

ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
(Cayley digraphs of B -algebras)

นางสาวกรรณิการ์ คำปลิว
รหัส 630510454

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ปีการศึกษา 2566

ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
(Cayley digraphs of B -algebras)

นางสาวกรรณิการ์ คำปลิว

630510454

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
(Cayley digraphs of B -algebras)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

อัญชลี เข้มเพ็ชร	ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร)	
ปรียานุ โนนแหยม	กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปรียานุ โนนแหยม)	
สายัญ ปันมา	กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา)	

วันที่ 5 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษา ค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ซึ่งผู้ศึกษาได้ค้นคว้าในเรื่อง ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B (Cayley digraphs of B -algebras)

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษา งานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ช่วยตรวจสอบให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ ติดตามความก้าวหน้าในการค้นคว้าอิสระ รวมถึงตรวจสอบแก้ไขรูปเล่ม ความถูกต้อง จนทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริยานุช โหนดแฮม และ รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระทั้งสองที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณาและตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเสร็จสมบูรณ์ด้วยดี

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้เกิดข้อผิดพลาด หรือได้รับคำติชมประการใดผู้จัดทำขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

นางสาววรรณิการ์ คำปลิว

หัวข้อ (ภาษาไทย) ไคกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
 (ภาษาอังกฤษ) Cayley digraphs of B -algebras
 ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวกรรณิการ์ คำปลิว รหัสนักศึกษา 630510454
 ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร
 ชื่อกรรมการสอบ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริยานุช โพนแหยม
 รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา

บทคัดย่อ

ในการค้นคว้าอิสระครั้งนี้ เราสนใจศึกษาสมบัติบางประการและจำนวนอิสระของไคกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B โดยเราได้หาพีชคณิต B ทั้งหมดที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว จากนั้นเราได้แสดงว่าจำนวนอิสระ $\alpha(\text{Cay}(X, A))$ ของไคกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B มีค่าเท่ากับ $|A|$ ในกรณีที่ $A = \{0\}$ มากไปกว่านั้น เราได้หาขอบเขตบนของดีกรีเข้าและดีกรีออกของแต่ละจุดยอดในไคกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B โดยที่ในความเป็นจริงแล้วเราได้ว่าค่าของขอบเขตบนนี้จะเท่ากับดีกรีเข้าและดีกรีออกในกรณีที่พีชคณิต B มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว

Abstract

In this independent study, we are interested in studying some properties and independent numbers of Cayley digraphs of B -algebras. We find all B -algebras with no more than 4 elements. Then we show that the independent number $\alpha(\text{Cay}(X, A))$ of a Cayley digraph of B -algebras is equal to $|A|$ in the case when $A = \{0\}$. Moreover, we find an upper bound of the in-degree and out-degree of each vertex in Cayley digraphs of B -algebras. In fact, we obtain the equality in the case when the B -algebra contains no more than 4 elements.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main results)	21
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	43
บรรณานุกรม	46
ภาคผนวก	47

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

ในการค้นคว้าอิสระนี้ได้รับแรงบันดาลใจจากการศึกษาบทความ [1] ของ J. Neggers และ H.S. Kim ที่ได้นำเสนอและศึกษาสมบัติของพีชคณิต B และบทความ [2] ของ K. Limkul และ S. Panma ที่ได้แสดงวิธีหาค่าของจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์ โดยเราสนใจที่จะศึกษาไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ทั้งหมดที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว และหาจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์ดังกล่าว

วัตถุประสงค์ของการค้นคว้าอิสระ

1. เพื่อศึกษาสมบัติบางประการของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
2. เพื่อศึกษาพีชคณิต B ทั้งหมดที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว
3. เพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่ว่าไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B จะประกอบด้วยองค์ประกอบเชื่อมโยงที่เป็นวัฏจักร
4. เพื่อหาจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B

ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

ในการศึกษาครั้งนี้จะศึกษาพีชคณิต B ทั้งหมดที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว

วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิต B และไดกราฟเคย์เลย์
2. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิต B และไดกราฟเคย์เลย์
3. ศึกษาไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
4. หาจำนวนอิสระของไดกราฟของพีชคณิต B

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ

1. ได้ทราบลักษณะไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
2. ได้ทราบสมบัติบางประการของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B
3. ได้ทฤษฎีบทใหม่ที่เกี่ยวข้องกับไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

2.1 พีชคณิต B

บทนิยาม 2.1 ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จะกล่าวว่า $*$ เป็น การดำเนินการทวิภาค (binary operation) บนเซต X ก็ต่อเมื่อ $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X$ ไป X

บทนิยาม 2.2 ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และให้ $0 \in X$ จะกล่าวว่า $(X, *, 0)$ เป็น **พีชคณิต B** (B -algebra) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(i) $x * x = 0$

(ii) $x * 0 = x$

(iii) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$

ตัวอย่าง 2.3 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 1 ตัว)

ให้ $X = \{0\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0
0	0

จะแสดงว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

(i) จะแสดงว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$

ดังนั้น $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(ii) จะแสดงว่า $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$

ดังนั้น $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(iii) จะแสดงว่า $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
0	0	0	0	0	0	0	0

ดังนั้น $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ ทุก $x, y, z \in X$
สรุปได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

ตัวอย่าง 2.4 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 2 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

จะแสดงว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

(i) จะแสดงว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$ และ $1 * 1 = 0$

ดังนั้น $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(ii) จะแสดงว่า $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$ และ $1 * 0 = 1$

ดังนั้น $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(iii) จะแสดงว่า $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1

ดังนั้น $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ ทุก $x, y, z \in X$

สรุปได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

ตัวอย่าง 2.5 ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	2	0

จะแสดงว่า $(X, *, 0)$ ไม่เป็นพีชคณิต B

จากตารางการดำเนินการทวิภาค

พิจารณา $(0 * 1) * 2 = 1 * 2 = 1$ และ $0 * (2 * (0 * 1)) = 0 * (2 * 1) = 0 * 2 = 2$

จะได้ว่า $(0 * 1) * 2 = 1 \neq 2 = 0 * (2 * (0 * 1))$

ซึ่งไม่สอดคล้องกับข้อ (iii) ของบทนิยาม 2.2 ของพีชคณิต B

ดังนั้น $(X, *, 0)$ ไม่เป็นพีชคณิต B

ตัวอย่าง 2.6 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 3 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

(i) จะแสดงว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 1 = 0$ และ $2 * 2 = 0$

ดังนั้น $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(ii) จะแสดงว่า $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 0 = 1$ และ $2 * 0 = 2$

ดังนั้น $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(iii) จะแสดงว่า $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	2	2	2	2
2	2	2	0	1	1	1	1
0	0	1	0	2	0	1	2
0	1	0	2	2	2	1	2
1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	2	0	1	0	2	1
0	2	0	1	1	1	2	1
2	0	0	2	2	0	0	2
0	1	1	2	1	2	2	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	2	1	0
0	2	2	1	2	1	1	2
2	0	2	2	0	0	2	0
2	2	0	0	0	1	2	0
0	1	2	2	0	2	0	0
0	2	1	1	0	1	0	0
1	0	2	1	2	0	2	2
1	2	0	2	2	1	2	2
2	0	1	2	1	0	1	1
2	1	0	1	1	2	1	1
1	1	2	0	1	2	0	1
1	2	1	2	1	1	0	1
2	1	1	1	0	2	2	0
1	2	2	2	0	1	1	0
2	1	2	1	2	2	0	2
2	2	1	0	2	1	0	2

ดังนั้น $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ ทุก $x, y, z \in X$
 สรุปได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

ตัวอย่าง 2.7 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 1)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

(i) จะแสดงว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0, 1 * 1 = 0, 2 * 2 = 0$ และ $3 * 3 = 0$

ดังนั้น $x * x = 0$ ทุก $x \in X$

(ii) จะแสดงว่า $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0, 1 * 0 = 1, 2 * 0 = 2$ และ $3 * 0 = 3$

ดังนั้น $x * 0 = x$ ทุก $x \in X$

(iii) จะแสดงว่า $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1
2	2	2	0	2	2	0	2
3	3	3	0	3	3	0	3
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	2	0	2	0	0	2
0	0	3	0	3	0	0	3
1	1	0	0	0	1	1	0
2	2	0	0	0	2	2	0
3	3	0	0	0	3	3	0
2	2	1	0	1	2	3	1
3	3	1	0	1	3	2	1
1	1	2	0	2	1	3	2
1	1	3	0	3	1	2	3
2	2	3	0	3	2	1	3
3	3	2	0	2	3	1	2
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
0	2	2	2	0	2	0	0
0	3	3	3	0	3	0	0
1	2	2	3	1	2	0	1
1	3	3	2	1	3	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2
2	1	1	3	2	1	0	2
2	3	3	1	2	3	0	2
3	0	0	3	3	0	0	3
3	1	1	2	3	1	0	3
3	2	2	1	3	2	0	3
0	1	0	1	1	1	1	1
0	2	0	2	2	2	2	2
0	3	0	3	3	3	3	3
1	0	1	1	0	0	1	0

