

รากดิจิทัลของบางจำนวนเต็ม
(Digital Roots of Some Integers)

นายธวัช สุธงษา
รหัส 630510479

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ปีการศึกษา 2566

รากดิจิทัลของบางจำนวนเต็ม
(Digital Roots of Some Integers)

นายธนวันต์ สุขุมสาทร

630510479

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

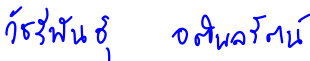
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

รากดิจิทัลของบางจำนวนเต็ม
(Digital Roots of Some Integers)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

	ประธานกรรมการ
(รศ. ดร.ชนตล ชาวบ้านเกาะ)	
	กรรมการ
(รศ. ดร.วัชรินทร์ อติพลรัตน์)	
วันที่ 7 มีนาคม พ.ศ. 2567	

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง รากดิจิทัลของบางจำนวนเต็ม

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบและอาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้ และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องของการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณา และตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจและกำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอ ตลอดจนการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นายธนวันต์ สุขุมสาทร

หัวข้อ (ภาษาไทย) รากดิจิทัลของบางจำนวนเต็ม
 (ภาษาอังกฤษ) Digital Roots of Some Integers
 ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นายธนวันต์ สุขุมสาทร รหัสนักศึกษา 630510479
 ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รศ. ดร.ธนดล ชวบ้านเกาะ
 ชื่อกรรมการสอบ รศ. ดร.วัชรินทร์ อติพลรัตน์

บทคัดย่อ

ในการศึกษาอิสระนี้ เราศึกษาสมบัติของรากดิจิทัลของบางจำนวนเต็ม โดยได้รับแรงบันดาลใจจาก Koshy [2] ซึ่งมีการกำหนดลักษณะของรากดิจิทัลของจำนวนเฉพาะแมร์เซนและจำนวนสมบูรณ์ โดยจำนวนเต็มที่เราพิจารณานั้นคือผลคูณของจำนวนเฉพาะสองจำนวน จำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด และจำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง

Abstract

In this independent study, we study the properties of digital roots of specific integers, inspired by Koshy [2] where digital roots of Mersenne primes and perfect numbers were characterized. The integers under consideration are products of two primes, super perfect numbers, and centered hexagonal.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main results)	8
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	12
บรรณานุกรม	13

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

จำนวนเฉพาะ คือ จำนวนเต็มบวก p ที่มีตัวหารคือ p และ 1 เท่านั้น ถ้าเราพิจารณาคู่อันดับของจำนวนเต็ม (p, q) เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าต่างกัน 2 เช่น $(3, 5)$ และ $(5, 7)$ คู่อันดับของจำนวนเฉพาะเหล่านี้เรียกว่า จำนวนเฉพาะคู่แฝด ในทำนองเดียวกัน เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าต่างกัน 4 เช่น คู่อันดับของจำนวนเฉพาะเรียกว่า จำนวนเฉพาะพี่น้อง

บทความนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับรากติจิทัลของจำนวนเต็มบวกที่กล่าวมาข้างต้น โดยได้ศึกษารากติจิทัลของจำนวนต่อไปนี้

- จำนวนเต็มบวก n ที่อยู่ในรูป $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะคู่แฝด
- จำนวนเต็มบวก n ที่อยู่ในรูป $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะพี่น้อง

ยิ่งไปกว่านั้นเรายังศึกษารากติจิทัลของจำนวนเต็มบวก n เมื่อ

- n เป็นจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด
- n เป็นจำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เรากำหนดให้ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ แทนเซตของจำนวนนับ

การหารลงตัว (Divisibility)

บทนิยาม 2.1 [6] ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ เราจะเรียกว่า a ว่าเป็น **ตัวหาร (divisor)** หรือ **ตัวประกอบ (factor)** ตัวหนึ่งของ b ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ที่ทำให้ $b = aq$

ในกรณีที่ a เป็นตัวหารของ b เราจะเรียกอีกแบบหนึ่งว่า a หาร b ลงตัว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \mid b$ และใช้สัญลักษณ์ $a \nmid b$ แทน a หาร b ไม่ลงตัว

ตัวอย่าง 2.2

$3 \mid 9$ เพราะมี 3 ที่ทำให้ $9 = 3 \cdot 3$

$-5 \mid 10$ เพราะมี -2 ที่ทำให้ $10 = -5 \cdot (-2)$

$3 \nmid 7$ เพราะไม่มี $q \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $7 = 3q$

