพยูแลมโดยใช้การคำนวณแบบตรง

พิจารณา

$$|y_\varphi(x) - y(x)| = \left| -\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{3} \right|$$

ดังนั้น สมการ (4.1) มีเสถียรภาพยูแลม และมีค่าคงที่ยูแลมเท่ากับ $\frac{1}{3} = 0.3333$ จะพบว่าค่าคงที่ยูแลมสอดคล้องตามบทแทรก 3.6

□

ตัวอย่าง 2 : กรณีที่รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงสองตัวที่เหมือนกัน กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 4x^2 \quad \text{เมื่อ } x \in [0, 1] \quad (4.7)$$

จะแสดงว่า (4.7) มีเสถียรภาพยูเลม หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.7) จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{2x} + x^2 + 2x + \frac{3}{2} \quad (4.8)$$

และพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$y''_{\varphi}(x) - 4y'_{\varphi}(x) + 4y_{\varphi}(x) = \frac{8x^2 + 1}{2} \quad (4.9)$$

$x \in [0, 1]$ และ $\varphi(x) = \frac{8x^2 + 1}{2} - 4x^2 = \frac{1}{2}$ หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.9) จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$$y_{\varphi}(x) = (c_1 + c_2x)e^{2x} + x^2 + 2x + \frac{13}{8} \quad (4.10)$$

ให้ $m_1 = m_2 = 2$ และ $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ โดย $x \in [0, 1]$ จากสมการ (4.7) จะได้ว่า

$$|y''_{\varphi}(x) - 4y'_{\varphi}(x) - 4y_{\varphi}(x) - 4x^2| \leq \frac{1}{2} \quad (4.11)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x |(x-t)e^{m_1(x-t)}| \varphi(t) dt \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^x (x-t)e^{2(x-t)} dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_0^x (xe^{2(x-t)} - te^{2(x-t)}) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_0^x (xe^{2x} \cdot e^{-2t}) dt - \int_0^x (e^{2x} \cdot te^{-2t}) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| xe^{2x} \left[\frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^x + e^{2x} \left[\frac{t}{2e^{2t}} + \frac{1}{4e^{2t}} \right]_0^x \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{xe^{2x}}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2}L \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } L = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{xe^{2x}}{2} \right| = 3.6945$$

ดังนั้น สมการ (4.7) มีเสถียรภาพยูเลม และมีค่าคงที่ยูเลมเท่ากับ 3.6945 ต่อไปจะพิจารณาเสถียรภาพยูเลมโดยใช้การคำนวณแบบตรง

พิจารณา

$$|y_\varphi(x) - y(x)| = \left| \frac{13}{8} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)$$

ดังนั้น สมการ (4.1) มีเสถียรภาพยูเลม และมีค่าคงที่ยูเลมเท่ากับ $\frac{1}{4} = 0.2500$ จะพบว่าค่าคงที่ยูเลมสอดคล้องตามบทแทรก 3.7

□

ตัวอย่างที่ 3 :กรณีที่รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 6 \sin 2x + 7 \cos 2x \quad \text{เมื่อ } x \in [0, 1] \quad (4.12)$$

จะแสดงว่า (4.12) มีเสถียรภาพยูเลม หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.12) จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) + 2 \sin 2x - \cos 2x \quad (4.13)$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว และพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$y''_\varphi(x) + 2y'_\varphi(x) + 5y_\varphi(x) = \frac{12 \sin 2x + 14 \cos 2x + 1}{2} \quad (4.14)$$

$x \in [0, 1]$ และ $\varphi(x) = \frac{12 \sin 2x + 14 \cos 2x + 1}{2} - 6 \sin 2x + 7 \cos 2x = \frac{1}{2}$ หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.14) จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$$y_\varphi(x) = e^{-x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) + 2 \sin 2x - \cos 2x + \frac{1}{10} \quad (4.15)$$

ให้ $m = -1 \pm 2i$ และ $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ โดย $x \in [0, \pi]$ จากสมการ (4.12) จะได้ว่า

$$|y''_\varphi(x) + 2y'_\varphi(x) + 5y_\varphi(x) - 6 \sin 2x + 7 \cos 2x| \leq \frac{1}{2} \quad (4.16)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta} \left| \int_{x_0}^x |e^{\alpha(x-t)} (\sin [\beta(x-t)])| \varphi(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^x |e^{-(x-t)} \sin 2(x-t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^x |e^{-(x-t)} (\sin 2x \cos 2t - \cos 2x \sin 2t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^x \left| \frac{\sin 2x \cos 2te^t}{e^x} - \frac{\cos 2x \sin 2te^t}{e^x} \right| dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{\sin 2x}{5e^x} \left[e^t \cos 2t + 2e^t \sin 2t \right]_0^x - \frac{\cos 2x}{5e^x} \left[e^t \sin 2t - 2e^t \cos 2t \right]_0^x \right| \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \left| \int_{x_0}^x |e^{\alpha(x-t)} (\sin [\beta(x-t)])| \varphi(t) dt \right| &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{10e^x} (2e^x - 1 - 2 \cos x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} L \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } L = \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{1}{10e^x} (2e^x - 1 - 2 \cos x) \right| = 0.2043$$

