

ตัวแทนเมทริกซ์ของควอเทอเนียน
(Matrix representation of quaternions)

นางสาวพัชญากร ศักดิ์บุญ
รหัสนักศึกษา 630510489

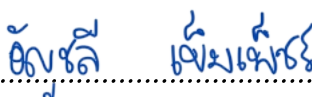
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

ตัวแทนเมทริกซ์ของควอเทอเนียน
(Matrix representation of quaternions)

พัชญากร ศักดิ์บุญ

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

 ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร)

 กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.รณดล ชาวบ้านเกาะ)

วันที่ 24 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2567

ตัวแทนเมทริกซ์ของควอเทอเนียน
(Matrix representation of quaternions)

นางสาวพัชญากร ศักดิ์บุญ
รหัสนักศึกษา 630510489

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษากระบวนการวิชา 206499 (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาสาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้ศึกษาค้นคว้าอิสระในหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้ศึกษาค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่องตัวแทนเมทริกซ์ของควอเทอเนียน

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร ประธานกรรมการสอบในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระที่ได้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการทำงานค้นคว้าอิสระ คอยติดตามความก้าวหน้าในการดำเนินการ รวมถึงการนำเสนอ และรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ความถูกต้องของการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ชนดล ขาวบ้านเกาะ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ได้สละเวลาให้คำแนะนำ รวมถึงตรวจสอบความถูกต้องในการค้นคว้านี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ทั้งใน และนอกตำราเรียนให้แก่ข้าพเจ้าอันเป็นประโยชน์ และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้

และสุดท้ายนี้หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชม หรือเกิดประโยชน์ประการใด ข้าพเจ้าขอมอบคำชื่นชมนั้นให้แก่ บิดา มารดา อาจารย์ที่ปรึกษา คณาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่านที่คอยชี้แนะแนวทาง และให้ความรู้แก่ข้าพเจ้า แต่หากมีข้อผิดพลาดประการใด ข้าพเจ้าขอน้อมรับแต่เพียงผู้เดียว และยินดีที่จะรับฟังความคิดเห็น และคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา และต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้

พัชญากร ศักดิ์บุญ

หัวข้อ (ภาษาไทย) ตัวแทนเมทริกซ์ของควอเทอเนียน
(ภาษาอังกฤษ) Matrix representation of quaternions
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวพัชญากร ศักดิ์บุญ รหัสนักศึกษา 630510489
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร
ชื่อกรรมการสอบ รองศาสตราจารย์ ดร.ธนดล ชาวบ้านเกาะ

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษาความสัมพันธ์ของตัวแทนเมทริกซ์ 4×4 ของหน่วยจินตภาพของควอเทอเนียน กับเมทริกซ์พอลลี 4×4 และสร้างกลุ่มที่ก่อกำเนิดจากเมทริกซ์เหล่านี้ เราได้แสดงว่ากรุปย่อยทั้งหมดของกรุปนี้เป็นกรุปย่อยปกติ

Abstract

In this independent study, we study the relationship of 4×4 matrix representations of imaginary units of quaternions and the 4×4 Pauli matrices and form a group generated by theses matrices. We show that all subgroups of this group are normal subgroups.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	3
3 ผลการศึกษา (Results)	5
4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	27
บรรณานุกรม	28

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

จากกระบวนวิชา 206390 สัมมนาทางคณิตศาสตร์ (Seminar in mathematics) เราได้ทำการศึกษา
บทความทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อเรื่องการสร้างกรุปด้วยเมทริกซ์ 4×4 (Forming groups with 4×4 matrices)
[1] โดยเราได้ศึกษาความสัมพันธ์ของเมทริกซ์พอลิ 4×4 กับเมทริกซ์ 4×4 ของหน่วยจินตภาพของควอเทอ
เนียนในรูปแบบหนึ่ง

เมทริกซ์พอลิ (Pauli matrices) คือเมทริกซ์ 2×2 จำนวน 3 เมทริกซ์ที่นิยามดังนี้

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

โดยที่ i คือหน่วยจินตภาพ (imaginary unit) ของจำนวนเชิงซ้อน

เมทริกซ์เหล่านี้สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 = c^2 = I$ โดยที่ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ 2×2 และสอดคล้อง
กับความสัมพันธ์แอนติคอมมิวต์ (anticommute) ดังนี้

$$bc = -cb = ia$$

$$ca = -ac = ib$$

$$ab = -ba = ic$$

พิจารณาเมทริกซ์ ia, ib และ ic เนื่องจาก i คือตัวคูณสเกลาร์ของเมทริกซ์พอลิ ดังนั้นจึงสามารถสลับที่กับแต่ละ
เมทริกซ์ a, b, c ได้ นั่นคือ $ia = ai, ib = bi, ic = ci$

ข้อสังเกตในทฤษฎีจำนวนเชิงซ้อนกล่าวว่า [2] จำนวนเชิงซ้อนทั่วไป $x + yi$ โดยที่ $x, y \in \mathbb{R}$ สามารถเขียน
แทนได้ในรูป $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ กล่าวคือเซตของจำนวนเชิงซ้อน $\{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$ สมสัณฐาน (isomorphic) กับเซต
ของเมทริกซ์ $\left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ดังนั้นเราสามารถเขียนแทน $0, 1, -1, i$ และ $-i$ เป็นเมทริกซ์ 2×2 ได้
ตามลำดับดังนี้

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

เมื่อแทนลงในเมทริกซ์พอลิ a, b และ c จะได้เมทริกซ์พอลิ 4×4 ตามลำดับดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ควอเทอร์เนียน (quaternion) เป็นจำนวนที่อยู่ในรูป $p + qh + rj + sk$ โดยที่ h, j, k เป็นหน่วยจินตภาพ ซึ่ง $h^2 = j^2 = k^2 = -1$ และ $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ โดยเราสามารถเขียนแทนควอเทอร์เนียนในรูปเมทริกซ์ 4×4 ได้หลายรูปแบบ ในบทความนี้เราสนใจที่จะศึกษาตัวแทนเมทริกซ์ของควอเทอร์เนียน $p + qh + rj + sk$ ในรูป

$$\begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & r \\ r & -s & p & -q \\ s & -r & q & p \end{pmatrix}$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนแทนหน่วยจินตภาพ h, j และ k ด้วยเมทริกซ์ 4×4 ตามลำดับดังนี้

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์เอกลักษณ์ (*identity matrix or unit matrix*) คือเมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็น 1 ทุกตัว และสมาชิกตำแหน่งอื่นเป็น 0 เราจะใช้ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ $n \times n$ และจะได้ว่า $AI_n = I_nA = A$ โดยที่ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ เช่น

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

บทนิยาม 2.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ ซึ่งทำให้ $AB = BA = I_n$ แล้วจะเรียก B ว่า ตัวผกผัน (*inverse*) ของเมทริกซ์ A

บทนิยาม 2.3 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (*transpose of a matrix*) คือเมทริกซ์ที่ได้จากการสลับสมาชิกจากแถวเป็นหลัก และจากหลักเป็นแถวของเมทริกซ์ต้นแบบ เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A จะเขียนแทนด้วย A^T

บทนิยาม 2.4 [1] เมทริกซ์พอลลี (*Pauli*) คือเมทริกซ์ 2×2 จำนวน 3 เมทริกซ์ที่นิยามดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.5 [2] จำนวนเชิงซ้อนทั่วไป $x + yi$ โดยที่ $x, y \in \mathbb{R}$ สามารถเขียนแทนได้ในรูป