คอนกรูเอนซ์ (Congruence)

บทนิยาม 2.3 [6] ให้ a, b และ m เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $m > 0$

จะกล่าวว่า a **คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล m** (a is congruent to b modulo m) เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ m หาร $a - b$ ลงตัว และถ้า m หาร $a - b$ ไม่ลงตัว เราจะกล่าวว่า a ไม่คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล m เขียนแทนด้วย $a \not\equiv b \pmod{m}$

ตัวอย่าง 2.4

1. $2 \equiv 5 \pmod{3}$ เพราะว่า $3 \mid (2 - 5)$

2. $-3 \equiv 7 \pmod{5}$ เพราะว่า $5 \mid (-3 - 7)$

3. $-15 \equiv -3 \pmod{6}$ เพราะว่า $6 \mid (-15 + 3)$

4. $5 \not\equiv 7 \pmod{3}$ เพราะว่า $3 \nmid (5 - 7)$

สมบัติของคอนกรูเอนซ์

ทฤษฎีบท 2.5 [6] ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
2. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
3. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$
4. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
5. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

จำนวนเฉพาะ (Prime number)

บทนิยาม 2.6 [6] ตัวหารแท้ (proper divisor) ของจำนวนเต็ม n คือจำนวนเต็มบวกที่หาร n ลงตัว และมีค่าไม่เท่ากับ n

ตัวอย่าง 2.7

1. ตัวหารแท้ของ 10 คือ 1, 2 และ 5
2. ตัวหารแท้ของ 12 คือ 1, 2, 3, 4 และ 6

บทนิยาม 2.8 [6] ให้ p เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $p > 1$ เราจะเรียก p ว่า **จำนวนเฉพาะ (prime number)** ก็ต่อเมื่อ p มีตัวหารคือ 1 และ p เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.9

- 7 มีตัวหารคือ 1 และ 7 ดังนั้น 7 เป็นจำนวนเฉพาะ
19 มีตัวหารคือ 1 และ 19 ดังนั้น 19 เป็นจำนวนเฉพาะ

ทฤษฎีบท 2.10 [3] ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3 แล้ว $p = 6k - 1$ หรือ $p = 6k + 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$ หรือสามารถกล่าวได้ว่า ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $p \equiv \pm 1 \pmod{6}$

ตัวอย่าง 2.11

1. ให้ $p = 5$ จะได้ว่า $5 = 6k - 1$ เมื่อ $k = 1$
2. ให้ $p = 13$ จะได้ว่า $13 = 6k + 1$ เมื่อ $k = 2$

จำนวนเฉพาะคู่แฝด (Twin prime)

บทนิยาม 2.12 [5] คู่อันดับของจำนวนเต็มบวก (p, q) จะเรียกว่าเป็น จำนวนเฉพาะคู่แฝด (twin prime) เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q = p + 2$

ตัวอย่าง 2.13 คู่อันดับ $(5, 7)$ และ $(17, 19)$ เป็นจำนวนเฉพาะคู่แฝด

จำนวนเฉพาะลูกพี่ลูกน้อง (Cousin prime)

บทนิยาม 2.14 [5] คู่อันดับของจำนวนเต็มบวก (p, q) เป็น จำนวนเฉพาะลูกพี่ลูกน้อง (cousin prime) เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q = p + 4$

ตัวอย่าง 2.15 คู่อันดับ $(7, 11)$ และ $(13, 17)$ เป็นจำนวนเฉพาะลูกพี่ลูกน้อง

จำนวนสมบูรณ์ (Perfect number)

บทนิยาม 2.16 [6] ฟังก์ชันซิกมา (Sigma function)

ฟังก์ชัน $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ นิยามโดย

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

เรียกว่า ฟังก์ชันซิกมา นั่นคือ $\sigma(n)$ คือ ผลรวมของตัวหารที่มีค่ามากกว่า 0 ทั้งหมดของ n