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
1	2	1	3	2	2	3	2
1	3	1	2	3	3	2	3
2	0	2	2	0	0	2	0
2	1	2	3	1	1	3	1
2	3	2	1	3	3	1	3
3	0	3	3	0	0	3	0
3	1	3	2	1	1	2	1
3	2	3	1	2	2	1	2
0	1	2	1	3	1	3	3
0	2	1	2	3	2	3	3
1	0	2	1	3	0	2	3
1	2	0	3	3	2	2	3
2	0	1	2	3	0	1	3
2	1	0	3	3	1	1	3
0	1	3	1	2	1	2	2
0	3	1	3	2	3	2	2
1	0	3	1	2	0	3	2
1	3	0	2	2	3	3	2
3	0	1	3	2	0	1	2
3	1	0	2	2	1	1	2
0	2	3	2	1	2	1	1
0	3	2	3	1	3	1	1
2	0	3	2	1	0	3	1
2	3	0	1	1	3	3	1
3	0	2	3	1	0	2	1
3	2	0	1	1	2	2	1
1	2	3	3	0	2	1	0
1	3	2	2	0	3	1	0
2	1	3	3	0	1	2	0
2	3	1	1	0	3	2	0
3	1	2	2	0	1	3	0
3	2	1	1	0	2	3	0

ดังนั้น $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ $\forall x, y, z \in X$

สรุปได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

ตัวอย่าง 2.8 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 2)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0	2	3
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

(i) จะแสดงว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 1 = 0$, $2 * 2 = 0$ และ $3 * 3 = 0$
 ดังนั้น $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(ii) จะแสดงว่า $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 0 = 1$, $2 * 0 = 2$ และ $3 * 0 = 3$
 ดังนั้น $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(iii) จะแสดงว่า $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1
2	2	2	0	3	3	1	3
3	3	3	0	2	2	1	2
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	2	0	3	0	2	3
0	0	3	0	2	0	3	2
1	1	0	0	0	1	1	0
2	2	0	0	0	3	2	0
3	3	0	0	0	2	3	0
2	2	1	0	1	3	3	1
3	3	1	0	1	2	2	1
1	1	2	0	3	1	3	3
1	1	3	0	2	1	2	2
2	2	3	0	2	3	0	2
3	3	2	0	3	2	0	3
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
0	2	2	3	1	3	1	1
0	3	3	2	1	2	1	1
1	2	2	2	0	3	1	0
1	3	3	3	0	2	1	0
2	0	0	2	2	0	0	2
2	1	1	3	2	1	0	2
2	3	3	1	3	2	1	3
3	0	0	3	3	0	0	3
3	1	1	2	3	1	0	3
3	2	2	1	2	3	1	2
0	1	0	1	1	1	1	1
0	2	0	3	3	3	2	3
0	3	0	2	2	2	3	2
1	0	1	1	0	0	1	0

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
1	2	1	2	3	3	3	3
1	3	1	3	2	2	2	2
2	0	2	2	0	0	2	0
2	1	2	3	1	1	3	1
2	3	2	1	2	2	0	2
3	0	3	3	0	0	3	0
3	1	3	2	1	1	2	1
3	2	3	1	3	3	0	3
0	1	2	1	2	1	3	2
0	2	1	3	2	3	3	2
1	0	2	1	2	0	2	2
1	2	0	2	2	3	2	2
2	0	1	2	3	0	1	3
2	1	0	3	3	1	1	3
0	1	3	1	3	1	2	3
0	3	1	2	3	2	2	3
1	0	3	1	3	0	3	3
1	3	0	3	3	2	3	3
3	0	1	3	2	0	1	2
3	1	0	2	2	1	1	2
0	2	3	3	0	3	0	0
0	3	2	2	0	2	0	0
2	0	3	2	1	0	3	1
2	3	0	1	1	2	3	1
3	0	2	3	1	0	2	1
3	2	0	1	1	3	2	1
1	2	3	2	1	3	0	1
1	3	2	3	1	2	0	1
2	1	3	3	0	1	2	0
2	3	1	1	0	2	2	0
3	1	2	2	0	1	3	0
3	2	1	1	0	3	3	0

ดังนั้น $(x * y) * z = x * (z * (0 * y)) \quad \forall x, y, z \in X$

สรุปได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

ตัวอย่าง 2.9 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 3)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

(i) จะแสดงว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 1 = 0$, $2 * 2 = 0$ และ $3 * 3 = 0$
 ดังนั้น $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(ii) จะแสดงว่า $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 0 = 1$, $2 * 0 = 2$ และ $3 * 0 = 3$
 ดังนั้น $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(iii) จะแสดงว่า $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	2	2	3	2
2	2	2	0	1	1	3	1
3	3	3	0	3	3	0	3
0	0	1	0	2	0	1	2
0	0	2	0	1	0	2	1
0	0	3	0	3	0	3	3
1	1	0	0	0	2	1	0
2	2	0	0	0	1	2	0
3	3	0	0	0	3	3	0
2	2	1	0	2	1	0	2
3	3	1	0	2	3	2	2
1	1	2	0	1	2	0	1
1	1	3	0	3	2	2	3
2	2	3	0	3	1	1	3
3	3	2	0	1	3	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	2	3	2	3	3
0	2	2	1	3	1	3	3
0	3	3	3	0	3	0	0
1	2	2	3	2	1	3	2
1	3	3	2	1	3	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2
2	1	1	3	1	2	3	1
2	3	3	1	2	3	0	2
3	0	0	3	3	0	0	3
3	1	1	1	0	2	3	0
3	2	2	2	0	1	3	0
0	1	0	2	2	2	1	2
0	2	0	1	1	1	2	1
0	3	0	3	3	3	3	3
1	0	1	1	0	0	1	0

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
1	2	1	3	1	1	0	1
1	3	1	2	3	3	2	3
2	0	2	2	0	0	2	0
2	1	2	3	2	2	0	2
2	3	2	1	3	3	1	3
3	0	3	3	0	0	3	0
3	1	3	1	2	2	2	2
3	2	3	2	1	1	1	1
0	1	2	2	0	2	0	0
0	2	1	1	0	1	0	0
1	0	2	1	3	0	2	3
1	2	0	3	3	1	2	3
2	0	1	2	3	0	1	3
2	1	0	3	3	2	1	3
0	1	3	2	1	2	2	1
0	3	1	3	1	3	2	1
1	0	3	1	2	0	3	2
1	3	0	2	2	3	3	2
3	0	1	3	1	0	1	1
3	1	0	1	1	2	1	1
0	2	3	1	2	1	1	2
0	3	2	3	2	3	1	2
2	0	3	2	1	0	3	1
2	3	0	1	1	3	3	1
3	0	2	3	2	0	2	2
3	2	0	2	2	1	2	2
1	2	3	3	0	1	1	0
1	3	2	2	0	3	1	0
2	1	3	3	0	2	2	0
2	3	1	1	0	3	2	0
3	1	2	1	3	2	0	3
3	2	1	2	3	1	0	3

ดังนั้น $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ $\forall x, y, z \in X$

สรุปได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

ตัวอย่าง 2.10 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 4)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม $*$ บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

(i) จะแสดงว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 1 = 0$, $2 * 2 = 0$ และ $3 * 3 = 0$
 ดังนั้น $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(ii) จะแสดงว่า $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค จะได้ว่า $0 * 0 = 0$, $1 * 0 = 1$, $2 * 0 = 2$ และ $3 * 0 = 3$
 ดังนั้น $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(iii) จะแสดงว่า $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากตารางการดำเนินการทวิภาค พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	3	3	2	3
2	2	2	0	2	2	0	2
3	3	3	0	1	1	2	1
0	0	1	0	3	0	1	3
0	0	2	0	2	0	2	2
0	0	3	0	1	0	3	1
1	1	0	0	0	3	1	0
2	2	0	0	0	2	2	0
3	3	0	0	0	1	3	0
2	2	1	0	3	2	3	3
3	3	1	0	3	1	0	3
1	1	2	0	2	3	3	2
1	1	3	0	1	3	0	1
2	2	3	0	1	2	1	1
3	3	2	0	2	1	1	2
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	3	2	3	2	2
0	2	2	2	0	2	0	0
0	3	3	1	2	1	2	2
1	2	2	3	1	2	0	1
1	3	3	2	3	1	2	3
2	0	0	2	2	0	0	2
2	1	1	1	0	3	2	0
2	3	3	3	0	1	2	0
3	0	0	3	3	0	0	3
3	1	1	2	1	3	2	1
3	2	2	1	3	2	0	3
0	1	0	3	3	3	1	3
0	2	0	2	2	2	2	2
0	3	0	1	1	1	3	1
1	0	1	1	0	0	1	0

x	y	z	$x * y$	$(x * y) * z$	$0 * y$	$z * (0 * y)$	$x * (z * (0 * y))$
1	2	1	3	2	2	3	2
1	3	1	2	1	1	0	1
2	0	2	2	0	0	2	0
2	1	2	1	3	3	3	3
2	3	2	3	1	1	1	1
3	0	3	3	0	0	3	0
3	1	3	2	3	3	0	3
3	2	3	1	2	2	1	2
0	1	2	3	1	3	3	1
0	2	1	2	1	2	3	1
1	0	2	1	3	0	2	3
1	2	0	3	3	2	2	3
2	0	1	2	1	0	1	1
2	1	0	1	1	3	1	1
0	1	3	3	0	3	0	0
0	3	1	1	0	1	0	0
1	0	3	1	2	0	3	2
1	3	0	2	2	1	3	2
3	0	1	3	2	0	1	2
3	1	0	2	2	3	1	2
0	2	3	2	3	2	1	3
0	3	2	1	3	1	1	3
2	0	3	2	3	0	3	3
2	3	0	3	3	1	3	3
3	0	2	3	1	0	2	1
3	2	0	1	1	2	2	1
1	2	3	3	0	2	1	0
1	3	2	2	0	1	1	0
2	1	3	1	2	3	0	2
2	3	1	3	2	1	0	2
3	1	2	2	0	3	3	0
3	2	1	1	0	2	3	0