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

ข้อสังเกต 2.6 จากทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่า

(1) เราสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ในรูปเมทริกซ์ 2×2 ได้ ตัวอย่างเช่น

$$2 + 3i \text{ เขียนแทนได้ด้วย } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 - 4i \text{ เขียนแทนได้ด้วย } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

และสามารถแทนการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้ด้วยการบวกและการคูณของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น

$$\text{การบวก : } (2 + 3i) + (1 - 4i) = 3 - i \quad \text{เขียนแทนได้ด้วย } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{การคูณ : } (2 + 3i)(1 - 4i) = 14 - 5i \quad \text{เขียนแทนได้ด้วย } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$$

(2) เราสามารถเขียนแทน 0, 1, -1 , i และ $-i$ เป็นเมทริกซ์ 2×2 ได้ตามลำดับดังนี้

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

แทนลงในเมทริกซ์พอลิ a , b และ c จะได้เมทริกซ์พอลิ 4×4 ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

บทนิยาม 2.7 ควอเทอร์เนียน (*quaternion*) เป็นจำนวนที่อยู่ในรูป

$$p + qh + rj + sk$$

โดยที่ h, j, k เป็นหน่วยจินตภาพ ซึ่ง $h^2 = j^2 = k^2 = -1$ และ $p, q, r, s \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.8 [3] ควอเทอร์เนียน $p + qh + rj + sk$ โดยที่ $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ สามารถเขียนแทนได้ในรูปเมทริกซ์ 4×4 ดังนี้

$$\begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & r \\ r & -s & p & -q \\ s & -r & q & p \end{pmatrix}$$

บทนิยาม 2.9 กำหนดให้ G เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G จะเรียก $(G, *)$ ว่า **กรุป (group)** ก็ต่อเมื่อ

- (1) $(G, *)$ มีสมบัติปิด : สำหรับทุก $x, y \in G$ จะได้ว่า $x * y \in G$
- (2) $(G, *)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ : $x, y, z \in G$ จะได้ว่า $(x * y) * z = x * (y * z)$
- (3) $(G, *)$ มีสมบัติการมีเอกลักษณ์ : จะต้องสมาชิกของ $e \in G$ ที่ทำให้ $x * e = x = e * x$ สำหรับทุก $x \in G$ จะเรียก e ว่า สมาชิกเอกลักษณ์
- (4) $(G, *)$ สมบัติการมีตัวผกผัน : สำหรับแต่ละ $x \in G$ จะมี $y \in G$ ที่ทำให้ $x * y = e = y * x$ และเรียกสมาชิก y ว่า สมาชิกผกผันของ x

บทนิยาม 2.10 ถ้า $(G, *)$ เป็นกรุป และ $F \subseteq G$ โดยที่ $F \neq \emptyset$ จะเรียก F ว่าเป็น **กรุปย่อย (subgroup)** ของ G ก็ต่อเมื่อ $(F, *)$ เป็นกรุป

บทนิยาม 2.11 [4] ให้ F เป็นกรุปย่อยของกรุป G จะเรียกว่า F เป็น **กรุปย่อยปกติ (normal subgroup)** ของ G ถ้าทุก $x \in G$ จะได้ว่า $xFx^{-1} = F$ โดยที่ $xFx^{-1} = \{xfx^{-1} : f \in F\}$

ทฤษฎีบท 2.12 [4] ให้ F เป็นกรุปย่อยของ G จะได้ว่า F เป็นกรุปย่อยปกติของ G ก็ต่อเมื่อทุก $x \in G$ จะได้ว่า $xF = Fx$ โดยที่ $xF = \{xf : f \in F\}$ และ $Fx = \{fx : f \in F\}$

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

จากบทนิยาม 2.7 เราสามารถเขียนควอเตอร์เนียน $p + qh + rj + sk$ ได้ในรูปเมทริกซ์ 4×4 ดังนี้

$$\begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & r \\ r & -s & p & -q \\ s & -r & q & p \end{pmatrix}$$

จะได้ว่าหน่วยจินตภาพ h, j, k ของควอเตอร์เนียนสามารถเขียนแทนได้ด้วยเมทริกซ์ 4×4 ตามลำดับต่อไปนี้

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ในบทนี้เราจะใช้สัญลักษณ์ $I = I_4$ แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ 4×4

ให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์พอลิ 4×4

ให้ H, J, K เป็นตัวแทนเมทริกซ์ 4×4 ของหน่วยจินตภาพ h, j, k ของควอเตอร์เนียนตามลำดับ

เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์เหล่านี้ดังแสดงในทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1

- (1) $A^2 = B^2 = C^2 = I$
- (2) $BC = -CB = K$
- (3) $CA = -AC = J$
- (4) $AB = -BA = H$

พิสูจน์

(1) จะแสดงว่า $A^2 = B^2 = C^2 = I$

พิจารณา

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ดังนั้น $A^2 = B^2 = C^2 = I$

(2) จะแสดงว่า $BC = -CB = K$

พิจารณา

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

$$-CB = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

ดังนั้น $BC = -CB = K$

(3) จะแสดงว่า $CA = -AC = J$

พิจารณา

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

$$-AC = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

ดังนั้น $CA = -AC = J$

(4) จะแสดงว่า $AB = -BA = H$

พิจารณา

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = H$$

$$-BA = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = H$$

ดังนั้น $AB = -BA = H$

■

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2

$$(1) \quad H^2 = J^2 = K^2 = -I$$

$$(2) \quad HJ = -JH = K$$

$$(3) \quad JK = -KJ = H$$

$$(4) \quad KH = -HK = J$$

พิสูจน์

(1) จะแสดงว่า $H^2 = J^2 = K^2 = -I$

พิจารณา

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

ดังนั้น $H^2 = J^2 = K^2 = -I$

พิจารณา

ดังนั้น $HJ = -JH = K$

พิจารณา

ดังนั้น $JK = -KJ = H$

พิจารณา

8

$$-HK = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

ดังนั้น $KH = -HK = J$

■

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3

$$(1) \quad HA = -AH = -KC = CK = -B$$

$$(2) \quad HB = -BH = -JC = CJ = A$$

$$(3) \quad HC = CH = JB = BJ = KA = AK$$

$$(4) \quad JA = -AJ = -KB = BK = C$$

พิสูจน์

$$(1) \quad \text{จะแสดงว่า } HA = -AH = -KC = CK = -B$$

พิจารณา

$$HA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$-AH = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$-KC = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$CK = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$\text{ดังนั้น } HA = -AH = -KC = CK = -B$$

$$KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $HC = CH = JB = BJ = KA = AK$

(4) จะแสดงว่า $JA = -AJ = -KB = BK = C$

พิจารณา

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

$$-AJ = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

$$-KB = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

$$BK = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

ดังนั้น $JA = -AJ = -KB = BK = C$

■

ต่อไปเราจะสร้างกรุปที่ก่อกำเนิดจากเมทริกซ์พอลิ A, B, C และตัวแทนเมทริกซ์ H, J, K ของหน่วยจินตภาพ h, j, k ของควอเทอร์เนียนตามลำดับ ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $G = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K, A, -A, B, -B, C, -C, HC, -HC\}$ และ $*$ แทนการคูณกันของเมทริกซ์ จะได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป

พิสูจน์ ให้ $G = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K, A, -A, B, -B, C, -C, HC, -HC\}$ และ $*$ แทนการคูณกันของเมทริกซ์

จะพิสูจน์ว่า $(G,*)$ เป็นกรุป

(1) จะพิสูจน์ว่า $(G,*)$ มีสมบัติปิด

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.1, 3.2 และ 3.3 จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน G ดังต่อไปนี้