ดังนั้น สมการ (4.12) มีเสถียรภาพยูเลม และมีค่าคงที่ยูเลมเท่ากับ 0.2043 ต่อไปจะพิจารณาเสถียรภาพยูเลมโดยใช้การคำนวณแบบตรง

พิจารณา

$$|y_\varphi(x) - y(x)| = \left| -\frac{1}{10} \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{5} \right|$$

ดังนั้น สมการ (4.12) มีเสถียรภาพยูเลม และมีค่าคงที่ยูเลมเท่ากับ $\frac{1}{5} = 0.2000$ จะพบว่าค่าคงที่ยูเลมสอดคล้องตามบทแทรก 3.8

□

ตัวอย่างที่ 4 : จะเป็นในส่วนของสมการโคชี-ออยเลอร์กรณีที่รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน กำหนดสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3 \quad \text{เมื่อ } x \in [0.5, 2] \quad (4.17)$$

จะแสดงว่า (4.17) มีเสถียรภาพยูเลม หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.17) จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3 \quad (4.18)$$

และพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$x^2 y_\varphi''(x) - 2xy_\varphi'(x) + 2y_\varphi(x) = \frac{2x^3 + 1}{2} \quad (4.19)$$

$x \in [0.5, 2]$ และ $\varphi(x) = \frac{2x^3 + 1}{2} - x^3 = \frac{1}{2}$ หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.19) จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$y_\varphi(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} \quad (4.20)$$

ให้ $m_1 = 1, m_2 = 2$ และ $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ โดย $x \in [0.5, 2]$ จากสมการ (4.17) จะได้ว่า

$$|x^2 y_\varphi''(x) - 2xy_\varphi'(x) + 2y_\varphi(x) - x^3| \leq \frac{1}{2} \quad (4.21)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon}{|m_2 - m_1|} \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} - \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \right| dt &= \frac{1}{2} \int_{0.5}^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right) - \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right| dt \\
 &= \frac{1}{2} \left| \int_{0.5}^x \left(\frac{x}{t^2} \right) dt - \int_{0.5}^x \left(\frac{x^2}{t^3} \right) dt \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \left[\frac{-x}{t} \right]_{0.5}^x + \left[\frac{x^2}{2t^2} \right]_{0.5}^x \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} + 2x - 2x^2 \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} L
 \end{aligned}$$

โดยที่ $L = \max_{x \in [0.5, 2]} \left| -\frac{1}{2} + 2x - 2x^2 \right| = 4.5000$

ดังนั้น สมการ (4.17) มีเสถียรภาพยูเลม และมีค่าคงที่ยูเลมเท่ากับ 4.5000 ต่อไปจะพิจารณาเสถียรภาพยูเลมโดยใช้การคำนวณแบบตรง

พิจารณา

$$|y_\varphi(x) - y(x)| = \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)$$

ดังนั้น สมการ (4.1) มีเสถียรภาพยูเลม และมีค่าคงที่ยูเลมเท่ากับ $\frac{1}{2} = 0.5000$ จะพบว่าค่าคงที่ยูเลมสอดคล้องตามบทแทรก 3.9

□

ตัวอย่างที่ 5 :จะเป็นในส่วนของสมการโคชี-ออยเลอร์กรณีที่รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน กำหนดสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^2 \ln x \quad \text{เมื่อ } x \in [0.5, 2] \quad (4.22)$$

จะแสดงว่า (4.22) มีเสถียรภาพยุคลेम หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.22) จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + \frac{3x^2(\ln x)^3 - 2(\ln x)^3}{6} \quad (4.23)$$

และพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์

$$x^2 y_\varphi''(x) - 3xy_\varphi'(x) + 4y_\varphi(x) = \frac{2x^2 \ln x + 1}{2} \quad (4.24)$$

$x \in [0.5, 2]$ และ $\varepsilon = \frac{2x^2 \ln x + 1}{2} - x^2 \ln x = \frac{1}{2}$ หาผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการ (4.24) จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$y_\varphi(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + \frac{20x^2(\ln x)^3 - 12 \ln x - 3}{24} \quad (4.25)$$