ดังนั้น $(x * y) * z = x * (z * (0 * y)) \quad \forall x, y, z \in X$

สรุปได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

บทตั้ง 2.11 [1] ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B สำหรับทุก $x, y, z \in X$ ถ้า $x * z = y * z$ แล้ว $x = y$

ข้อสังเกต 2.12 จากบทตั้ง 2.11 จะได้ว่าสำหรับทุก $x, y, z \in X$ ถ้า $x \neq y$ แล้ว $x * z \neq y * z$ ดังนั้น

- (i) ในแต่ละหลักของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกไม่ซ้ำกัน
- (ii) ในแต่ละหลักของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกใน X ครบทุกตัว

บทตั้ง 2.13 [1] ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B สำหรับทุก $x, y \in X$ ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $x = y$

บทตั้ง 2.14 [1] ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B สำหรับทุก $x, y \in X$ ถ้า $0 * x = 0 * y$ แล้ว $x = y$

ข้อสังเกต 2.15 จากบทตั้ง 2.14 จะได้ว่าสำหรับทุก $x, y \in X$ ถ้า $x \neq y$ แล้ว $0 * x \neq 0 * y$ ดังนั้น

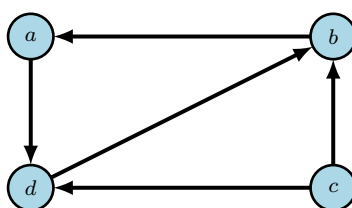
- (i) ในแถว 0 ของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกไม่ซ้ำกัน
- (ii) ในแถว 0 ของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกใน X ครบทุกตัว

2.2 ไคกราฟเคย์เลย์

บทนิยาม 2.16 ไคกราฟ (digraph) $D = (V, E)$ ประกอบด้วยเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง $V = V(D)$ โดยจะเรียกสมาชิกใน V ว่า **จุดยอด** (vertex) และเซตจำกัด $E = E(D)$ เป็นเซตของคู่อันดับของสมาชิกใน V โดยจะเรียกสมาชิกใน E ว่า **เส้นเชื่อม** (arc)

ตัวอย่าง 2.17 [2] ให้ $V = \{a, b, c, d\}$ และ $E = \{(a, d), (b, a), (c, d), (c, b), (d, b)\}$

จะได้ว่า $D = (V, E)$ เป็นไคกราฟที่มีเซตของจุดยอดเป็น V และเซตของเส้นเชื่อมเป็น E ซึ่งสามารถแทนด้วยแผนภาพดังรูปต่อไปนี้



ไคกราฟ $D = (V, E)$

บทนิยาม 2.18 ให้ D และ H เป็นไคกราฟ

จะกล่าวว่า H เป็น **ไคกราฟย่อย** (subdigraph) ของ D ก็ต่อเมื่อ $V(H) \subseteq V(D)$ และ $E(H) \subseteq E(D)$

บทนิยาม 2.19 ให้ $D = (V, E)$ เป็นไคกราฟ และ $u \in V(D)$ จะกล่าวว่า u **ตกกระทบ** (incident) กับ (u, x) และ (x, u) สำหรับทุก $(u, x), (x, u) \in E(D)$

บทนิยาม 2.20 ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดเกรฟ

กึ่งวิถี (semipath) ใน D คือลำดับของจุดยอดสลับกับเส้นเชื่อมโดยเริ่มต้นและสิ้นสุดด้วยจุดยอด และจุดยอดที่อยู่บนลำดับจะตกกระทบกับเส้นเชื่อมที่อยู่ในลำดับติดกัน

บทนิยาม 2.21 ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดเกรฟ

จะกล่าวว่า D เป็น **ไดเกรฟเชื่อมโยง** (connected digraph) ก็ต่อเมื่อ จุดยอด 2 จุดใด ๆ ใน V มีกึ่งวิถีที่เชื่อมระหว่างสองจุดยอดนั้น

บทนิยาม 2.22 ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดเกรฟ

ส่วนประกอบ (component) ของ D คือ ไดเกรฟย่อยเชื่อมโยงของ D ที่ไม่เป็นไดเกรฟย่อยของไดเกรฟเชื่อมโยงอื่นใน D

บทนิยาม 2.23 ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดเกรฟ และ $x \in V(D)$

(i) **ดีกรีเข้า** (in-degree) ของ x แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{d}(x)$ คือ

$$\vec{d}(x) = \left| \{y : (y, x) \in E(D)\} \right|$$

(ii) **ดีกรีออก** (out-degree) ของ x แทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftarrow{d}(x)$ คือ

$$\overleftarrow{d}(x) = \left| \{y : (x, y) \in E(D)\} \right|$$

บทนิยาม 2.24 [2] ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดเกรฟ

(i) ให้ $u, v \in V(D)$ โดยที่ $u \neq v$

จะกล่าวว่า u และ v **อิสระต่อกัน** (independent) ก็ต่อเมื่อ $(u, v) \notin E(D)$ และ $(v, u) \notin E(D)$

(ii) ให้ S เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ V

จะกล่าวว่า S เป็น **เซตอิสระ** (independent) ของ D ก็ต่อเมื่อ u และ v เป็นอิสระต่อกัน สำหรับทุก $u, v \in S$

บทนิยาม 2.25 [2] ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดเกรฟ

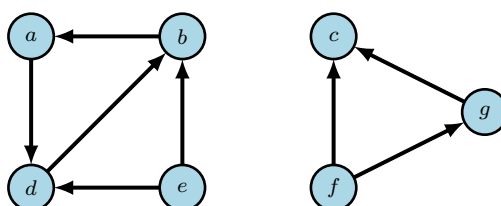
จำนวนอิสระ (independent number) ของ D แทนด้วยสัญลักษณ์ $\alpha(D)$ คือ

$$\alpha(D) = \max \{ |S| : S \text{ เป็นเซตอิสระของ } D \}$$

ตัวอย่าง 2.26 [2] ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดเกรฟ

โดยที่ $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ และ $E = \{(a, d), (b, a), (e, d), (e, b), (d, b), (f, c), (f, g), (g, c)\}$

จะได้ว่า D เป็นไดเกรฟดังรูป



จากรูปจะได้ว่า

จุด b และจุด c เป็นอิสระต่อกัน

จุด a และจุด c เป็นอิสระต่อกัน

จุด a และจุด e เป็นอิสระต่อกัน

จุด e และจุด c เป็นอิสระต่อกัน

จุด d และจุด b ไม่เป็นอิสระต่อกัน

เซตย่อย $S = \{a\}$ เป็นเซตอิสระของ D

เซตย่อย $S = \{b, c\}$ เป็นเซตอิสระของ D

เซตย่อย $S = \{a, e, c\}$ เป็นเซตอิสระของ D

เซตย่อย $S = \{a, b, e, d\}$ ไม่เป็นเซตอิสระของ D

เมื่อพิจารณาเซตอิสระทั้งหมดของ D แล้วจะได้ว่า จำนวนอิสระ $\alpha(D) = 3$

ข้อสังเกต 2.27 ให้ $D = (V, E)$ เป็นไดกราฟ

(i) ถ้า S เป็นเซตย่อยของ V โดยที่ $|S| = 1$ แล้ว S เป็นเซตอิสระของ D

(ii) จำนวนอิสระ $\alpha(D)$ มากกว่าหรือเท่ากับ 1 เสมอ

บทนิยาม 2.28 [2] ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และให้ A เป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ **ไดกราฟเคย์เลย์** (Cayley digraph) ของ X สัมพันธ์กับ A แทนด้วยสัญลักษณ์ $Cay(X, A)$ คือไดกราฟที่มีเซตของจุดยอดเป็น $V(Cay(X, A)) = X$ และเซตของเส้นเชื่อมเป็น

$$E(Cay(X, A)) = \{(x, x * a) | x \in X, a \in A\}$$

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main results)

3.1 พีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว

ในหัวข้อนี้เราจะหาพีชคณิต B ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว

บทตั้ง 3.1 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 1 ตัว)

ให้ $X = \{0\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังตารางต่อไปนี้

$*$	0
0	0

บทพิสูจน์: ให้ $X = \{0\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X

จากตัวอย่าง 2.3 จะเห็นได้ชัดว่าบทตั้ง 3.1 เป็นจริง □

บทตั้ง 3.2 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 2 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

บทพิสูจน์: ให้ $X = \{0, 1\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X

จากตัวอย่าง 2.4 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B เมื่อ $*$ กำหนดดังตารางการดำเนินการทวิภาคข้างต้น

ในทางกลับกันสมมติว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

จากบทนิยาม 2.2 (i) จะได้ว่า $0 * 0 = 0$ และ $1 * 1 = 0$

จากบทนิยาม 2.2 (ii) จะได้ว่า $0 * 0 = 0$ และ $1 * 0 = 1$

พิจารณาหลัก 1 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $1 * 1 = 0$ จะได้ว่า $0 * 1 = 1$

ดังนั้นจะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

จากตัวอย่าง 2.4 จะได้ว่าตารางการดำเนินการทวิภาคนี้สอดคล้องกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B สรุปได้ว่าบทตั้ง 3.2 เป็นจริง $\square$

บทตั้ง 3.3 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 3 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

บทพิสูจน์: ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X

จากตัวอย่าง 2.6 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B เมื่อ $*$ กำหนดดังตารางการดำเนินการทวิภาคข้างต้น ในทางกลับกันสมมติว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