ตัวอย่าง 2.17

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$$

บทนิยาม 2.18 [6] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเรียก n ว่าเป็น จำนวนสมบูรณ์ (perfect number) ก็ต่อเมื่อ

$$\sigma(n) = 2n$$

ตัวอย่าง 2.19

$$\sigma(6) = 2 \cdot 6 \text{ ดังนั้น } 6 \text{ เป็นจำนวนสมบูรณ์}$$

$$\sigma(28) = 56 = 2 \cdot 28 \text{ ดังนั้น } 28 \text{ เป็นจำนวนสมบูรณ์}$$

บทนิยาม 2.20 [2] ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n > 1$ เราจะเรียกจำนวน M_n ที่อยู่ในรูป $M_n = 2^n - 1$ ว่า **จำนวนแมร์เซน (Mersenne number)** และถ้า M_n เป็นจำนวนเฉพาะ เราจะเรียก M_n ว่า **จำนวนเฉพาะแมร์เซน (Mersenne prime)**

ทฤษฎีบท 2.21 [2] จำนวนเต็มบวก n จะเป็นจำนวนสมบูรณ์คู่ ก็ต่อเมื่อ $n = 2^{p-1}M_p$ เมื่อ p และ $M_p = 2^p - 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง 2.22

1. ให้ $p = 2$ จะได้ว่า $M_2 = 2^2 - 1 = 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ
ดังนั้น $2^{2-1}(2^2 - 1) = 2(3) = 6$ เป็นจำนวนสมบูรณ์คู่
2. ให้ $p = 3$ จะได้ว่า $M_3 = 2^3 - 1 = 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ
ดังนั้น $2^{3-1}(2^3 - 1) = 4(7) = 28$ เป็นจำนวนสมบูรณ์คู่

สำหรับจำนวนสมบูรณ์คู่ ในปัจจุบันเรายังไม่ทราบว่า มีจำนวนสมบูรณ์คู่อยู่จริงหรือไม่

จำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด (Super perfect number)

บทนิยาม 2.23 [1] จำนวนเต็มบวก n จะเป็น **จำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด (super perfect number)** ก็ต่อเมื่อ

$$\sigma^2(n) = \sigma(\sigma(n)) = 2n$$

ตัวอย่าง 2.24

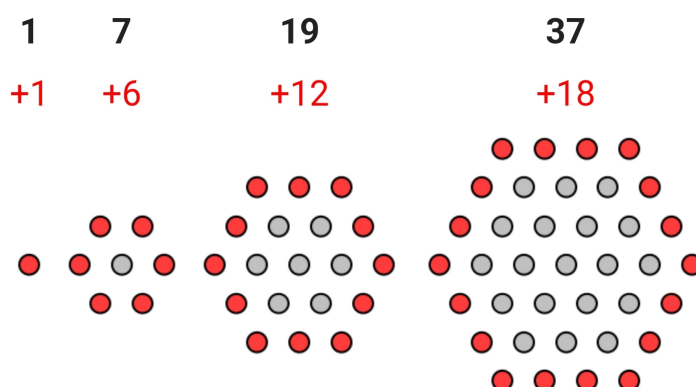
1. $\sigma^2(2) = \sigma(3) = 4 = 2 \cdot 2$ ดังนั้น 2 เป็น จำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด
2. $\sigma^2(16) = \sigma(31) = 32 = 2 \cdot 16$ ดังนั้น 16 เป็น จำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด

จำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวดอื่น ๆ เช่น 4, 64, 4096 และ 65536

ทฤษฎีบท 2.25 [1] ถ้าจำนวนเต็มบวก n เป็นจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด แล้ว $n = 2^{p-1}$ เมื่อ p และ $2^p - 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง 2.26

พิจารณา $16 = 2^{5-1}$ ซึ่ง 5 และ $2^5 - 1 = 31$ เป็นจำนวนเฉพาะ
ดังนั้น 16 เป็นจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด



รูปภาพ [4] 2.1: Centered hexagonal numbers

จำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง (Centered hexagonal number)

บทนิยาม 2.27 [4] ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n > 1$ เราจะเรียกจำนวน C_n ที่อยู่ในรูป

$$C_n = 1 + 3n(n - 1)$$

ว่า จำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง (centered hexagonal number)

ตัวอย่าง 2.28

1. $C_2 = 1 + 3(2)(2 - 1) = 7$
2. $C_6 = 1 + 3(6)(6 - 1) = 91$

จำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลางอื่น ๆ เช่น 1, 7, 19, 37 และ 61

รากดิจิตัล (Digital root)