*	I	-I	H	-H	J	-J	K	-K	A	-A	B	-B	C	-C	HC	-HC
I	I	-I	H	-H	J	-J	K	-K	A	-A	B	-B	C	-C	HC	-HC
-I	-I	I	-H	H	-J	J	-K	K	-A	A	-B	B	-C	C	-HC	HC
H	H	-H	I	-I	K	-K	J	-J	B	-B	A	-A	HC	-HC	-C	C
-H	-H	H	I	-I	K	-K	-J	J	-B	B	-A	A	-HC	HC	C	-C
J	J	-J	-K	K	-I	I	H	-H	-C	C	HC	-HC	A	-A	-B	B
-J	-J	J	K	-K	I	-I	-H	H	C	-C	-HC	HC	-A	A	B	-B
K	K	-K	-J	J	H	-H	-I	I	HC	-HC	C	-C	-B	B	-A	A
-K	-K	K	J	-J	-H	H	I	-I	-HC	HC	-C	C	B	-B	A	-A
A	A	-A	-B	B	C	-C	HC	-HC	I	-I	-H	H	J	-J	K	-K
-A	-A	A	B	-B	-C	C	-HC	HC	-I	I	H	-H	-J	J	-K	K
B	B	-B	A	-A	HC	-HC	-C	C	H	-H	I	-I	-K	K	J	-J
-B	-B	B	-A	A	-HC	HC	C	-C	-H	H	-I	I	K	-K	-J	J
C	C	-C	HC	-HC	-A	A	B	-B	-J	J	K	-K	I	-I	H	-H
-C	-C	C	-HC	HC	A	-A	-B	B	J	-J	-K	K	-I	I	-H	H
HC	HC	-HC	-C	C	-B	B	-A	A	K	-K	J	-J	H	-H	-I	I
-HC	-HC	HC	C	-C	B	-B	A	-A	-K	K	-J	J	-H	H	I	-I

ดังนั้น $(G,*)$ มีสมบัติปิด

(2) จะพิสูจน์ว่า $(G,*)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

เนื่องจากการคูณกันของเมทริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

ดังนั้น $(G,*)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

(3) จะพิสูจน์ว่า $(G,*)$ มีสมบัติการมีเอกลักษณ์

เนื่องจากสมาชิกทุกตัวใน G เป็นเมทริกซ์ 4×4 และ $I \in G$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ 4×4

ดังนั้น $(G,*)$ มีสมบัติการมีเอกลักษณ์

(4) จะพิสูจน์ว่า $(G,*)$ มีสมบัติการมีตัวผกผัน

จากตารางผลคูณในข้อ (1) สังเกตว่า $x^2 = I$ หรือ $-x^2 = I$ สำหรับทุก $x \in G$

นั่นคือ x หรือ $-x$ เป็นตัวผกผันของ x สำหรับทุก $x \in G$

จะได้ว่าสมาชิกทุกตัวใน G มีตัวผกผัน

ดังนั้น $(G,*)$ มีสมบัติการมีตัวผกผัน

สรุปได้ว่า $(G,*)$ เป็นกรุป

■

ต่อไปเราจะพิจารณากลุ่ย่อยทั้งหมดของกรุป G ในทฤษฎีบท 3.4 ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $F_1 = \{I\}$, $F_2 = \{I, -I\}$, $F_3 = \{I, A\}$, $F_4 = \{I, B\}$, $F_5 = \{I, C\}$, $F_6 = \{I, -A\}$, $F_7 = \{I, -B\}$, $F_8 = \{I, -C\}$, $F_9 = \{I, -I, H, -H\}$, $F_{10} = \{I, -I, J, -J\}$, $F_{11} = \{I, -I, K, -K\}$, $F_{12} = \{I, -I, HC, -HC\}$, $F_{13} = \{I, -I, A, -A, B, -B, H, -H\}$, $F_{14} = \{I, -I, B, -B, C, -C, K, -K\}$, $F_{15} = \{I, -I, C, -C, A, -A, J, -J\}$, $F_{16} = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K\}$ จะได้ว่า F_i เป็นกรุ่ย่อยของกรุป G ในทฤษฎีบท 3.4 สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

พิสูจน์ จะพิสูจน์ว่า F_i เป็นกรุ่ย่อยของ G สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

- (1) จะพิสูจน์ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติปิด สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

กรณีที่ 1 : $F_1 = \{I\}$

$$I * I = I$$

ดังนั้น $(F_1, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 2 : $F_2 = \{I, -I\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_2 ดังนี้

*	I	$-I$
I	I	$-I$
$-I$	$-I$	I

ดังนั้น $(F_2, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 3 : $F_3 = \{I, A\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_3 ดังนี้

*	I	A
I	I	A
A	A	I

ดังนั้น $(F_3, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 4 : $F_4 = \{I, B\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_4 ดังนี้

*	I	B
I	I	B
B	B	I

ดังนั้น $(F_4, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 5 : $F_5 = \{I, C\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_5 ดังนี้

*	I	C
I	I	C
C	C	I

ดังนั้น $(F_5, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 6 : $F_6 = \{I, -A\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_6 ดังนี้

*	I	$-A$
I	I	$-A$
$-A$	$-A$	I

ดังนั้น $(F_6, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 7 : $F_7 = \{I, -B\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_7 ดังนี้

*	I	$-B$
I	I	$-B$
$-B$	$-B$	I

ดังนั้น $(F_7, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 8 : $F_8 = \{I, -C\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_8 ดังนี้

*	I	$-C$
I	I	$-C$
$-C$	$-C$	I

ดังนั้น $(F_8, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 9 : $F_9 = \{I, -I, H, -H\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_9 ดังนี้

*	I	$-I$	H	$-H$
I	I	$-I$	H	$-H$
$-I$	$-I$	I	$-H$	H
H	H	$-H$	$-I$	I
$-H$	$-H$	H	I	$-I$

ดังนั้น $(F_9, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 10 : $F_{10} = \{I, -I, J, -J\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_{10} ดังนี้

*	I	$-I$	J	$-J$
I	I	$-I$	J	$-J$
$-I$	$-I$	I	$-J$	J
J	J	$-J$	$-I$	I
$-J$	$-J$	J	I	$-I$

ดังนั้น $(F_{10}, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีท่ 11 : $F_{11} = \{I, -I, K, -K\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_{11} ดังนี้

*	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>
<i>-I</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>-K</i>	<i>K</i>
<i>K</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>
<i>-K</i>	<i>-K</i>	<i>K</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>

ดังนั้น $(F_{11},*)$ มีสมบัติปิด

กรณีท่ 12 : $F_{12} = \{I, -I, HC, -HC\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_{12} ดังนี้

*	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>HC</i>	<i>-HC</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>HC</i>	<i>-HC</i>
<i>-I</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>-HC</i>	<i>HC</i>
<i>HC</i>	<i>HC</i>	<i>-HC</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>
<i>-HC</i>	<i>-HC</i>	<i>HC</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>

ดังนั้น $(F_{12},*)$ มีสมบัติปิด

กรณีท่ 13 : $F_{13} = \{I, -I, A, -A, B, -B, H, -H\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_{13} ดังนี้