จากบทนิยาม 2.2 (i) จะได้ว่า $0 * 0 = 0, 1 * 1 = 0$ และ $2 * 2 = 0$

จากบทนิยาม 2.2 (ii) จะได้ว่า $0 * 0 = 0, 1 * 0 = 1$ และ $2 * 0 = 2$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

$*$	0	1	2
0	0		
1	1	0	
2	2		0

พิจารณาหลัก 1 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $1 * 1 = 0$

จะได้ว่า $0 * 1 = 1$ และ $2 * 1 = 2$ หรือ $0 * 1 = 2$ และ $2 * 1 = 1$

กรณีที่ 1 : $0 * 1 = 1$ และ $2 * 1 = 2$

พิจารณาแถว 0 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.15 (i) และจาก $0 * 0 = 0$ และ $0 * 1 = 1$ จะได้ว่า $0 * 2 = 2$

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	
2	2		0

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 2$ และ $2 * 2 = 0$ จะได้ว่า $1 * 2 = 1$

พิจารณา $(0 * 2) * 1 = 2 * 1 = 2$ และ $0 * (1 * (0 * 2)) = 0 * (1 * 2) = 0 * 1 = 1$

จะได้ว่า $(0 * 2) * 1 = 2 \neq 1 = 0 * (1 * (0 * 2))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบัพนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 2 : $0 * 1 = 2$ และ $2 * 1 = 1$

พิจารณาแถว 0 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.15 (i) และจาก $0 * 0 = 0$ และ $0 * 1 = 2$ จะได้ว่า $0 * 2 = 1$

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 1$ และ $2 * 2 = 0$ จะได้ว่า $1 * 2 = 2$

ดังนั้นจะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

จากตัวอย่าง 2.6 จะได้ว่าตารางการดำเนินการทวิภาคนี้นสอดคล้องกับบัพนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B สรุปได้ว่าบทตั้ง 3.3 เป็นจริง □

บทตั้ง 3.4 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังหนึ่งในตาราง 4 แบบดังนี้

แบบที่ 1

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	3
3	3	2	1	0

แบบที่ 2

*	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0	2	3
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

แบบที่ 3

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

แบบที่ 4

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

บทพิสูจน์: ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X

จากตัวอย่าง 2.7 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B เมื่อ $*$ กำหนดดังหนึ่งในตารางการดำเนินการทวิภาค 4 แบบข้างต้น

ในทางกลับกันสมมติว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B

จากบทนิยาม 2.2 (i) จะได้ว่า $0 * 0 = 0, 1 * 1 = 0, 2 * 2 = 0$ และ $3 * 3 = 0$

จากบทนิยาม 2.2 (ii) จะได้ว่า $0 * 0 = 0, 1 * 0 = 1, 2 * 0 = 2$ และ $3 * 0 = 3$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0			
1	1	0		
2	2		0	
3	3			0

พิจารณาหลัก 1 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $1 * 1 = 0$ จะได้ว่า $0 * 1 = 1$ หรือ $0 * 1 = 2$ หรือ $0 * 1 = 3$

กรณีที่ 1 : $0 * 1 = 1$

พิจารณาแถว 0 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.15 (i) และจาก $0 * 0 = 0$ และ $0 * 1 = 1$

จะได้ว่า $0 * 2 = 2$ และ $0 * 3 = 3$ หรือ $0 * 2 = 3$ และ $0 * 3 = 2$

กรณีที่ 1.1 : $0 * 2 = 2$ และ $0 * 3 = 3$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0		
2	2		0	
3	3			0

พิจารณาหลัก 1 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 1 = 1$ และ $1 * 1 = 0$

จะได้ว่า $2 * 1 = 2$ และ $3 * 1 = 3$ หรือ $2 * 1 = 3$ และ $3 * 1 = 2$

กรณี 1.1.1 : $2 * 1 = 2$ และ $3 * 1 = 3$

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 2$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 1$ หรือ $1 * 2 = 3$ นั่นคือ $1 * 2 \neq 2$

พิจารณา $(1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 2$ และ $1 * (2 * (0 * 1)) = 1 * (2 * 1) = 1 * 2 \neq 2$

จะได้ว่า $(1 * 1) * 2 = 2 \neq 1 * (2 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณี 1.1.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณี 1.1.2 : $2 * 1 = 3$ และ $3 * 1 = 2$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0		
2	2	3	0	
3	3	2		0

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 2$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 1$ และ $3 * 2 = 3$ หรือ $1 * 2 = 3$ และ $3 * 2 = 1$

กรณี 1.1.2.1 : $1 * 2 = 1$ และ $3 * 2 = 3$

พิจารณา $(0 * 1) * 2 = 1 * 2 = 1$ และ $0 * (2 * (0 * 1)) = 0 * (2 * 1) = 0 * 2 = 2$

จะได้ว่า $(0 * 1) * 2 = 1 \neq 2 = 0 * (2 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณี 1.1.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณี 1.1.2.2 : $1 * 2 = 3$ และ $3 * 2 = 1$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	
2	2	3	0	
3	3	2	1	0

พิจารณาหลัก 3 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 3 = 3$ และ $3 * 3 = 0$

จะได้ว่า $1 * 3 = 1$ และ $2 * 3 = 2$ หรือ $1 * 3 = 2$ และ $2 * 3 = 1$

กรณี 1.1.2.2.1 : $1 * 3 = 1$ และ $2 * 3 = 2$

พิจารณา $(0 * 3) * 1 = 3 * 1 = 2$ และ $0 * (1 * (0 * 3)) = 0 * (1 * 3) = 0 * 1 = 1$

จะได้ว่า $(0 * 3) * 1 = 2 \neq 1 = 0 * (1 * (0 * 3))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณี 1.1.2.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 1.1.2.2.2 : $1 * 3 = 2$ และ $2 * 3 = 1$

ดังนั้นจะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

จากตัวอย่าง 2.7 จะได้ว่าตารางการดำเนินการทวิภาคนี้สอดคล้องกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B

กรณีที่ 1.2 : $0 * 2 = 3$ และ $0 * 3 = 2$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0		
2	2		0	
3	3			0

พิจารณาหลัก 1 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 1 = 1$ และ $1 * 1 = 0$

จะได้ว่า $2 * 1 = 2$ และ $3 * 1 = 3$ หรือ $2 * 1 = 3$ และ $3 * 1 = 2$

กรณีที่ 1.2.1 : $2 * 1 = 2$ และ $3 * 1 = 3$

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 3$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 1$ หรือ $1 * 2 = 2$ นั่นคือ $1 * 2 \neq 3$

พิจารณา $(1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 3$ และ $1 * (2 * (0 * 1)) = 1 * (2 * 1) = 1 * 2 \neq 3$

จะได้ว่า $(1 * 1) * 2 = 3 \neq 1 * (2 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B

ดังนั้นกรณีที่ 1.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 1.2.2 : $2 * 1 = 3$ และ $3 * 1 = 2$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0		
2	2	3	0	
3	3	2		0

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 3$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 1$ และ $3 * 2 = 2$ หรือ $1 * 2 = 2$ และ $3 * 2 = 1$

กรณีที่ 1.2.2.1 : $1 * 2 = 1$ และ $3 * 2 = 2$

พิจารณา $(0 * 1) * 2 = 1 * 2 = 1$ และ $0 * (2 * (0 * 1)) = 0 * (2 * 1) = 0 * 3 = 2$

จะได้ว่า $(0 * 1) * 2 = 1 \neq 2 = 0 * (2 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบัพนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 1.2.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 1.2.2.2 : $1 * 2 = 2$ และ $3 * 2 = 1$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0	2	
2	2	3	0	
3	3	2	1	0

พิจารณาหลัก 3 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 3 = 2$ และ $3 * 3 = 0$

จะได้ว่า $1 * 3 = 1$ และ $2 * 3 = 3$ หรือ $1 * 3 = 3$ และ $2 * 3 = 1$

กรณีที่ 1.2.2.2.1 : $1 * 3 = 1$ และ $2 * 3 = 3$

พิจารณา $(1 * 2) * 3 = 2 * 3 = 3$ และ $1 * (3 * (0 * 2)) = 1 * (3 * 3) = 1 * 0 = 1$

จะได้ว่า $(1 * 2) * 3 = 3 \neq 1 = 1 * (3 * (0 * 2))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบัพนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 1.2.2.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 1.2.2.2.2 : $1 * 3 = 3$ และ $2 * 3 = 1$

ดังนั้นจะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0	2	3
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

จากตัวอย่าง 2.8 จะได้ว่าตารางการดำเนินการทวิภาคนี้สอดคล้องกับบัพนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B

กรณีที่ 2 : $0 * 1 = 2$

พิจารณาแถว 0 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.15 (i) และจาก $0 * 0 = 0$ และ $0 * 1 = 2$

จะได้ว่า $0 * 2 = 1$ และ $0 * 3 = 3$ หรือ $0 * 2 = 3$ และ $0 * 3 = 1$

กรณี 2.1 : $0 * 2 = 1$ และ $0 * 3 = 3$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0		
2	2		0	
3	3			0

พิจารณาหลัก 1 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 1 = 2$ และ $1 * 1 = 0$

จะได้ว่า $2 * 1 = 1$ และ $3 * 1 = 3$ หรือ $2 * 1 = 3$ และ $3 * 1 = 1$

กรณีที่ 2.1.1 : $2 * 1 = 1$ และ $3 * 1 = 3$

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 1$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 2$ หรือ $1 * 2 = 3$ นั่นคือ $1 * 2 \neq 1$