บทนิยาม 2.29 รากดิจิตัล (digital root) ของจำนวนเต็มบวก n คือ จำนวนที่เกิดจากการนำเลขโดดของ n มารวมกันไปเรื่อย ๆ จนได้จำนวนหลักเดียว เขียนแทนด้วย $\rho(n)$
 เนื่องจาก $n > 0$ จะได้ว่า $\rho(n) \in \{1, 2, \dots, 9\}$ เสมอ

ตัวอย่าง 2.30

1. $\rho(18) = 9$
2. $\rho(165) = 3$

ข้อสังเกต 2.31 สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

จะได้ว่า $n = a_0a_1\dots a_k = a_010^k + a_110^{k-1} + \dots + a_{k-1}10^1 + a_k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$

เราทราบว่า $10 \equiv 1 \pmod{9}$

โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่า $10^M \equiv 1 \pmod{9}$ สำหรับทุก $M \in \mathbb{N}$

จะได้ว่า $a_i10^M \equiv a_i \pmod{9}$ สำหรับทุก $M \in \mathbb{N}$

ดังนั้น

$$n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k \pmod{9}$$

ตัวอย่าง 2.32

$$1. \quad 135 \equiv 1 + 3 + 5 \pmod{9} \equiv 9 \pmod{9}$$

$$2. \quad 2468 \equiv 2 + 4 + 6 + 8 \pmod{9} \equiv 20 \pmod{9} \equiv 2 \pmod{9}$$

ข้อสังเกต 2.33 สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $n \equiv m \pmod{9}$ เมื่อ $0 \leq m < 9$ จะได้ว่า

$$\rho(n) = \begin{cases} m & \text{ถ้า } 9 \nmid n \\ 9 & \text{ถ้า } 9 \mid n \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.34

$$1. \quad \text{ให้ } n = 3425$$

$$\text{เนื่องจาก } n \equiv 3 + 4 + 2 + 5 \equiv 5 \pmod{9}$$

$$\text{จากข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า } \rho(n) = 5$$

$$2. \quad \text{ให้ } n = 5247$$

$$\text{เนื่องจาก } n \equiv 5 + 2 + 4 + 7 \equiv 9 \pmod{9}$$

$$\text{จากข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า } \rho(n) = 9$$

ทฤษฎีบท 2.35 [2] รากตจทิพัลของจำนวนสมบูรณคู่ คือ 1

ตัวอย่าง 2.36

$$1. \quad \text{เนื่องจาก } 496 \text{ เป็นจำนวนสมบูรณคู่}$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 2.35 จะได้ว่า } \rho(496) = 1$$

$$2. \quad \text{เนื่องจาก } 8128 \text{ เป็นจำนวนสมบูรณคู่}$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 2.35 จะได้ว่า } \rho(8128) = 1$$

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main results)

รากดิจิทัลของผลคูณของจำนวนเฉพาะคู่แฝด

สำหรับหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติของรากดิจิทัลของจำนวนเต็ม n ที่อยู่ในรูปของ $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะคู่แฝด

พิจารณากรณีที่ $(p, q) = (3, 5)$ จะได้ว่า $n = 15$ ซึ่ง $\rho(n) = 6$

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะคู่แฝด และ $p > 3$ แล้ว $\rho(n) = 8$

พิสูจน์. เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีบท 2.10 จะได้ว่า $p = 6k - 1$ หรือ $p = 6k + 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะคู่แฝด จะได้ว่า q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q = p + 2$

พิจารณากรณีที่ $p = 6k + 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$
จะได้ว่า

$$q = p + 2 = 6k + 3 = 3(k + 2)$$

เนื่องจาก $3 \mid q$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ q เป็นจำนวนเฉพาะ

ดังนั้นเราจึงพิจารณากรณีที่ $p = 6k - 1$ เท่านั้น

พิจารณากรณีที่ $p = 6k - 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n &= p(p + 2) \\ &= (6k - 1)(6k + 1) \\ &= (6k)^2 - 1 \\ &= 36k^2 - 1 \\ &\equiv -1 \pmod{9} \\ &\equiv 8 \pmod{9} \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า $\rho(n) = 8$



ตัวอย่าง 3.2

1. พิจารณาจำนวนเฉพาะคู่แฝด $(17, 19)$ เมื่อ $n = 17 \cdot 19 = 323$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $\rho(n) = 8$