*	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>A</i>	<i>-A</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>H</i>	<i>-H</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>A</i>	<i>-A</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>H</i>	<i>-H</i>
<i>-I</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>-A</i>	<i>A</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>	<i>-H</i>	<i>H</i>
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>-A</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>-H</i>	<i>H</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>
<i>-A</i>	<i>-A</i>	<i>A</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>H</i>	<i>-H</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>H</i>	<i>-H</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>A</i>	<i>-A</i>
<i>-B</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>	<i>-H</i>	<i>H</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>-A</i>	<i>A</i>
<i>H</i>	<i>H</i>	<i>-H</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>A</i>	<i>-A</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>
<i>-H</i>	<i>-H</i>	<i>H</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>	<i>-A</i>	<i>A</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>

ดังนั้น $(F_{13},*)$ มีสมบัติปิด

กรณีท่ 14 : $F_{14} = \{I, -I, B, -B, C, -C, K, -K\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_{14} ดังนี้

*	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>C</i>	<i>-C</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>C</i>	<i>-C</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>
<i>-I</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>	<i>-C</i>	<i>C</i>	<i>-K</i>	<i>K</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>-K</i>	<i>K</i>	<i>-C</i>	<i>C</i>
<i>-B</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>	<i>C</i>	<i>-C</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>-C</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>
<i>-C</i>	<i>-C</i>	<i>C</i>	<i>-K</i>	<i>K</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>
<i>K</i>	<i>K</i>	<i>-K</i>	<i>C</i>	<i>-C</i>	<i>-B</i>	<i>B</i>	<i>-I</i>	<i>I</i>
<i>-K</i>	<i>-K</i>	<i>K</i>	<i>-C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>-B</i>	<i>I</i>	<i>-I</i>

ดังนั้น $(F_{14},*)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 15 : $F_{15} = \{I, -I, C, -C, A, -A, J, -J\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_{15} ดังนี้

*	I	-I	C	-C	A	-A	J	-J
I	I	-I	C	-C	A	-A	J	-J
-I	-I	I	-C	C	-A	A	-J	J
C	C	-C	I	-I	-J	J	-A	A
-C	-C	C	-I	I	J	-J	A	-A
A	A	-A	J	-J	I	-I	C	-C
-A	-A	A	-J	J	-I	I	-C	C
J	J	-J	A	-A	-C	C	-I	I
-J	-J	J	-A	A	C	-C	I	-I

ดังนั้น $(F_{15}, *)$ มีสมบัติปิด

กรณีที่ 16 : $F_{16} = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K\}$

จะได้ตารางผลคูณของแต่ละสมาชิกใน F_{16} ดังนี้

*	I	-I	H	-H	J	-J	K	-K
I	I	-I	H	-H	J	-J	K	-K
-I	-I	I	-H	H	-J	J	-K	K
H	H	-H	I	-I	-K	K	J	-J
-H	-H	H	I	-I	K	-K	-J	J
J	J	-J	-K	K	-I	I	H	-H
-J	-J	J	K	-K	I	-I	-H	H
K	K	-K	-J	J	H	-H	-I	I
-K	-K	K	J	-J	-H	H	I	-I

ดังนั้น $(F_{16}, *)$ มีสมบัติปิด

จะได้ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติปิด สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

- (2) จะพิสูจน์ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

จาก $(G, *)$ เป็นกรุป และ F_i เป็นเซตย่อยของ G

จะได้ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

- (3) จะพิสูจน์ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติการมีเอกลักษณ์ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

จากสมาชิกทุกตัวใน F_i เป็นเมทริกซ์ 4×4 และ $I \in F_i$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ 4×4

จะได้ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติการมีเอกลักษณ์ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

- (4) จะพิสูจน์ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติการมีตัวผกผัน สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

จากตารางผลคูณในข้อ (1) สังเกตว่า $x^2 = I$ หรือ $-x^2 = I$ สำหรับทุก $x \in F_i$

นั่นคือ x หรือ $-x$ เป็นตัวผกผันของ x สำหรับทุก $x \in F_i$

ดังนั้นสมาชิกทุกตัวใน F_i มีตัวผกผัน

จะได้ว่า $(F_i, *)$ มีสมบัติการมีตัวผกผัน สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

สรุปได้ว่า F_i เป็นกรุปย่อยของ G สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

■

นอกจากนี้เราได้ว่าทุกกรุปย่อย F_i ของกรุป G ในทฤษฎีบท 3.5 เป็นกรุปย่อยปกติ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$ ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ F_i เป็นกรุปย่อยของกรุป G ในทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า F_i เป็นกรุปย่อยปกติของ G สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

พิสูจน์ ให้ F_i เป็นกรุปย่อยของกรุป G ในทฤษฎีบท 3.5 สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

จะพิสูจน์ว่า F_i เป็นกรุปย่อยปกติของ G สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

(1) จะแสดงว่า $F_1 = \{I\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } IF_1 &= \{I\} = F_1I \\ (-I)F_1 &= \{-I\} = F_1(-I) \\ HF_1 &= \{H\} = F_1H \\ (-H)F_1 &= \{-H\} = F_1(-H) \\ JF_1 &= \{J\} = F_1J \\ (-J)F_1 &= \{-J\} = F_1(-J) \\ KF_1 &= \{K\} = F_1K \\ (-K)F_1 &= \{-K\} = F_1(-K) \\ AF_1 &= \{A\} = F_1A \\ (-A)F_1 &= \{-A\} = F_1(-A) \\ BF_1 &= \{B\} = F_1B \\ (-B)F_1 &= \{-B\} = F_1(-B) \\ CF_1 &= \{C\} = F_1C \\ (-C)F_1 &= \{-C\} = F_1(-C) \\ HCF_1 &= \{HC\} = F_1HC \\ (-HC)F_1 &= \{-HC\} = F_1(-HC) \end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_1 = F_1x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_1 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(2) จะแสดงว่า $F_2 = \{I, -I\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } IF_2 &= \{I, -I\} = F_2I \\ (-I)F_2 &= \{-I, I\} = F_2(-I) \\ HF_2 &= \{H, -H\} = F_2H \\ (-H)F_2 &= \{-H, H\} = F_2(-H) \\ JF_2 &= \{J, -J\} = F_2J \\ (-J)F_2 &= \{-J, J\} = F_2(-J) \\ KF_2 &= \{K, -K\} = F_2K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-K)F_2 &= \{-K, K\} = F_2(-K) \\
AF_2 &= \{A, -A\} = F_2A \\
(-A)F_2 &= \{-A, A\} = F_2(-A) \\
BF_2 &= \{B, -B\} = F_2B \\
(-B)F_2 &= \{-B, B\} = F_2(-B) \\
CF_2 &= \{C, -C\} = F_2C \\
(-C)F_2 &= \{-C, C\} = F_2(-C) \\
HCF_2 &= \{HC, -HC\} = F_2HC \\
(-HC)F_2 &= \{-HC, HC\} = F_2(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_2 = F_2x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_2 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(3) จะแสดงว่า $F_3 = \{I, A\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา

$$\begin{aligned}
IF_3 &= \{I, A\} = F_3I \\
(-I)F_3 &= \{-I, -A\} = F_3(-I) \\
HF_3 &= \{H, -B\} = F_3H \\
(-H)F_3 &= \{-H, B\} = F_3(-H) \\
JF_3 &= \{J, C\} = F_3J \\
(-J)F_3 &= \{-J, -C\} = F_3(-J) \\
KF_3 &= \{K, HC\} = F_3K \\
(-K)F_3 &= \{-K, -HC\} = F_3(-K) \\
AF_3 &= \{A, I\} = F_3A \\
(-A)F_3 &= \{-A, -I\} = F_3(-A) \\
BF_3 &= \{B, -H\} = F_3B \\
(-B)F_3 &= \{-B, H\} = F_3(-B) \\
CF_3 &= \{C, J\} = F_3C \\
(-C)F_3 &= \{-C, -J\} = F_3(-C) \\
HCF_3 &= \{HC, K\} = F_3HC \\
(-HC)F_3 &= \{-HC, -K\} = F_3(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_3 = F_3x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_3 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(4) จะแสดงว่า $F_4 = \{I, B\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา

$$\begin{aligned}
IF_4 &= \{I, B\} = F_4I \\
(-I)F_4 &= \{-I, -B\} = F_4(-I) \\
HF_4 &= \{H, A\} = F_4H
\end{aligned}$$

$$(-H)F_4 = \{-H, -A\} = F_4(-H)$$

$$JF_4 = \{J, HC\} = F_4J$$

$$(-J)F_4 = \{-J, -HC\} = F_4(-J)$$

$$KF_4 = \{K, -C\} = F_4K$$

$$(-K)F_4 = \{-K, C\} = F_4(-K)$$

$$AF_4 = \{A, H\} = F_4A$$

$$(-A)F_4 = \{-A, -H\} = F_4(-A)$$

$$BF_4 = \{B, I\} = F_4B$$

$$(-B)F_4 = \{-B, -I\} = F_4(-B)$$

$$CF_4 = \{C, -K\} = F_4C$$

$$(-C)F_4 = \{-C, K\} = F_4(-C)$$

$$HCF_4 = \{HC, J\} = F_4HC$$

$$(-HC)F_4 = \{-HC, -J\} = F_4(-HC)$$

ดังนั้น $xF_4 = F_4x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_4 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(5) จะแสดงว่า $F_5 = \{I, C\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_5 = \{I, C\} = F_5I$

$$(-I)F_5 = \{-I, -C\} = F_5(-I)$$

$$HF_5 = \{H, HC\} = F_5H$$

$$(-H)F_5 = \{-H, -HC\} = F_5(-H)$$

$$JF_5 = \{J, -A\} = F_5J$$

$$(-J)F_5 = \{-J, A\} = F_5(-J)$$

$$KF_5 = \{K, B\} = F_5K$$

$$(-K)F_5 = \{-K, -B\} = F_5(-K)$$

$$AF_5 = \{A, -J\} = F_5A$$

$$(-A)F_5 = \{-A, J\} = F_5(-A)$$

$$BF_5 = \{B, K\} = F_5B$$

$$(-B)F_5 = \{-B, -K\} = F_5(-B)$$

$$CF_5 = \{C, I\} = F_5C$$

$$(-C)F_5 = \{-C, -I\} = F_5(-C)$$

$$HCF_5 = \{HC, H\} = F_5HC$$

$$(-HC)F_5 = \{-HC, -H\} = F_5(-HC)$$

ดังนั้น $xF_5 = F_5x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_5 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(6) จะแสดงว่า $F_6 = \{I, -A\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 IF_6 &= \{I, -A\} = F_6I \\
 (-I)F_6 &= \{-I, A\} = F_6(-I) \\
 HF_6 &= \{H, B\} = F_6H \\
 (-H)F_6 &= \{-H, -B\} = F_6(-H) \\
 JF_6 &= \{J, -C\} = F_6J \\
 (-J)F_6 &= \{-J, C\} = F_6(-J) \\
 KF_6 &= \{K, -HC\} = F_6K \\
 (-K)F_6 &= \{-K, HC\} = F_6(-K) \\
 AF_6 &= \{A, -I\} = F_6A \\
 (-A)F_6 &= \{-A, I\} = F_6(-A) \\
 BF_6 &= \{B, H\} = F_6B \\
 (-B)F_6 &= \{-B, -H\} = F_6(-B) \\
 CF_6 &= \{C, -J\} = F_6C \\
 (-C)F_6 &= \{-C, J\} = F_6(-C) \\
 HCF_6 &= \{HC, -K\} = F_6HC \\
 (-HC)F_6 &= \{-HC, K\} = F_6(-HC)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_6 = F_6x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_6 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(7) จะแสดงว่า $F_7 = \{I, -B\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 IF_7 &= \{I, -B\} = F_7I \\
 (-I)F_7 &= \{-I, B\} = F_7(-I) \\
 HF_7 &= \{H, -A\} = F_7H \\
 (-H)F_7 &= \{-H, A\} = F_7(-H) \\
 JF_7 &= \{J, -HC\} = F_7J \\
 (-J)F_7 &= \{-J, HC\} = F_7(-J) \\
 KF_7 &= \{K, C\} = F_7K \\
 (-K)F_7 &= \{-K, -C\} = F_7(-K) \\
 AF_7 &= \{A, -H\} = F_7A \\
 (-A)F_7 &= \{-A, H\} = F_7(-A) \\
 BF_7 &= \{B, -I\} = F_7B \\
 (-B)F_7 &= \{-B, I\} = F_7(-B) \\
 CF_7 &= \{C, K\} = F_7C \\
 (-C)F_7 &= \{-C, -K\} = F_7(-C) \\
 HCF_7 &= \{HC, -J\} = F_7HC
 \end{aligned}$$

$$(-HC)F_7 = \{-HC, J\} = F_7(-HC)$$

ดังนั้น $xF_7 = F_7x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_7 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(8) จะแสดงว่า $F_8 = \{I, -C\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_8 = \{I, -C\} = F_8I$

$$(-I)F_8 = \{-I, C\} = F_8(-I)$$

$$HF_8 = \{H, -HC\} = F_8H$$

$$(-H)F_8 = \{-H, HC\} = F_8(-H)$$

$$JF_8 = \{J, A\} = F_8J$$

$$(-J)F_8 = \{-J, -A\} = F_8(-J)$$

$$KF_8 = \{K, -B\} = F_8K$$

$$(-K)F_8 = \{-K, B\} = F_8(-K)$$

$$AF_8 = \{A, J\} = F_8A$$

$$(-A)F_8 = \{-A, -J\} = F_8(-A)$$

$$BF_8 = \{B, -K\} = F_8B$$

$$(-B)F_8 = \{-B, K\} = F_8(-B)$$

$$CF_8 = \{C, -I\} = F_8C$$

$$(-C)F_8 = \{-C, I\} = F_8(-C)$$

$$HCF_8 = \{HC, -H\} = F_8HC$$

$$(-HC)F_8 = \{-HC, H\} = F_8(-HC)$$

ดังนั้น $xF_8 = F_8x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_8 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(9) จะแสดงว่า $F_9 = \{I, -I, H, -H\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_9 = \{I, -I, H, -H\} = F_9I$

$$(-I)F_9 = \{-I, I, -H, H\} = F_9(-I)$$

$$HF_9 = \{H, -H, -I, I\} = F_9H$$

$$(-H)F_9 = \{-H, H, I, -I\} = F_9(-H)$$

$$JF_9 = \{J, -J, K, -K\} = F_9J$$

$$(-J)F_9 = \{-J, J, -K, K\} = F_9(-J)$$

$$KF_9 = \{K, -K, -J, J\} = F_9K$$

$$(-K)F_9 = \{-K, K, J, -J\} = F_9(-K)$$

$$AF_9 = \{A, -A, -B, B\} = F_9A$$

$$(-A)F_9 = \{-A, A, B, -B\} = F_9(-A)$$

$$BF_9 = \{B, -B, A, -A\} = F_9B$$

$$(-B)F_9 = \{-B, B, -A, A\} = F_9(-B)$$

$$\begin{aligned}
CF_9 &= \{C, -C, HC, -HC\} = F_9C \\
(-C)F_9 &= \{-C, C, -HC, HC\} = F_9(-C) \\
HCF_9 &= \{HC, -HC, -C, C\} = F_9HC \\
(-HC)F_9 &= \{-HC, HC, C, -C\} = F_9(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_9 = F_9x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_9 เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(10) จะแสดงว่า $F_{10} = \{I, -I, J, -J\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_{10} = \{I, -I, J, -J\} = F_{10}I$