พิจารณา $(1 * 0) * 2 = 1 * 2 \neq 1$ และ $1 * (2 * (0 * 1)) = 1 * (2 * 2) = 1 * 0 = 1$

จะได้ว่า $(1 * 0) * 2 \neq 1 = 1 * (2 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 2.1.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 2.1.2 : $2 * 1 = 3$ และ $3 * 1 = 1$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0		
2	2	3	0	
3	3	1		0

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 1$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 2$ และ $3 * 2 = 3$ หรือ $1 * 2 = 3$ และ $3 * 2 = 2$

กรณีที่ 2.1.2.1 : $1 * 2 = 2$ และ $3 * 2 = 3$

พิจารณา $(3 * 1) * 2 = 1 * 2 = 2$ และ $3 * (2 * (0 * 1)) = 3 * (2 * 2) = 3 * 0 = 3$

จะได้ว่า $(3 * 1) * 2 = 2 \neq 3 = 3 * (2 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 2.1.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 2.1.2.2 : $1 * 2 = 3$ และ $3 * 2 = 2$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	
2	2	3	0	
3	3	1	2	0

พิจารณาหลัก 3 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 3 = 3$ และ $3 * 3 = 0$

จะได้ว่า $1 * 3 = 1$ และ $2 * 3 = 2$ หรือ $1 * 3 = 2$ และ $2 * 3 = 1$

กรณีที่ 2.1.2.2.1 : $1 * 3 = 1$ และ $2 * 3 = 2$

พิจารณา $(0 * 1) * 3 = 2 * 3 = 2$ และ $0 * (3 * (0 * 1)) = 0 * (3 * 2) = 0 * 2 = 1$

จะได้ว่า $(0 * 1) * 3 = 2 \neq 1 = 0 * (3 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 2.1.2.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 2.1.2.2.2 : $1 * 3 = 2$ และ $2 * 3 = 1$

ดังนั้นจะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

จากตัวอย่าง 2.9 จะได้ว่าตารางการดำเนินการทวิภาคนี้สอดคล้องกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B

กรณีที่ 2.2 : $0 * 2 = 3$ และ $0 * 3 = 1$

พิจารณา $(1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 3$ และ $1 * (2 * (0 * 1)) = 1 * (2 * 2) = 1 * 0 = 1$

จะได้ว่า $(1 * 1) * 2 = 3 \neq 1 = 1 * (2 * (0 * 1))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 2.2 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 3 : $0 * 1 = 3$

พิจารณาแถว 0 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.15 (i) และจาก $0 * 0 = 0$ และ $0 * 1 = 3$

จะได้ว่า $0 * 2 = 1$ และ $0 * 3 = 2$ หรือ $0 * 2 = 2$ และ $0 * 3 = 1$

กรณีที่ 3.1 : $0 * 2 = 1$ และ $0 * 3 = 2$

พิจารณา $(0 * 3) * 0 = 2 * 0 = 2$ และ $0 * (0 * (0 * 3)) = 0 * (0 * 2) = 0 * 1 = 3$

จะได้ว่า $(0 * 3) * 0 = 2 \neq 3 = 0 * (0 * (0 * 3))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 3.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 3.2 : $0 * 2 = 2$ และ $0 * 3 = 1$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0		
2	2		0	
3	3			0

พิจารณาหลัก 1 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 1 = 3$ และ $1 * 1 = 0$

จะได้ว่า $2 * 1 = 2$ และ $3 * 1 = 1$ หรือ $2 * 1 = 1$ และ $3 * 1 = 2$

กรณีที่ 3.2.1 : $2 * 1 = 2$ และ $3 * 1 = 1$

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 2$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 1$ หรือ $1 * 2 = 3$ นั่นคือ $1 * 2 \neq 2$

พิจารณา $(0 * 3) * 2 = 1 * 2 \neq 2$ และ $0 * (2 * (0 * 3)) = 0 * (2 * 1) = 0 * 2 = 2$

จะได้ว่า $(0 * 3) * 2 \neq 2 = 0 * (2 * (0 * 3))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 3.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 3.2.2 : $2 * 1 = 1$ และ $3 * 1 = 2$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0		
2	2	1	0	
3	3	2		0

พิจารณาหลัก 2 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 2 = 2$ และ $2 * 2 = 0$

จะได้ว่า $1 * 2 = 1$ และ $3 * 2 = 3$ หรือ $1 * 2 = 3$ และ $3 * 2 = 1$

กรณีที่ 3.2.2.1 : $1 * 2 = 1$ และ $3 * 2 = 3$

พิจารณา $(0 * 3) * 2 = 1 * 2 = 1$ และ $0 * (2 * (0 * 3)) = 0 * (2 * 1) = 0 * 2 = 2$

จะได้ว่า $(0 * 3) * 2 = 1 \neq 2 = 0 * (2 * (0 * 3))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 3.2.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 3.2.2.2 : $1 * 2 = 3$ และ $3 * 2 = 1$

จะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	
2	2	1	0	
3	3	2	1	0

พิจารณาหลัก 3 ของตารางการดำเนินการทวิภาค

จากข้อสังเกต 2.12 (i) และจาก $0 * 3 = 1$ และ $3 * 3 = 0$

จะได้ว่า $1 * 3 = 3$ และ $2 * 3 = 2$ หรือ $1 * 3 = 2$ และ $2 * 3 = 3$

กรณีที่ 3.2.2.2.1 : $1 * 3 = 3$ และ $2 * 3 = 2$

พิจารณา $(1 * 3) * 2 = 3 * 2 = 1$ และ $1 * (2 * (0 * 3)) = 1 * (2 * 1) = 1 * 1 = 0$

จะได้ว่า $(1 * 3) * 2 = 1 \neq 0 = 1 * (2 * (0 * 3))$ เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B ดังนั้นกรณีที่ 3.2.2.2.1 ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่ 3.2.2.2.2 : $1 * 3 = 2$ และ $2 * 3 = 3$

ดังนั้นจะได้ตารางการดำเนินการทวิภาคดังนี้

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

จากตัวอย่าง 2.10 จะได้ว่าตารางการดำเนินการทวิภาคนี้สอดคล้องกับบทนิยาม 2.2 (iii) ของพีชคณิต B สรุปได้ว่าบทตั้ง 3.4 เป็นจริง □

ข้อสังเกต 3.5 จากบทตั้ง 3.1-3.4 ถ้า X เป็นพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว จะได้ว่าในแต่ละแถวของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกไม่ซ้ำกัน ดังนั้นในแต่ละแถวของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกใน X ครบทุกตัว นั่นคือสำหรับทุก $x, y, z \in X$ ถ้า $x * y = x * z$ แล้ว $y = z$

3.2 ไตรกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงไตรกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว โดยจะแสดงเฉพาะกรณีที่เซตย่อย A มีสมาชิกเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น

ตัวอย่าง 3.6 (ไตรกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิก 2 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1\}$ เป็นพีชคณิต B และ $*$ กำหนดดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

กรณีที่ 1 : $A = \{0\}$

จะได้ว่าไคกราฟเคย์เลย์ $Cay(X, A)$ ประกอบด้วย

$$V(Cay(X, A)) = \{0, 1\} = X \text{ และ}$$

$$E(Cay(X, A)) = \{(0, 0 * 0), (1, 1 * 0)\} = \{(0, 0), (1, 1)\}$$

แสดงดังรูป

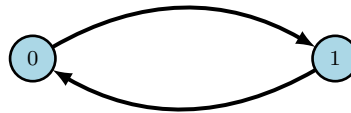


ดังนั้น $\alpha(Cay(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 2 : $A = \{1\}$ แล้ว $V(Cay(X, A)) = \{0, 1\} = X$

$$E(Cay(X, A)) = \{(0, 0 * 1), (1, 1 * 1)\} = \{(0, 1), (1, 0)\}$$

แสดงดังรูป



ดังนั้น $\alpha(Cay(X, A)) = 1$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

ตัวอย่าง 3.7 (ไคกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิก 3 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ เป็นพีชคณิต B แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

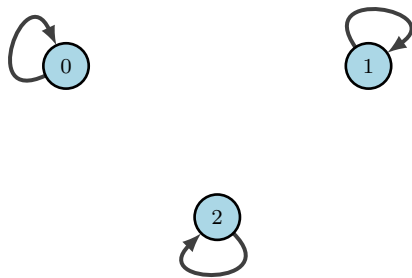
$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

กรณีที่ 1 : $A = \{0\}$ จะได้ว่าไคกราฟเคย์เลย์ $Cay(X, A)$ ประกอบด้วย

$$V(Cay(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X \text{ และ}$$

$$E(Cay(X, A)) = \{(0, 0 * 0), (1, 1 * 0), (2, 2 * 0)\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$$

แสดงดังรูป

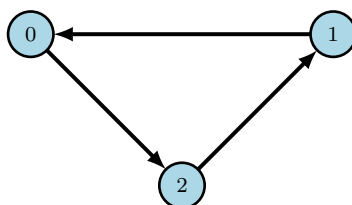


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 3$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 2 : $A = \{1\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 1), (1, 1 * 1), (2, 2 * 1)\} = \{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\}$$

แสดงดังรูป

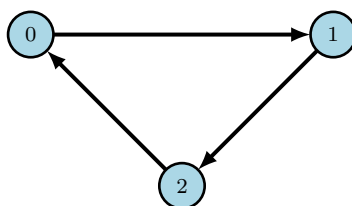


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 1$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 3 : $A = \{2\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 2), (1, 1 * 2), (2, 2 * 2)\} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$$

แสดงดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 1$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