2. พิจารณาจำนวนเฉพาะคู่แฝด $(41, 43)$ เมื่อ $n = 41 \cdot 43 = 1763$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $\rho(n) = 8$

รากติจิทัลของผลคูณของจำนวนเฉพาะลูกพี่ลูกน้อง

สำหรับหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติของรากติจิทัลของจำนวนเต็ม n ที่อยู่ในรูปของ $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะพี่น้อง

พิจารณากรณีที่ $(p, q) = (3, 7)$ จะได้ว่า $n = 21$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\rho(n) = 3$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะพี่น้อง และ $p > 3$ แล้ว $\rho(n) = 5$

พิสูจน์. โดยทฤษฎีบท 2.10 จะได้ว่า $p = 6k - 1$ หรือ $p = 6k + 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$
 เนื่องจาก (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะลูกพี่ลูกน้อง จะได้ว่า q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q = p + 4$
 สำหรับกรณีที่ $p = 6k - 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$
 จะได้ว่า

$$q = 6k + 3 = 3(2k + 1)$$

ดังนั้น $3 \mid q$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ q เป็นจำนวนเฉพาะ
 ดังนั้นเราจึงพิจารณากรณีที่ $p = 6k + 1$ เท่านั้น

พิจารณากรณีที่ $p = 6k + 1$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}$
 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n &= p(p + 4) \\ &= (6k + 1)(6k + 5) \\ &= (6k)^2 + 36k + 5 \\ &\equiv 5 \pmod{9} \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยข้อสังเกต 2.31 เราจึงสรุปได้ว่า $\rho(n) = 5$



ตัวอย่าง 3.4

1. พิจารณาจำนวนเฉพาะลูกพี่ลูกน้อง $(13, 17)$ เมื่อ $n = 13 \cdot 17 = 221$
 โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $\rho(n) = 5$
2. พิจารณาจำนวนเฉพาะลูกพี่ลูกน้อง $(19, 23)$ เมื่อ $n = 19 \cdot 23 = 437$
 โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $\rho(n) = 5$

รากติจิทัลของจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด

สำหรับหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติของรากติจิทัลของจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด

พิจารณากรณีที่ $n = 2$ จะได้ว่า $\rho(n) = 2$ และ $n = 4$ จะได้ว่า $\rho(n) = 4$

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ n เป็นจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวดที่มากกว่า 4 แล้ว $\rho(n) = 1$ หรือ $\rho(n) = 7$

พิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด จากทฤษฎีบท 2.25 จะได้ว่า

$$n = 2^{p-1}$$

เมื่อ p และ $2^p - 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

เนื่องจาก $n > 4$ จะได้ว่า $p > 3$ โดยทฤษฎีบท 2.10 จะได้ว่า $p = 6k - 1$ หรือ $p = 6k + 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$

พิจารณากรณีที่ $p = 6k + 1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2^{p-1} &= 2^{6k+1-1} \\ &= (2^3)^{2k} \\ &\equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{9} \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 2.5}) \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า $\rho(n) = 1$

พิจารณากรณีที่ $p = 6k - 1$

จะได้ว่า $p \equiv -1 \equiv 5 \pmod{6}$

นั่นคือ $p = 6t + 5$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{Z}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2^{p-1} &= 2^{6t+5-1} \\ &= (2^3)^{2t} \cdot 2^4 \\ &\equiv (-1)^{2t} \cdot 16 \equiv 7 \pmod{9} \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 2.5}) \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า $\rho(n) = 7$

□

ตัวอย่าง 3.6

1. เมื่อ $p = 5$ พิจารณาจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด $n = 2^{p-1} = 2^4 = 16$

โดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า $\rho(16) = 7$

2. เมื่อ $p = 7$ พิจารณาจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด $n = 2^{p-1} = 2^6 = 64$

โดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า $\rho(64) = 1$

รากดิจิทัลของจำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง

สำหรับหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติของรากดิจิทัลของจำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ C_n เป็นจำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $\rho(C_n) = 1$ หรือ $\rho(C_n) = 7$

พิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $n = 3k, 3k + 1$ หรือ $3k + 2$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$