$$\begin{aligned}
(-I)F_{10} &= \{-I, I, -J, J\} = F_{10}(-I) \\
HF_{10} &= \{H, -H, -K, K\} = F_{10}H \\
(-H)F_{10} &= \{-H, H, K, -K\} = F_{10}(-H) \\
JF_{10} &= \{J, -J, -I, I\} = F_{10}J \\
(-J)F_{10} &= \{-J, J, I, -I\} = F_{10}(-J) \\
KF_{10} &= \{K, -K, H, -H\} = F_{10}K \\
(-K)F_{10} &= \{-K, K, -H, H\} = F_{10}(-K) \\
AF_{10} &= \{A, -A, C, -C\} = F_{10}A \\
(-A)F_{10} &= \{-A, A, -C, C\} = F_{10}(-A) \\
BF_{10} &= \{B, -B, HC, -HC\} = F_{10}B \\
(-B)F_{10} &= \{-B, B, -HC, HC\} = F_{10}(-B) \\
CF_{10} &= \{C, -C, -A, A\} = F_{10}C \\
(-C)F_{10} &= \{-C, C, A, -A\} = F_{10}(-C) \\
HCF_{10} &= \{HC, -HC, -B, B\} = F_{10}HC \\
(-HC)F_{10} &= \{-HC, HC, B, -B\} = F_{10}(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_{10} = F_{10}x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_{10} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(11) จะแสดงว่า $F_{11} = \{I, -I, K, -K\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_{11} = \{I, -I, K, -K\} = F_{11}I$

$$\begin{aligned}
(-I)F_{11} &= \{-I, I, -K, K\} = F_{11}(-I) \\
HF_{11} &= \{H, -H, J, -J\} = F_{11}H \\
(-H)F_{11} &= \{-H, H, -J, J\} = F_{11}(-H) \\
JF_{11} &= \{J, -J, H, -H\} = F_{11}J \\
(-J)F_{11} &= \{-J, J, -H, H\} = F_{11}(-J) \\
KF_{11} &= \{K, -K, -I, I\} = F_{11}K \\
(-K)F_{11} &= \{-K, K, I, -I\} = F_{11}(-K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AF_{11} &= \{A, -A, HC, -HC\} = F_{11}A \\
(-A)F_{11} &= \{-A, A, -HC, HC\} = F_{11}(-A) \\
BF_{11} &= \{B, -B, -C, C\} = F_{11}B \\
(-B)F_{11} &= \{-B, B, C, -C\} = F_{11}(-B) \\
CF_{11} &= \{C, -C, B, -B\} = F_{11}C \\
(-C)F_{11} &= \{-C, C, -B, B\} = F_{11}(-C) \\
HCF_{11} &= \{HC, -HC, -A, A\} = F_{11}HC \\
(-HC)F_{11} &= \{-HC, HC, A, -A\} = F_{11}(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_{11} = F_{11}x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_{11} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(12) จะแสดงว่า $F_{12} = \{I, -I, HC, -HC\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_{12} = \{I, -I, HC, -HC\} = F_{12}I$

$$\begin{aligned}
(-I)F_{12} &= \{-I, I, -HC, HC\} = F_{12}(-I) \\
HF_{12} &= \{H, -H, -C, C\} = F_{12}H \\
(-H)F_{12} &= \{-H, H, C, -C\} = F_{12}(-H) \\
JF_{12} &= \{J, -J, -B, B\} = F_{12}J \\
(-J)F_{12} &= \{-J, J, B, B\} = F_{12}(-J) \\
KF_{12} &= \{K, -K, -A, A\} = F_{12}K \\
(-K)F_{12} &= \{-K, K, A, -A\} = F_{12}(-K) \\
AF_{12} &= \{A, -A, K, -K\} = F_{12}A \\
(-A)F_{12} &= \{-A, A, -K, K\} = F_{12}(-A) \\
BF_{12} &= \{B, -B, J, -J\} = F_{12}B \\
(-B)F_{12} &= \{-B, B, -J, J\} = F_{12}(-B) \\
CF_{12} &= \{C, -C, H, -H\} = F_{12}C \\
(-C)F_{12} &= \{-C, C, -H, H\} = F_{12}(-C) \\
HCF_{12} &= \{HC, -HC, -I, I\} = F_{12}HC \\
(-HC)F_{12} &= \{-HC, HC, I, -I\} = F_{12}(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_{12} = F_{12}x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_{12} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(13) จะแสดงว่า $F_{13} = \{I, -I, A, -A, B, -B, H, -H\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_{13} = \{I, -I, A, -A, B, -B, H, -H\} = F_{13}I$

$$\begin{aligned}
(-I)F_{13} &= \{-I, I, -A, A, -B, B, -H, H\} = F_{13}(-I) \\
HF_{13} &= \{H, -H, -B, B, A, -A, -I, I\} = F_{13}H \\
(-H)F_{13} &= \{-H, H, B, -B, -A, A, I, -I\} = F_{13}(-H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
JF_{13} &= \{J, -J, C, -C, HC, -HC, -K, K\} = F_{13}J \\
(-J)F_{13} &= \{-J, J, -C, C, -HC, HC, K, -K\} = F_{13}(-J) \\
KF_{13} &= \{K, -K, HC, -HC, -C, -C, J, -J\} = F_{13}K \\
(-K)F_{13} &= \{-K, K, -HC, HC, C, -C, -J, J\} = F_{13}(-K) \\
AF_{13} &= \{A, -A, I, -I, H, -H, B, -B\} = F_{13}A \\
(-A)F_{13} &= \{-A, A, -I, I, -H, H, -B, B\} = F_{13}(-A) \\
BF_{13} &= \{B, -B, -H, H, I, -I, A, -A\} = F_{13}B \\
(-B)F_{13} &= \{-B, B, H, -H, -I, I, -A, A\} = F_{13}(-B) \\
CF_{13} &= \{C, -C, J, -J, -K, K, HC, -HC\} = F_{13}C \\
(-C)F_{13} &= \{-C, C, -J, J, K, -K, -HC, HC\} = F_{13}(-C) \\
HCF_{13} &= \{HC, -HC, K, -K, J, -J, -C, C\} = F_{13}HC \\
(-HC)F_{13} &= \{-HC, HC, -K, K, -J, J, C, -C\} = F_{13}(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_{13} = F_{13}x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_{13} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(14) จะแสดงว่า $F_{14} = \{I, -I, B, -B, C, -C, K, -K\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_{14} = \{I, -I, B, -B, C, -C, K, -K\} = F_{14}I$