ตัวอย่าง 3.8 (ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 1)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ โดยมี $*$ กำหนดไว้ดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

กรณีที่ 1 : $A = \{0\}$ แล้ว

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X \text{ และ}$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 0), (1, 1 * 0), (2, 2 * 0), (3, 3 * 0)\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

แสดงได้ดังรูป

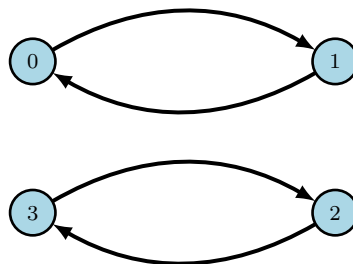


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 4$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 2 : $A = \{1\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 1), (1, 1 * 1), (2, 2 * 1), (3, 3 * 1)\} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 3 : $A = \{2\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 2), (1, 1 * 2), (2, 2 * 2), (3, 3 * 2)\} = \{(0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 4 : $A = \{3\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 3), (1, 1 * 3), (2, 2 * 3), (3, 3 * 3)\} = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

ตัวอย่าง 3.9 (ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 2)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ โดยมี $*$ กำหนดไว้ดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0	2	3
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

กรณีที่ 1 : $A = \{0\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 0), (1, 1 * 0), (2, 2 * 0), (3, 3 * 0)\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

แสดงได้ดังรูป

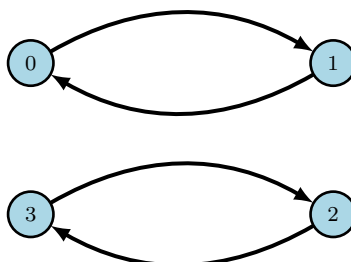


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 4$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 2 : $A = \{1\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 1), (1, 1 * 1), (2, 2 * 1), (3, 3 * 1)\} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 3 : $A = \{2\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X$

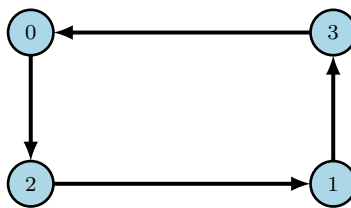
$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 2), (1, 1 * 2), (2, 2 * 2), (3, 3 * 2)\} = \{(0, 3), (1, 2), (2, 0), (3, 1)\}$
แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 4 : $A = \{3\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 3), (1, 1 * 3), (2, 2 * 3), (3, 3 * 3)\} = \{(0, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 0)\}$
แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

ตัวอย่าง 3.10 ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 3)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ โดยมี $*$ กำหนดไว้ดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

กรณีที่ 1 : $A = \{0\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 0), (1, 1 * 0), (2, 2 * 0), (3, 3 * 0)\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

แสดงได้ดังรูป

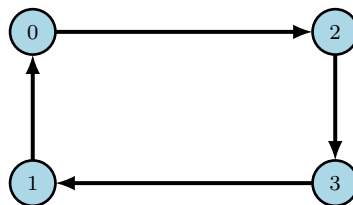


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 4$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 2 : $A = \{1\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 1), (1, 1 * 1), (2, 2 * 1), (3, 3 * 1)\} = \{(0, 2), (1, 0), (2, 3), (3, 1)\}$$

แสดงได้ดังรูป

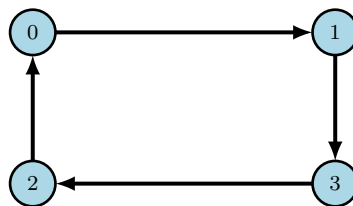


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 3 : $A = \{2\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 2), (1, 1 * 2), (2, 2 * 2), (3, 3 * 2)\} = \{(0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 2)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 4 : $A = \{3\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 3), (1, 1 * 3), (2, 2 * 3), (3, 3 * 3)\} = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

ตัวอย่าง 3.11 (ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว แบบที่ 4)

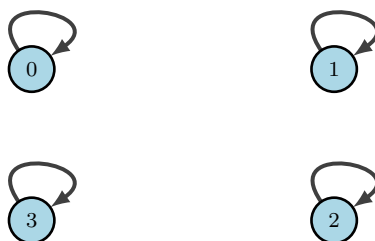
ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ โดยมี $*$ กำหนดไว้ดังนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

กรณีที่ 1 : $A = \{0\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 0), (1, 1 * 0), (2, 2 * 0), (3, 3 * 0)\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

แสดงได้ดังรูป

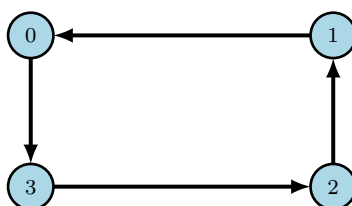


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 4$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 2 : $A = \{1\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 1), (1, 1 * 1), (2, 2 * 1), (3, 3 * 1)\} = \{(0, 3), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 3 : $A = \{2\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 2), (1, 1 * 2), (2, 2 * 2), (3, 3 * 2)\} = \{(0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1)\}$$

แสดงได้ดังรูป

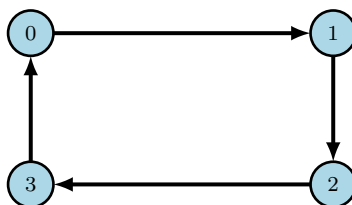


ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

กรณีที่ 4 : $A = \{3\}$ แล้ว $V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0 * 3), (1, 1 * 3), (2, 2 * 3), (3, 3 * 3)\} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ และสำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $\vec{d}(x) = 1$ และ $\overleftarrow{d}(x) = 1$

ข้อสังเกต 3.12 จากตัวอย่าง 3.6-3.11 จะได้ว่าไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว โดยที่ $|A| = 1$ จะมีส่วนประกอบเป็นวัฏจักร ดังนั้นจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์จึงมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนอิสระของแต่ละวัฏจักรนั้น

3.3 สมบัติบางประการและจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B

ในหัวข้อนี้เราได้ผลลัพธ์ของจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ในกรณีที่เซตย่อย $A = \{0\}$ และตึกริเข้าและตึกริออกของจุดยอดของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B สำหรับเซตย่อย A ใด ๆ

ทฤษฎีบท 3.13 ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B และให้ A เป็นเซตย่อยของ X โดยที่ $|A| = 1$ จะได้ว่า $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = |X|$ ก็ต่อเมื่อ $A = \{0\}$

บทพิสูจน์: ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B และให้ A เป็นเซตย่อยของ X โดยที่ $|A| = 1$

สมมติว่า $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = |X|$

จะได้ว่า X เป็นเซตอิสระ

จะแสดงว่า $A = \{0\}$

ให้ $a \in A$ และ $x \in X$

จะได้ว่า $(x, x * a) \in E(\text{Cay}(X, A))$

สมมติโดยข้อขัดแย้งว่า $x * a \neq x$

จะได้ว่ามี $y \in X$ โดยที่ $y \neq x$ ซึ่ง $x * a = y$

ดังนั้น $(x, y) \in E(\text{Cay}(X, A))$ จะได้ว่า x และ y ไม่เป็นอิสระต่อกัน

เกิดข้อขัดแย้งเนื่องจาก $x, y \in X$ และ X เป็นเซตอิสระ

สรุปได้ว่า $x * a = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จาก $0 \in X$ ดังนั้น $0 * a = 0$

จากบทตั้ง 2.13 จะได้ว่า $a = 0 \in \{0\}$

ดังนั้น $A \subseteq \{0\}$

จาก $|A| = 1$ จะได้ว่า $A = \{0\}$

ในทางกลับกันสมมติว่า $A = \{0\}$

จะแสดงว่า $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = |X|$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } E(\text{Cay}(X, A)) &= \{(x, x * a) : x \in X\} \\ &= \{(x, x * 0) : x \in X\} \\ &= \{(x, x) : x \in X\} \end{aligned}$$

ให้ $u, v \in X$ โดยที่ $u \neq v$

จะได้ว่า $(u, v) \notin E(\text{Cay}(X, A))$ และ $(v, u) \notin E(\text{Cay}(X, A))$

ดังนั้น u และ v เป็นอิสระต่อกัน

จะได้ว่า X เป็นเซตอิสระ

ดังนั้น $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = |X|$

สรุปได้ว่า $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = |X|$ ก็ต่อเมื่อ $A = \{0\}$ □

ทฤษฎีบท 3.14 ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B และให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะได้ว่า $\overleftarrow{d}(x) \leq |A|$ และ $\overrightarrow{d}(x) \leq |A|$ สำหรับทุก $x \in V(\text{Cay}(X, A))$

บทพิสูจน์: ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B และให้ A เป็นเซตย่อยของ X

ให้ $x \in V(\text{Cay}(X, A))$ และสมมติว่า $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq X$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \leq |X|$

จะแสดงว่า $\overrightarrow{d}(x) \leq |A|$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d}(x) &= \left| \{y \in X : (y, x) \in E(\text{Cay}(X, A))\} \right| \\ &= \left| \{y \in X : y * a_i = x \text{ สำหรับบาง } a_i \in A \text{ เมื่อ } i = 1, 2, \dots, n\} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n \{y \in X : y * a_i = x\} \right| \end{aligned}$$

ให้ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $E_i = \{y \in X : y * a_i = x\}$

จะแสดงว่า $E_i \neq \emptyset$

สมมติโดยข้อขัดแย้งว่า $E_i = \emptyset$ นั่นคือ $y * a_i \neq x$ สำหรับทุก $y \in X$

จะได้ว่า x ไม่อยู่ในหลัก a_i ในตารางการดำเนินการทวิภาค

เกิดข้อขัดแย้งกับข้อสังเกต 2.12 (ii) เนื่องจากในแต่ละหลักต้องมีสมาชิกใน X ครบทุกตัว