พิจารณากรณีที่ $n = 3k$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C_n &= 1 + 3(3k)(3k - 1) \\ &= 1 + 9k(3k - 1) \\ &\equiv 1 \pmod{9} \text{ (โดยทฤษฎีบท 2.5)} \end{aligned}$$

โดยข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า $\rho(C_n) = 1$

พิจารณากรณีที่ $n = 3k + 1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C_n &= 1 + 3(3k + 1)(3k) \\ &= 1 + 9k(3k + 1) \\ &\equiv 1 \pmod{9} \text{ (โดยทฤษฎีบท 2.5)} \end{aligned}$$

โดยข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า $\rho(C_n) = 1$

พิจารณากรณีที่ $n = 3k + 2$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C_n &= 1 + 3(3k + 2)(3k + 1) \\ &= 1 + 3[9k^2 + 6k + 3k + 2] \\ &= 1 + 27k^2 + 18k + 9k + 6 \\ &\equiv 7 \pmod{9} \text{ (โดยทฤษฎีบท 2.5)} \end{aligned}$$

โดยข้อสังเกต 2.31 จะได้ว่า $\rho(C_n) = 7$



ตัวอย่าง 3.8

พิจารณาจำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง $C_8 = 1 + 3(8)(7) = 169$

โดยทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า $\rho(C_n) = 7$

พิจารณาจำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง $C_{10} = 1 + 3(10)(9) = 271$

โดยทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า $\rho(C_n) = 1$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

เราได้ศึกษาเกี่ยวกับรากติจิทัลของจำนวนเต็มบวกโดยผลลัพธ์ ที่ได้เป็นดังต่อไปนี้

1. จำนวนเต็มบวก n ที่อยู่ในรูป $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะคู่แฝด และ $p > 3$ แล้ว $\rho(n) = 8$ เสมอ
2. จำนวนเต็มบวก n ที่อยู่ในรูป $n = p \cdot q$ เมื่อ (p, q) เป็นจำนวนเฉพาะพี่น้อง และ $p > 3$ แล้ว $\rho(n) = 5$ เสมอ
3. จำนวนเต็มบวก n เมื่อ n เป็นจำนวนสมบูรณ์ยิ่งยวด และ $p > 3$ แล้ว $\rho(n) = 1$ หรือ $\rho(n) = 7$
4. จำนวนเต็มบวก n เมื่อ n จำนวนหกเหลี่ยมศูนย์กลาง และ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $\rho(C_n) = 1$ หรือ $\rho(C_n) = 7$
5. เราได้พยายามศึกษารากติจิทัลของจำนวนที่อยู่ในรูป

$$n = p(p + 2k)$$

เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ และ p และ $p + 2k$ เป็นจำนวนเฉพาะ

สำหรับกรณีที่ $k = 3$ เราจะเรียก $(p, p + 6)$ ว่า **จำนวนเฉพาะเซ็กซี่ (sexy prime)**

อย่างไรก็ตาม เราพบว่ารูปแบบของ $\rho(n)$ นั้นเป็นไปได้หลายกรณี โดยเราได้พยายามสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบท แต่ยังไม่สามารถทำได้

บรรณานุกรม

- [1] Guha K. et al, Superperfect numbers and some ideas, International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT). 66(10), pp. 167-169, 2020.
- [2] Koshy T., Digital roots of Mersenne primes and even perfect numbers. The Mathematical Gazette. 89(516), pp. 464-466, 2005.
- [3] Lord N., Prime Numbers and the sequences $6n \pm 1$. The Mathematical Gazette. 98(541), pp. 126–28, 2014.
- [4] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Centered_hexagonal_number
- [5] <https://mgronline.com/science/detail/9630000037430>
- [6] ณรงค์ ปั่นนิ่ม, ทฤษฎีจำนวน, พิมพ์ครั้งที่ 4, มูลนิธิ สอวน, พ.ศ. 2553



DIGITAL ROOTS OF SOME INTEGERS

Mr. Thanawan Sukhumsathon
Assoc. Prof. Dr. Tanadon Chaobankoh
Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



1. PRELIMINARIES

Definition 1 The digital root of a positive integer n is the number formed by adding the digits of n over and over to get a single digit, denoted by $\rho(n)$. Since $n > 0$, we have $\rho(n) \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Example : $\rho(357) = 6$ since $3 + 5 + 7 = 15$ and $1 + 5 = 6$.