ให้ $m_1 = m_2 = 2$ และ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ โดย $x \in [0.5, 1]$ จากสมการ (4.22) จะได้ว่า

$$|x^2 y_\varphi''(x) - 3xy_\varphi'(x) + 4y_\varphi(x) - x^2 \ln x| \leq \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} \ln \left(\frac{x}{t} \right) \right| dt \cdot \varepsilon &= \frac{1}{2} \int_{0.5}^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^2 \ln \left(\frac{x}{t} \right) \right| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{0.5}^x \left| \frac{x^2 (\ln x - \ln t)}{t^3} \right| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{0.5}^x \left| \frac{x^2 \ln x}{t^3} - \frac{x^2 \ln t}{t^3} \right| dt \\ &= \frac{1}{2} \left| \left[-\frac{x^2 \ln x}{2t^2} + \frac{2x^2 \ln t + x^2}{4t^2} \right]_{0.5}^x \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{4} + 2x^2 \ln x + 2x^2 \ln 2 - x^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} L \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } L = \max_{x \in [0.5, 2]} \left| \frac{1}{4} + 2x^2 \ln x + 2x^2 \ln 2 - x^2 \right| = 7.3403$$

ดังนั้น สมการ (4.22) มีเสถียรภาพยุคลेम และมีค่าคงที่ยุคลेमเท่ากับ 7.3403 ต่อไปจะพิจารณาเสถียรภาพ

ยูแลมโดยใช้การคำนวณแบบตรง
พิจารณา

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0.5, 2]} |y_\varphi(x) - y(x)| &= \left| \frac{8(\ln x)^3(x^2 + 1) - 12 \ln x - 3}{24} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{8(\ln x)^3(x^2 + 1) - 12 \ln x - 3}{12} \right| \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ (4.22) มีเสถียรภาพยูแลม และมีค่าคงที่ยูแลมเท่ากับ 0.1670 จะพบว่าค่าคงที่ยูแลมสอดคล้องตามบทแทรก 3.10



บรรณานุกรม

- [1] รศ.ดร.สุพจน์ ไวฑูรยางกูร,สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ,ขอนแก่นการพิมพ์,2550,1-230
- [2] Yonghong Shen, Yongjin Li, A General Method for the Ulam Stability of Linear Differential Equations.3192-3197(2018)
- [3] รศ.ดร.บัญชา ปัญญานาค,การวิเคราะห์เชิงจริง 1,2561,166-180
- [4] Masakazu Onitsuka, Ulam stability for second-order linear differential equations with three variable coefficients, 2022

Abstract

This study is focused on the Ulam stability of second order nonhomogeneous linear differential equations of the form $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ where $x \in I$ using the method of variation of parameters to find the particular solution and this method is also utilized to study the Ulam stability of second order nonhomogeneous linear differential equations. Furthermore, we apply the obtained results to the non-homogeneous Cauchy-Euler equations. Some examples are given to show that the proposed theorems are satisfied.

Definition of Ulam staility

The second-order nonhomogeneous linear differential equations is given as follows

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad (1)$$

where $x \in I, p \in C^1(I)$ and $q \in C(I)$ is said to be **Ulam stable** on I if there exists a constant $L > 0$ such that for every $\varepsilon > 0$ and every $y_\varphi \in C^2(I)$ satisfying

$$|y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

for all $x \in I$, then exists a solution $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ of (1) such that

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq L\varepsilon,$$

for all $x \in I$. Here L is called an Ulam constant.

Study Results

The homogeneous linear differential equation of (1) is given by

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (3)$$

Theorem 1 : Let $p, q, f \in C(I, \mathbb{R})$ and let $y_1(x), y_2(x)$ be fundamental solutions of (3). Assume that $\varphi : I \rightarrow [0, \infty)$ is continuous function. If $y_\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ satisfies the differential inequality

$$|y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varphi(x), \quad (4)$$

for all $x \in I$, then exists $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ such that $y(x)$ satisfies (1) and

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \varphi(t) dt \right|,$$

for all $x \in I$, where

$$W(y_1, y_2)(t, x) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}.$$

Theorem 2 : Let $p, q, f \in C([a, b], \mathbb{R})$. For given $\varepsilon > 0$, if a twice continuously differentiable function $y_\varphi \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ satisfies the following inequality

$$|y_\varphi''(x) + p(x)y_\varphi'(x) + q(x)y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

for all $x \in [a, b]$, then there exists a solution $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ of (1) such that