ดังนั้น $E_i \neq \emptyset$

ต่อไปจะแสดงว่า E_i มีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น

สมมติว่ามี $y, z \in X$ ซึ่ง $y * a_i = x$ และ $z * a_i = x$

จะได้ว่า $y * a_i = z * a_i$

จากบทตั้ง 2.11 จะได้ว่า $y = z$

ดังนั้น E_i มีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น

จะได้ว่า E_i ไม่เป็นเซตว่างและมีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{ดังนั้น } \vec{d}(x) = \left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |E_i| = n = |A|$$

สรุปได้ว่า $\vec{d}(x) \leq |A|$

ต่อไปจะแสดงว่า $\overleftarrow{d}(x) \leq |A|$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \overleftarrow{d}(x) &= \left| \left\{ y \in X : (x, y) \in E(\text{Cay}(X, A)) \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ y \in X : x * a_i = y \text{ สำหรับบาง } a_i \in A \text{ เมื่อ } i = 1, 2, \dots, n \right\} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n \left\{ y \in X : x * a_i = y \right\} \right| \end{aligned}$$

ให้ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $F_i = \{y \in X : x * a_i = y\}$

จะเห็นได้ชัดว่า $F_i = \{x * a_i\}$ ไม่เป็นเซตว่างและมีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น

$$\text{ดังนั้น } \overleftarrow{d}(x) = \left| \bigcup_{i=1}^n F_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |F_i| = n = |A|$$

สรุปได้ว่า $\overleftarrow{d}(x) \leq |A|$

□

ในกรณีที่ X เป็นพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว เราจะได้ผลลัพธ์สำหรับดีกรีเข้าและดีกรีออกของจุดยอดของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ดังแสดงในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.15 ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B โดยที่ $|X| \leq 4$ และให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะได้ว่า

$$\overleftarrow{d}(x) = \overrightarrow{d}(x) = |A| \text{ สำหรับทุก } x \in V(\text{Cay}(X, A))$$

บทพิสูจน์: ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B โดยที่ $|X| \leq 4$ และให้ A เป็นเซตย่อยของ X

ให้ $x \in V(\text{Cay}(X, A))$ และสมมติว่า $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq X$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \leq |X|$

จะแสดงว่า $\overrightarrow{d}(x) = |A|$

จากพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.14 พิจารณาเซต $E_i = \{y \in X : y * a_i = x\}$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

ให้ $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

จะแสดงว่า $E_i \cap E_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

สมมติโดยข้อขัดแย้งว่า $E_i \cap E_j \neq \emptyset$

จะได้ว่ามี $y \in X$ ซึ่ง $y \in E_i \cap E_j$

นั่นคือ $y * a_i = x = y * a_j$

จากข้อสังเกต 3.5 จะได้ว่า $a_i = a_j$ เกิดข้อขัดแย้งเนื่องจาก $a_i \neq a_j$

ดังนั้น $E_i \cap E_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

จากพิสัยของทฤษฎีบท 3.14 และจาก $E_i \cap E_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

$$\text{จะได้ว่า } \vec{d}(x) = \left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| = \sum_{i=1}^n |E_i| = n = |A|$$

$$\text{สรุปได้ว่า } \vec{d}(x) = |A|$$

$$\text{ต่อไปจะแสดงว่า } \overleftarrow{d}(x) = |A|$$

จากพิสัยของทฤษฎีบท 3.14 พิจารณาเซต $F_i = \{y \in X : x * a_i = y\}$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

ให้ $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

จะแสดงว่า $F_i \cap F_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

สมมติโดยข้อขัดแย้งว่า $F_i \cap F_j \neq \emptyset$

จะได้ว่ามี $y \in X$ ซึ่ง $y \in F_i \cap F_j$

นั่นคือ $x * a_i = y = x * a_j$

จากข้อสังเกต 3.5 จะได้ว่า $a_i = a_j$ เกิดข้อขัดแย้งเนื่องจาก $a_i \neq a_j$

ดังนั้น $F_i \cap F_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

จากพิสัยของทฤษฎีบท 3.14 และจาก $F_i \cap F_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

$$\text{จะได้ว่า } \overleftarrow{d}(x) = \left| \bigcup_{i=1}^n F_i \right| = \sum_{i=1}^n |F_i| = n = |A|$$

$$\text{สรุปได้ว่า } \overleftarrow{d}(x) = |A|$$

□

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

การค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษาไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว โดยที่เซตย่อย A ของพีชคณิต B เป็นเซตที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว โดยเราได้หาพีชคณิต B ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัวและแสดงไดกราฟเคย์เลย์ทั้งหมดของพีชคณิต B ดังกล่าว นอกจากนี้เราได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B สำหรับกรณีที่เซตย่อย $A = \{0\}$ และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับดีกรีเข้าและดีกรีออกของไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B สำหรับ A ที่เป็นเซตย่อยใด ๆ

บทตั้ง 4.1 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 1 ตัว)

ให้ $X = \{0\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังตารางต่อไปนี้

$*$	0
0	0

บทตั้ง 4.2 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 2 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

บทตั้ง 4.3 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 3 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

บทตั้ง 4.4 (พีชคณิต B ที่มีสมาชิก 4 ตัว)

ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซต X จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B ก็ต่อเมื่อ $*$ กำหนดดังหนึ่งในตาราง 4 แบบดังนี้

แบบที่ 1

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	3
3	3	2	1	0

แบบที่ 2

*	0	1	2	3
0	0	1	3	2
1	1	0	2	3
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

แบบที่ 3

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

แบบที่ 4

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

ข้อสังเกต 4.5 ถ้า X เป็นพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว จะได้ว่าในแต่ละแถวของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกไม่ซ้ำกัน ดังนั้นในแต่ละแถวของตารางการดำเนินการทวิภาคจะมีสมาชิกใน X ครบทุกตัว นั่นคือสำหรับทุก $x, y, z \in X$ ถ้า $x * y = x * z$ แล้ว $y = z$

ข้อสังเกต 4.6 ไดกราฟเคย์เลย์ของพีชคณิต B ที่มีสมาชิกไม่เกิน 4 ตัว โดยที่ $|A| = 1$ จะมีส่วนประกอบเป็นวัฏจักร ดังนั้นจำนวนอิสระของไดกราฟเคย์เลย์จึงมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนอิสระของแต่ละวัฏจักรนั้น

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B และให้ A เป็นเซตย่อยของ X โดยที่ $|A| = 1$ จะได้ว่า $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = |X|$ ก็ต่อเมื่อ $A = \{0\}$

ทฤษฎีบท 4.8 ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B และให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะได้ว่า $\overleftarrow{d}(x) \leq |A|$ และ $\overrightarrow{d}(x) \leq |A|$ สำหรับทุก $x \in V(\text{Cay}(X, A))$

บทแทรก 4.9 ให้ $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต B โดยที่ $|X| \leq 4$ และให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะได้ว่า $\overleftarrow{d}(x) = \overrightarrow{d}(x) = |A|$ สำหรับทุก $x \in V(\text{Cay}(X, A))$

บรรณานุกรม

- [1] Neggers, J.; Kim, H.S. “On B-algebras.” *Matematički Vesnik*, 54.1-2 (2002): 21-29.
- [2] Limkul, K.; Panma, S. “On the Independence Number of Cayley Digraphs of Clifford Semigroups.” *Mathematics*, 11 (2023): 34-45.

Abstract

In this independent study, we are interested in studying some properties and independent numbers of Cayley digraphs of B -algebras. We find all B -algebras with no more than 4 elements. Then we show that the independent number $\alpha(\text{Cay}(X, A))$ of a Cayley digraph of B -algebras is equal to $|A|$ in the case when $A = \{0\}$. Moreover, we find an upper bound of the in-degree and out-degree of each vertex in Cayley digraphs of B -algebras. In fact, we obtain the equality in the case when the B -algebra contains no more than 4 elements.

Preliminaries

Definition 1 A B -algebra, denoted by $(X, *, 0)$, is a non-empty set with a constant 0 and a binary operation “ $*$ ” on satisfying the following:

For all $x, y, z \in X$,

(i) $x * x = 0$,

(ii) $x * 0 = x$,

(iii) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$

Example 2 Let $X = \{0, 1, 2\}$ be a set with $*$ defined as follows.

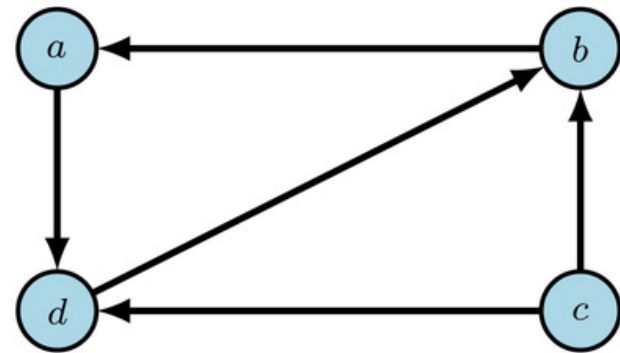
$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

Then $(X, *, 0)$ is a B -algebra.

Definition 3 Let X be a non-empty set, and let $*$ be a binary operation on X . Let A be a subset of X . The *Cayley digraph* of X relative to A , denoted by $\text{Cay}(X, A)$, is defined as the digraph with the vertex set $V(\text{Cay}(X, A)) = X$ and the arc set

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(x, x * a) \mid x \in X, a \in A\}.$$

Example 4 Let $V = \{a, b, c, d\}$ and $E = \{(a, d), (b, a), (c, d), (c, b), (d, b)\}$. Then $D = (V, E)$ is a digraph as illustrated below.