Definition 2 A pair of positive integers (p, q) is said to be a **twin prime pair** if p and q are primes with $q = p + 2$.

Example : with $(5, 7)$ and $(17, 19)$ are twin prime pairs.

Definition 3 A pair of positive integers (p, q) is said to be a **cousin prime pair** if p and q are primes with $q = p + 4$.

Example : with $(7, 11)$ and $(13, 17)$ are cousin prime pairs.

Definition 4 A function $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ defined by
$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \text{ for all } n \in \mathbb{N},$$

is called the sigma function. In other words, $\sigma(n)$ is the sum of all divisors of n .

Example : $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

Definition 5 Let n be a positive integer. n is called a **perfect number** if
$$\sigma(n) = 2n.$$

Example : $\sigma(6) = 2 \cdot 6$ so 6 is a perfect number.

Definition 6 A positive integer n is a **super perfect number** if
$$\sigma^2(n) = \sigma(\sigma(n)) = 2n.$$

Example : Since $\sigma^2(16) = \sigma(31) = 32 = 2 \cdot 16$, 16 is a super perfect number.

Theorem 7 If n is a super perfect number, then $n = 2^{p-1}$ where p and $2^p - 1$ are primes.

Definition 8 Let n be a positive integer, with $n > 1$. The number C_n in the form $C_n = 1 + 3n(n-1)$ is called a **centered hexagonal number**.

Example : 1, 7, 19 and 37 are centered hexagonal numbers.

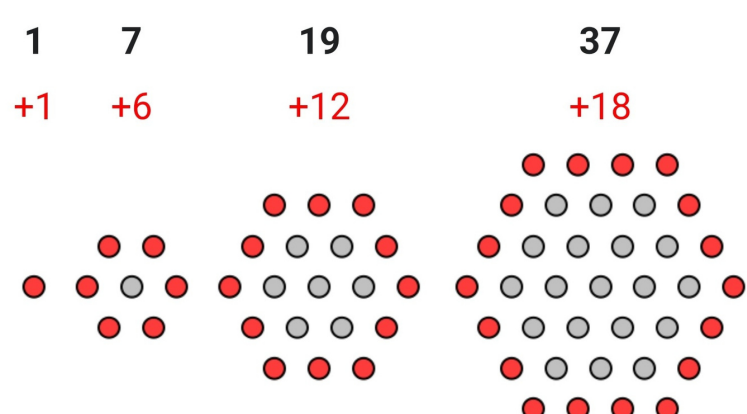


Figure [4]: centered hexagonal number

ABSTRACT

In this independent study, we study the properties of digital roots of specific integers, inspired by Koshy [2] where digital roots of Mersenne primes and perfect numbers were characterized. The integers under consideration are products of two primes, super perfect numbers, and centered hexagonal numbers.

2. MAIN RESULTS

Theorem 1 If $n = p \cdot q$ where (p, q) is a twin prime pair with $p > 3$, then
$$\rho(n) = 8.$$

Example : $\rho(17 \cdot 19) = 8$
 $\rho(227 \cdot 229) = 8$
 $\rho(617 \cdot 619) = 8$

Theorem 2 If $n = p \cdot q$ where (p, q) is a cousin prime pair with $p > 3$,
$$\rho(n) = 5.$$

Example : $\rho(13 \cdot 17) = 5$
 $\rho(439 \cdot 443) = 5$
 $\rho(613 \cdot 617) = 5$

Theorem 3 If n is a super perfect number with $n > 4$, then
$$\rho(n) = 1 \text{ or } \rho(n) = 7.$$

Example : $\rho(16) = 7$
 $\rho(64) = 1$
 $\rho(4096) = 1$

Theorem 4 If C_n is a centered hexagonal number, then
$$\rho(C_n) = 1 \text{ or } \rho(C_n) = 7.$$

Example : $\rho(C_5) = \rho(61) = 7$
 $\rho(C_7) = \rho(127) = 1$

REFERENCES

- [1] Guha K. et al, Superperfect numbers and some ideas, International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT). 66(10), pp. 167-169, 2020.
- [2] Koshy T., Digital roots of Mersenne primes and even perfect numbers. The Mathematical Gazette. 89(516), pp. 464-466, 2005.
- [3] Pannim N., number theory, 4th ed. The Promotion of Academic Olympiad and Development of Science Education Foundation(POSN), 2010.
- [4] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Centered_hexagonal_number