$$\begin{aligned}
(-I)F_{14} &= \{-I, I, -B, B, -C, C, -K, K\} = F_{14}(-I) \\
HF_{14} &= \{H, -H, A, -A, HC, -HC, -J, J\} = F_{14}H \\
(-H)F_{14} &= \{-H, H, -A, A, -HC, HC, J, -J\} = F_{14}(-H) \\
JF_{14} &= \{J, -J, HC, -HC, -A, A, H, -H\} = F_{14}J \\
(-J)F_{14} &= \{-J, J, -HC, HC, A, -A, -H, H\} = F_{14}(-J) \\
KF_{14} &= \{K, -K, -C, C, B, -B, -I, I\} = F_{14}K \\
(-K)F_{14} &= \{-K, K, C, -C, -B, B, I, -I\} = F_{14}(-K) \\
AF_{14} &= \{A, -A, H, -H, -J, J, HC, -HC\} = F_{14}A \\
(-A)F_{14} &= \{-A, A, -H, H, J, -J, -HC, HC\} = F_{14}(-A) \\
BF_{14} &= \{B, -B, I, -I, K, -K, C, -C\} = F_{14}B \\
(-B)F_{14} &= \{-B, B, -I, I, -K, K, -C, C\} = F_{14}(-B) \\
CF_{14} &= \{C, -C, -K, K, I, -I, -B, B\} = F_{14}C \\
(-C)F_{14} &= \{-C, C, K, -K, -I, I, B, -B\} = F_{14}(-C) \\
HCF_{14} &= \{HC, -HC, J, -J, H, -H, -A, A\} = F_{14}HC \\
(-HC)F_{14} &= \{-HC, HC, -J, J, -H, H, A, -A\} = F_{14}(-HC)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $xF_{14} = F_{14}x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_{14} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(15) จะแสดงว่า $F_{15} = \{I, -I, C, -C, A, -A, J, -J\}$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_{15} = \{I, -I, C, -C, A, -A, J, -J\} = F_{15}I$
 $(-I)F_{15} = \{-I, I, -C, C, -A, A, -J, J\} = F_{15}(-I)$
 $HF_{15} = \{H, -H, HC, -HC, -B, B, -K, K\} = F_{15}H$
 $(-H)F_{15} = \{-H, H, -HC, HC, B, -B, K, -K\} = F_{15}(-H)$
 $JF_{15} = \{J, -J, -A, A, C, -C, -I, I\} = F_{15}J$
 $(-J)F_{15} = \{-J, J, A, -A, -C, C, I, -I\} = F_{15}(-J)$
 $KF_{15} = \{K, -K, B, -B, HC, -HC, H, -H\} = F_{15}K$
 $(-K)F_{15} = \{-K, K, -B, B, -HC, HC, -H, H\} = F_{15}(-K)$
 $AF_{15} = \{A, -A, -J, J, I, -I, -C, C\} = F_{15}A$
 $(-A)F_{15} = \{-A, A, J, -J, -I, I, C, -C\} = F_{15}(-A)$
 $BF_{15} = \{B, -B, K, -K, -H, H, HC, -HC\} = F_{15}B$
 $(-B)F_{15} = \{-B, B, -K, K, H, -H, -HC, HC\} = F_{15}(-B)$
 $CF_{15} = \{C, -C, I, -I, J, -J, A, -A\} = F_{15}C$
 $(-C)F_{15} = \{-C, C, -I, I, -J, J, -A, A\} = F_{15}(-C)$
 $HCF_{15} = \{HC, -HC, J, -J, K, -K, -B, B\} = F_{15}HC$
 $(-HC)F_{15} = \{-HC, HC, -J, J, -K, K, B, -B\} = F_{15}(-HC)$

ดังนั้น $xF_{15} = F_{15}x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_{15} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

(16) จะแสดงว่า F_{16} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

พิจารณา $IF_{16} = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K\} = F_{16}I$
 $(-I)F_{16} = \{-I, I, -H, H, -J, J, -K, K\} = F_{16}(-I)$
 $HF_{16} = \{H, -H, -I, I, -K, K, J, -J\} = F_{16}H$
 $(-H)F_{16} = \{-H, H, I, -I, K, -K, -J, J\} = F_{16}(-H)$
 $JF_{16} = \{J, -J, K, -K, -I, I, H, -H\} = F_{16}J$
 $(-J)F_{16} = \{-J, J, -K, K, I, -I, -H, H\} = F_{16}(-J)$
 $KF_{16} = \{K, -K, -J, J, H, -H, -I, I\} = F_{16}K$
 $(-K)F_{16} = \{-K, K, J, -J, -H, H, I, -I\} = F_{16}(-K)$
 $AF_{16} = \{A, -A, -B, B, C, -C, HC, -HC\} = F_{16}A$
 $(-A)F_{16} = \{-A, A, B, -B, -C, C, -HC, HC\} = F_{16}(-A)$
 $BF_{16} = \{B, -B, A, -A, HC, -HC, -C, C\} = F_{16}B$
 $(-B)F_{16} = \{-B, B, -A, A, -HC, HC, C, -C\} = F_{16}(-B)$
 $CF_{16} = \{C, -C, HC, -HC, -A, A, B, -B\} = F_{16}C$
 $(-C)F_{16} = \{-C, C, -HC, HC, A, -A, -B, B\} = F_{16}(-C)$
 $HCF_{16} = \{HC, -HC, -C, C, -B, B, -A, A\} = F_{16}HC$
 $(-HC)F_{16} = \{-HC, HC, C, -C, B, -B, A, -A\} = F_{16}(-HC)$

ดังนั้น $xF_{16} = F_{16}x$ สำหรับทุก $x \in G$

จากทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า F_{16} เป็นกรุปย่อยปกติของ G

ดังนั้น F_i เป็นกรุปย่อยปกติของ G สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

■

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

เป็นเมทริกซ์พอลิโนมัลในรูปเมทริกซ์ 4×4 และ

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เป็นตัวแทนเมทริกซ์ 4×4 ของหน่วยจินตภาพ h, j, k ของควอเทอร์เนียนตามลำดับ

และ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ 4×4

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $G = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K, A, -A, B, -B, C, -C, HC, -HC\}$ และ $*$ แทนการคูณกันของเมทริกซ์ จะได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $F_1 = \{I\}$, $F_2 = \{I, -I\}$, $F_3 = \{I, A\}$, $F_4 = \{I, B\}$, $F_5 = \{I, C\}$, $F_6 = \{I, -A\}$, $F_7 = \{I, -B\}$, $F_8 = \{I, -C\}$, $F_9 = \{I, -I, H, -H\}$, $F_{10} = \{I, -I, J, -J\}$, $F_{11} = \{I, -I, K, -K\}$, $F_{12} = \{I, -I, HC, -HC\}$, $F_{13} = \{I, -I, A, -A, B, -B, H, -H\}$, $F_{14} = \{I, -I, B, -B, C, -C, K, -K\}$, $F_{15} = \{I, -I, C, -C, A, -A, J, -J\}$, $F_{16} = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K\}$ จะได้ว่า F_i เป็นกรุปย่อยของกรุป G ในทฤษฎีบท 3.4 สำหรับทุก

$$i = 1, 2, \dots, 16$$

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ F_i เป็นกรุปย่อยของกรุป G ในทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า F_i เป็นกรุปย่อยปกติของ G สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 16$

บรรณานุกรม

- [1] *J.R. Harris, Forming groups with 4x4 matrices, The Mathematical Gazette, November 2010, 94:531 (2010), 426-429.*
- [2] *E. T. Copson, Theory of functions of a complex variable, Oxford University Press (1935) pp.1-5.*
- [3] *J. Groß, G. Trenkler, S.-O. Troschke, Quaternions: further contributions to a matrix oriented approach, Linear Algebra Appl, 326 (2001), 205–213.*
- [4] *D.S. Dummit, R.M. Foote, Abstract algebra (3rd Edition), Wiley College (1967).*