Definition 5 A *directed graph* (digraph) D consists of a non-empty finite set $V(D)$ of elements called *vertices* and a finite set $E(D)$ of ordered pairs of vertices called *arcs*. The set $V(D)$ is called *vertex set* and $E(D)$ is called *arc set* of D . We write $D = (V, E)$ means that V and E are the vertex set and arc set of D , respectively.

Definition 6 Let $(X, *, 0)$ be a digraph. Then

- (i) the *in-degree* of $x \in V(D)$, denoted by $\vec{d}(x)$, is defined as $\vec{d}(x) = |\{y : (y, x) \in E(D)\}|$,
(ii) the *out-degree* of $x \in V(D)$, denoted by $\overleftarrow{d}(x)$, is defined as $\overleftarrow{d}(x) = |\{y : (x, y) \in E(D)\}|$.

Definition 7 Let $D = (V, E)$ be a digraph.

- (i) Let $u, v \in V(D)$ such that $u \neq v$. Then u and v are said to be *independent* if $(u, v) \notin E(D)$ and $(v, u) \notin E(D)$.
(ii) Let S be a non-empty subset of V . Then S is said to be an *independent set* of D if u and v are independent for $u, v \in V(D)$ such that $u \neq v$.

Definition 8 Let $D = (V, E)$ be a digraph. The *independent number* of D , denoted by $\alpha(D)$, is defined as $\alpha(D) = \max \{|S| : S \text{ is an independent set of } D\}$.

Result

Lemma 9 Let X be a non-empty set.

- (i) If $X = \{0, 1\}$, then $(X, *, 0)$ is a B -algebra if and only if $*$ is defined uniquely as follows.

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

- (ii) If $X = \{0, 1, 2\}$, then $(X, *, 0)$ is a B -algebra if and only if $*$ is defined uniquely as follows.

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	2	1

- (iii) If $X = \{0, 1, 2, 3\}$, then $(X, *, 0)$ is a B -algebra if and only if $*$ is defined uniquely as one of the following tables.

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

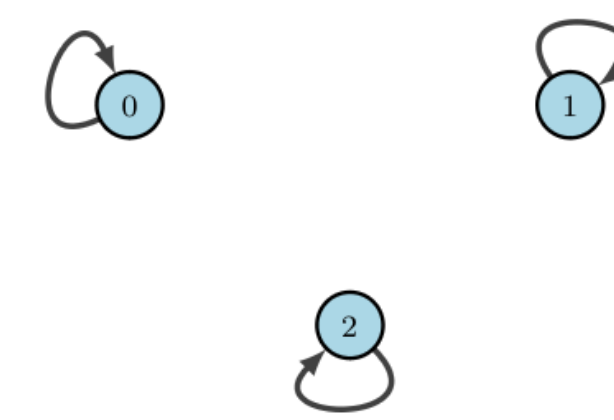
Example 10 Let $X = \{0, 1, 2\}$ be a B -algebra with $*$ defined as the following table:

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Case 1 : If $A = \{0\}$, then $\text{Cay}(X, A)$ consists of

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} \text{ and}$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}.$$

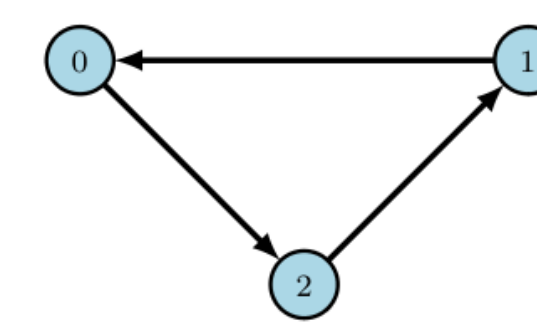


Thus, $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 3$ and $\vec{d}(x) = 1$ and $\overleftarrow{d}(x) = 1$ for all $x \in X$.

Case 2 : If $A = \{1\}$, then $\text{Cay}(X, A)$ consists of

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X \text{ and}$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\}.$$

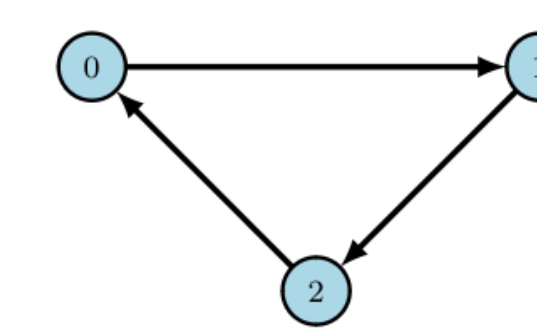


Thus, $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 1$ and $\vec{d}(x) = 1$ and $\overleftarrow{d}(x) = 1$ for all $x \in X$.

Case 3 : If $A = \{2\}$, then $\text{Cay}(X, A)$ consists of

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2\} = X \text{ and}$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}.$$



Thus, $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 1$ and $\vec{d}(x) = 1$ and $\overleftarrow{d}(x) = 1$ for all $x \in X$.

Example 11 Let $X = \{0, 1, 2, 3\}$ be a B -algebra with $*$ defined as the following table:

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Case 1 : If $A = \{0\}$, then $\text{Cay}(X, A)$ consists of

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X \text{ and}$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$$

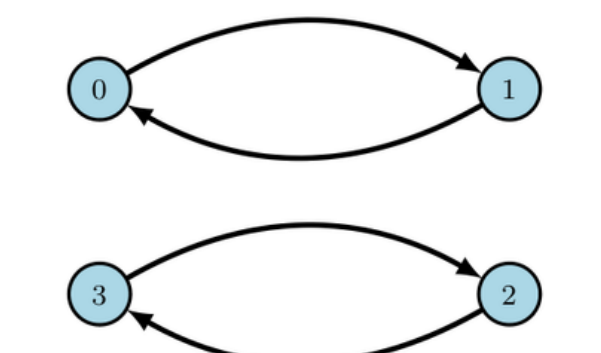


Thus, $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 4$ and $\vec{d}(x) = 1$ and $\overleftarrow{d}(x) = 1$ for all $x \in X$.

Case 2 : If $A = \{1\}$, then $\text{Cay}(X, A)$ consists of

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X \text{ and}$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\}.$$

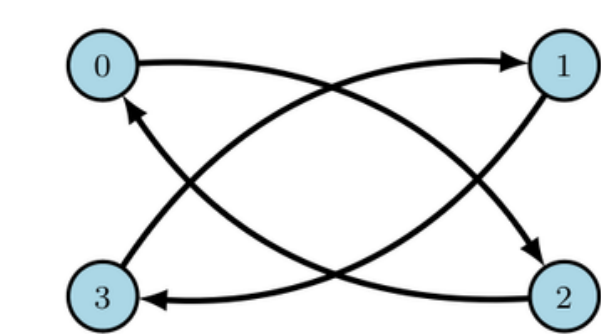


Thus, $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ and $\vec{d}(x) = 1$ and $\overleftarrow{d}(x) = 1$ for all $x \in X$.

Case 3 : If $A = \{2\}$, then $\text{Cay}(X, A)$ consists of

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1)\}.$$

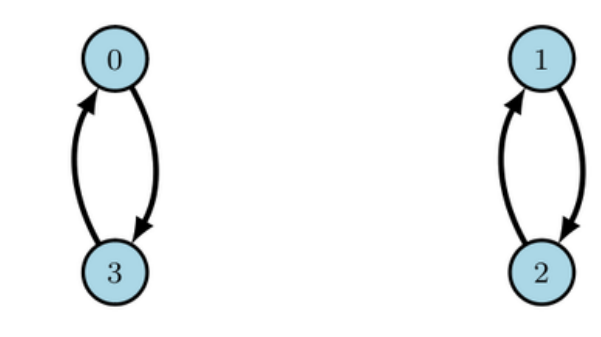


Thus, $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ and $\vec{d}(x) = 1$ and $\overleftarrow{d}(x) = 1$ for all $x \in X$.

Case 4 : If $A = \{3\}$, then $\text{Cay}(X, A)$ consists of

$$V(\text{Cay}(X, A)) = \{0, 1, 2, 3\} = X \text{ and}$$

$$E(\text{Cay}(X, A)) = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}.$$



Thus, $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = 2$ and $\vec{d}(x) = 1$ and $\overleftarrow{d}(x) = 1$ for all $x \in X$.

Theorem 12 Let $(X, *, 0)$ be a B -algebra, and let $A = \{0\}$ be a subset of X . Then $\alpha(\text{Cay}(X, A)) = |A|$.

Theorem 13 Let $(X, *, 0)$ be a B -algebra, and let A be a subset of X . Then $\overleftarrow{d}(x) \leq |A|$ and $\vec{d}(x) \leq |A|$ for all $x \in V(\text{Cay}(X, A))$.

Corollary 14 Let $(X, *, 0)$ be a B -algebra, where $|X| \leq 4$, and let A be a subset of X . Then $\overleftarrow{d}(x) = \vec{d}(x) = |A|$ for all $x \in V(\text{Cay}(X, A))$.

Reference

- [1] Neggers, J.; Kim, H.S. “On B-algebras.” *Matematički vesnik*, 54.1-2 (2002): 21-29.
[2] Limkul, K.; Panma, S. “On the Independence Number of Cayley Digraphs of Clifford Semigroups.” *Mathematics*, 11 (2023): 34-45.