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq L\varepsilon,$$

for all $x \in [a, b]$, where

$$L = \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \left| \frac{W(y_1, y_2)(t, x)}{W(y_1, y_2)(t)} \right| dt.$$

Theorem 3 : The second-order nonhomogeneous linear differential equations with constant coefficients is given as follows

$$y''(x) + \gamma y'(x) + \delta y(x) = f(x), \quad (6)$$

where γ, δ are real constants, $f \in C(I, \mathbb{R})$. The associated characteristic equation is

$$m^2 + \gamma m + \delta = 0. \quad (7)$$

Let $\varphi : I \rightarrow [0, \infty)$ be a continuous function. Assume that the characteristic equation (7) has two distinct real roots m_1 and m_2 . If $y_\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ satisfies the differential inequality

$$|y_\varphi''(x) + \gamma y_\varphi'(x) + \delta y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varphi(x), \quad (8)$$

for all $x \in I$, then there exists a solution $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ of (6) such that

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{1}{|m_1 - m_2|} \left| \int_{x_0}^x e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)} \varphi(t) dt \right|,$$

for all $x \in I$.

Theorem 4 : The nonhomogeneous Cauchy-Euler differential equations of second order is given as follows

$$x^2 y''(x) + \mu x y'(x) + \nu y(x) = f(x), \quad (9)$$

where $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. The characteristic equation of homogeneous equation (9) is

$$m^2 + (\mu - 1)m + \nu = 0. \quad (10)$$

Let $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ and $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ with $(\mu - 1)^2 - 4\nu > 0$. Assume that the characteristic equation (10) has two distinct real roots m_1 and m_2 .

For a given $\varepsilon > 0$, if a twice continuously differentiable function $y_\varphi \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ satisfies the following inequality

$$|x^2 y_\varphi''(x) + \mu x y_\varphi'(x) + \nu y_\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (11)$$

for all $x \in [a, b]$, then there exists a solution $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ of (9) such that

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|m_2 - m_1|} \max_{x \in [a, b]} \int_a^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} - \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \right| dt$$

for all $x \in [a, b]$.

Example

Example 1 : Consider the differential equations

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 2, \quad x \in [0, 1], \quad (12)$$

and

$$y_\varphi''(x) + 2y_\varphi'(x) - 3y_\varphi(x) = \frac{5}{2}, \quad x \in [0, 1]. \quad (13)$$

The general solution of (12) is

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{2}{3},$$

and (13) is

$$y_\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{5}{6}.$$

We see that

$$|y_\varphi(x) - y(x)| = \left| -\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right).$$

Therefore, (12) is Ulam stable on $[0, 1]$ with Ulam constant $L = 0.3333$.

Using Theorem 3, we get

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{1}{|m_1 - m_2|} \max_{x \in [0, 1]} \int_0^x |e^{m_2(x-t)} - e^{m_1(x-t)}| \varphi(t) dt$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \left| \frac{4}{3} - \frac{e^{-3}}{3} - e \right|.$$

Therefore, (12) is Ulam stable on $[0, 1]$ with Ulam constant $L = 0.3503$.

Example 2 : Consider the Cauchy-Euler differential equations

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3, \quad x \in [0.5, 2] \quad (14)$$

and

$$x^2 y_\varphi''(x) - 2xy_\varphi'(x) + 2y_\varphi(x) = x^3 + \frac{1}{2}, \quad x \in [0.5, 2]. \quad (15)$$

The general solution of (14) is

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3,$$

and (15) is

$$y_\varphi(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4}.$$

We see that

$$|y_\varphi(t) - y(t)| = \left| \frac{1}{4} \right| = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right).$$

Therefore, (14) is Ulam stable on $[0.5, 2]$ with Ulam constant $L = 0.5000$.

Using Theorem 4, we have

$$|y_\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|m_2 - m_1|} \max_{x \in [0.5, 2]} \int_{0.5}^x \frac{1}{t} \left| \left(\frac{x}{t} \right)^{m_2} - \left(\frac{x}{t} \right)^{m_1} \right| dt$$

$$= \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} + 4 - 8 \right|.$$

Therefore, (14) is Ulam stable on $[0.5, 2]$ with Ulam constant $L = 4.5000$.

References

- [1] Assoc. Prof. Dr.Bancha Panyanak, Real Analysis 1, 166-180(2561)
- [2] Assoc.Prof.Dr.Supot Waitayangkurn, Ordinary Differential Equations, 470(2550)
- [3] Masakazu Onitsuka, Ulam stability for second-order linear differential equations with three variable coefficients (2022)
- [4] Yonghong Shen, Yongjin Li, A General Method for the Ulam Stability of Linear Differential Equations, 3192-3197(2018)