ภาคผนวก

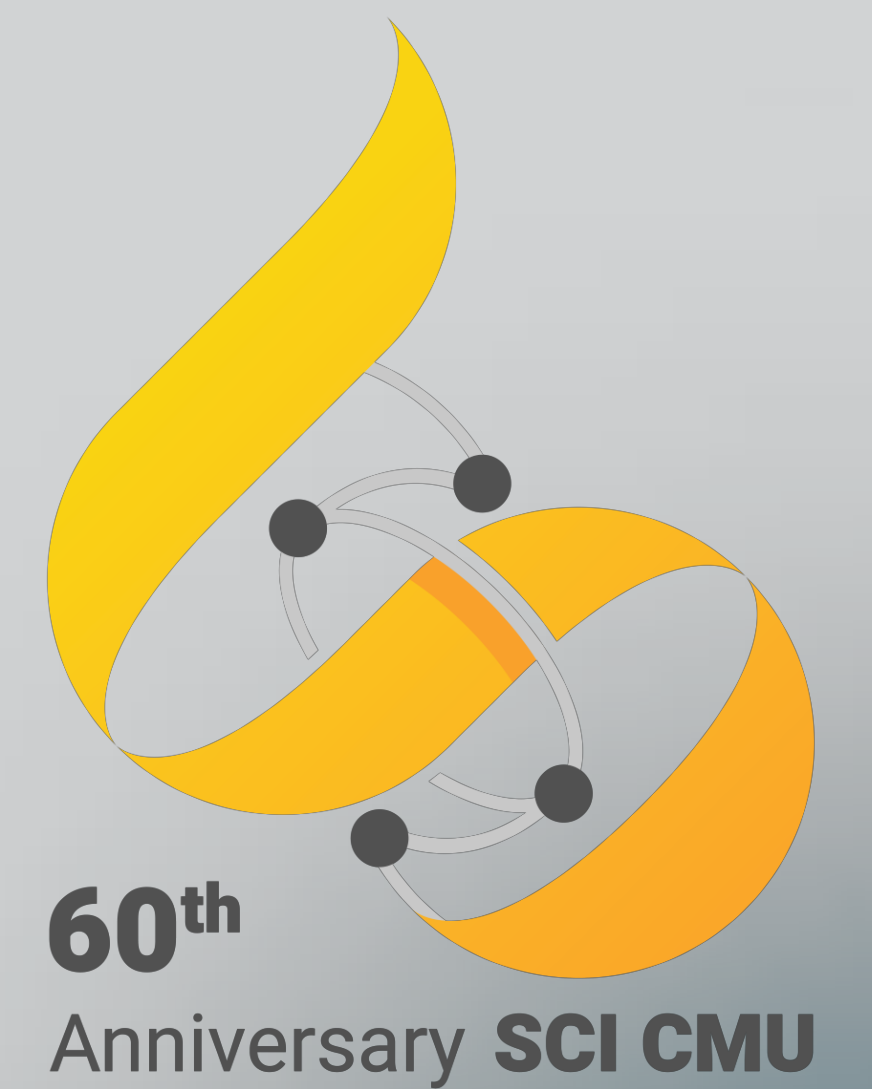


Matrix representation of quaternions

Ms. Patchayakorn Sakboon

Assoc. Prof. Dr. Anchalee Khemphet

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



1. Abstract

In this independent study, we study the relationship of 4×4 matrix representations of imaginary units of quaternions and the 4×4 Pauli matrices and form a group generated by these matrices. We show that all subgroups of this group are normal subgroups.

2. Preliminaries

Definition 2.1 [1] : The 4×4 Pauli matrices are defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definition 2.2 : A quaternion is a number written in the form

$$p + qh + rj + sk,$$

where h, j, k are imaginary units, $h^2 = j^2 = k^2 = -1$ and $p, q, r, s \in \mathbb{R}$.

Theorem 2.3 [2] : The quaternion $p + qh + rj + sk$, where $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, can be represented by the 4×4 matrix below.

$$\begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & r \\ r & -s & p & -q \\ s & -r & q & p \end{pmatrix}$$

Definition 2.4 : Let G be a non-empty set, and let $*$ be a binary operation on set G . Then $(G, *)$ is said to be a group if $(G, *)$ satisfies the following properties.

- 1) Closure property : For all $x, y \in G$, $x * y \in G$.
- 2) Associative property : For all $x, y, z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
- 3) Identity property : There must be an element $e \in G$ such that $x * e = x = e * x$ for all $x \in G$.
- 4) Inverse property : For each $x \in G$, there is $y \in G$ such that $x * y = e = y * x$.

Definition 2.5 : Let $(G, *)$ be a group, and let F be a non-empty subset of G . Then F is said to be a subgroup of G if $(F, *)$ is a group.

Definition 2.6 [3] : Let F be a subgroup of a group G . Then F is said to be a normal subgroup of G if for all $x \in G$, $xFx^{-1} = F$, where $xFx^{-1} = \{xfx^{-1} : f \in F\}$.

3. Results

Proposition 3.1 : Let A, B, C be the 4×4 Pauli matrices, and let H, J, K be the 4×4 matrix representations of imaginary units of quaternions. Then

- (1) $A^2 = B^2 = C^2 = I$
- (2) $BC = -CB = K$
- (3) $CA = -AC = J$
- (4) $AB = -BA = H$

Proposition 3.2 : Let H, J, K be the 4×4 matrix representations of imaginary units of quaternions. Then

- (1) $H^2 = J^2 = K^2 = -I$
- (2) $HJ = -JH = K$
- (3) $JK = -KJ = H$
- (4) $KH = -HK = J$

Proposition 3.3 : Let A, B, C be the 4×4 Pauli matrices, and let H, J, K be the 4×4 matrix representations of imaginary units of quaternions. Then

- (1) $HA = -AH = -KC = CK = -B$
- (2) $HB = -BH = -JC = CJ = A$
- (3) $HC = CH = JB = BJ = KA = AK$
- (4) $JA = -AJ = -KB = BK = C$

Theorem 3.4 : Let $G = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K, A, -A, B, -B, C, -C, HC, -HC\}$. If $*$ represents the matrix multiplication, then $(G, *)$ is a group.

Theorem 3.5 : Let $F_1 = \{I\}$, $F_2 = \{I, -I\}$, $F_3 = \{I, A\}$, $F_4 = \{I, B\}$, $F_5 = \{I, C\}$, $F_6 = \{I, -A\}$, $F_7 = \{I, -B\}$, $F_8 = \{I, -C\}$, $F_9 = \{I, -I, H, -H\}$, $F_{10} = \{I, -I, J, -J\}$, $F_{11} = \{I, -I, K, -K\}$, $F_{12} = \{I, -I, HC, -HC\}$, $F_{13} = \{I, -I, A, -A\}$, $F_{14} = \{I, -I, B, -B\}$, $F_{15} = \{I, -I, C, -C\}$, $F_{16} = \{I, -I, H, -H, J, -J, K, -K\}$. Then F_i is a subgroup of G in Theorem 3.4 for all $i = 1, 2, \dots, 16$.

Theorem 3.6 : Each F_i in Theorem 3.5 is a normal subgroup of G in Theorem 3.4 for all $i = 1, 2, \dots, 16$.

4. References

- [1] J.R. Harris, Forming groups with 4×4 matrices, *The Mathematical Gazette*, November 2010, 94:531 (2010), 426-429.
- [2] J. Groß, G. Trenkler, S.-O. Troschke, Quaternions: further contributions to a matrix oriented approach, *Linear Algebra Appl*, 326 (2001), 205-213.
- [3] D.S. Dummit, R.M. Foote, *Abstract algebra (3rd Edition)*, Wiley College (1967).