

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบางชนิดโดยใช้พีชคณิตเชิงเส้น

Integrations of Certain Functions Using Linear Algebra

นายพงศกร กุลประดิษฐ์

รหัสนักศึกษา 620510571

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบางชนิดโดยใช้พีชคณิตเชิงเส้น

Integrations of Certain Functions Using Linear Algebra

นายพงศกร กุลประดิษฐ์

รหัสนักศึกษา 620510571

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบางชนิดโดยใช้พีชคณิตเชิงเส้น

Integrations of Certain Functions Using Linear Algebra

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

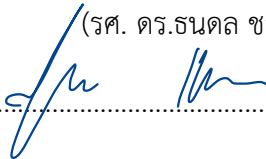
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ



ประธานกรรมการ

(รศ. ดร.ชนดล ชวบ้านเกาะ)



กรรมการ

(ผศ. ดร.สุปรีย์ดี แดงสกุล)

วันที่ 7 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาการค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของบางฟังก์ชันโดยใช้การแปลงเชิงเส้น

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงานตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นายพงศกร กุลประดิษฐ์

หัวข้อ (ภาษาไทย) การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบางชนิดโดยใช้พีชคณิตเชิงเส้น
 (ภาษาอังกฤษ) Integrations of Certain Functions Using Linear Algebra

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นาย พงศกร กุลประดิษฐ์ รหัสนักศึกษา 620510571

ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รศ. ดร.ธนดล ชาวบ้านเกาะ

ชื่อกรรมการสอบ ผศ. ดร.สุปรีย์ดี แดงสกุล

บทคัดย่อ

ในการศึกษาอิสระนี้ เราหาวิธีการใช้พีชคณิตเชิงเส้นเพื่อหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบางประเภท โดยการสร้างการแปลงเมทริกซ์ที่ได้จากการเลือกฐานหลักและปริภูมิเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับประเภทของฟังก์ชันนั้น เราได้วิธีในการเลือกฐานหลักและปริภูมิเวกเตอร์รวมถึงสูตรทั่วไปในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้

Abstract

In this independent study, we investigate how linear algebra can be used to integrate certain types of functions. For each of these function types, we construct a matrix transformation derived from the selection of associative bases and vector spaces. We obtain alternative methods to solve these integrals as well as some integral formulas.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	3
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main results)	10
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	26
บรรณานุกรม	27
ภาคผนวก	28

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

Rogers [1] ได้กล่าวถึงการประยุกต์ใช้พีชคณิตเชิงเส้นในแคลคูลัส โดยมีการกล่าวถึงการหาปริพันธ์โดยการประยุกต์ของการแปลงเชิงเส้นพร้อมตัวอย่างง่าย ๆ ในปี 2005 Sprows [2] กล่าวถึงหลักการนี้เช่นกัน โดยเน้นไปที่แนวคิดในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $e^{2x} \cos(3x)$ ซึ่งปกติแล้วต้องใช้การหาปริพันธ์แบบแยกส่วน

ทั้งนี้เราสามารถหาปริพันธ์ของบางฟังก์ชันได้โดยการสร้างฐาน B และปริภูมิเวกเตอร์ V ที่สอดคล้องและการแปลงเชิงเส้น $T: V \rightarrow V$ โดยนำไปสร้างเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น $[T]_B$ และ $[T]_B^{-1}$

ในการศึกษานี้ เราจะสรุปหลักการของเมทริกซ์การแปลงเชิงเส้นที่นำมาประยุกต์ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบางรูปแบบ เช่น $x^k e^{nx}$, $x \cos(kx)$, $x \sin(kx)$, $e^{nx} \cos(kx)$, และ $x e^{nx} \cos(kx)$ ซึ่งโดยปกติแล้วฟังก์ชันเหล่านี้ต้องใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบแยกส่วน

วัตถุประสงค์ของการค้นคว้าอิสระ (objective)

1. เพื่อศึกษาและสร้างการแปลงเชิงเส้นและเมทริกซ์การแปลงเชิงเส้น
2. เพื่อใช้เมทริกซ์ที่ได้ในการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันบางรูปแบบ

ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

การค้นคว้ามุ่งหมายเพื่อใช้ในการหาปริพันธ์ของบางฟังก์ชันบางรูปแบบที่ซับซ้อนให้สามารถแก้ไขปัญหาดังกล่าวมากยิ่งขึ้นโดยใช้ความรู้จากพีชคณิตเชิงเส้น

วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานพีชคณิตเชิงเส้น เช่น การแปลงเชิงเส้นและเมทริกซ์
2. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. ตั้งสมมติฐาน และทำการพิสูจน์โดยใช้การแปลงเชิงเส้นในการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของรูปแบบฟังก์ชัน
4. เขียนรูปเล่ม และตรวจสอบความถูกต้อง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ (expected benefits and application)

1. ได้ทบทวนความรู้จากพืชชนิดเชิงเส้น และแคลคูลัส และสามารถนำไปประยุกต์ใช้
2. ได้ทราบสมบัติต่าง ๆ ในการสร้างการแปลงเชิงเส้นและเมทริกซ์ การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชัน
บางรูปแบบ

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

นิยาม 2.1 ให้ V เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง พร้อมด้วยการดำเนินการ 2 ชนิด คือ การบวก $\oplus$ ระหว่างสมาชิกของ V และการคูณ $\odot$ ระหว่างสมาชิกของ **สนาม (field) $\mathbb{F}$** กับสมาชิกของ V เรียก V พร้อมด้วยการดำเนินการทั้งสองว่า **ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space)** ถ้าการดำเนินการทั้งสองชนิด สอดคล้องกับสมบัติ 10 ข้อ ต่อไปนี้ สำหรับสมาชิก u, v, w ใด ๆ ใน V และสมาชิก a, b ใด ๆ ใน $\mathbb{F}$

1. $u \oplus v \in V$
2. $u \oplus v = v \oplus u$
3. $u \oplus (v \oplus w) = (v \oplus u) \oplus w$
4. มีสมาชิก $\vec{0}_v$ ใน V ซึ่ง $\vec{0}_v$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก u ใน V
5. สำหรับแต่ละสมาชิก u ใน V มีสมาชิกใน V เพียงตัวเดียวเท่านั้น เขียนแทนด้วย $-u$ โดยที่ $\vec{0}_v$
6. $a \odot u \in V$
7. $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$
8. $(a \oplus b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u)$
9. $ab \odot u = a \odot (b \odot u)$
10. มีสมาชิก 1 ใน $\mathbb{F}$ ซึ่ง $1 \odot u = u$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $u \in V$

เราเรียกสมาชิก $v \in V$ ว่า **เวกเตอร์ (vector)** ใน V และสมาชิก a ในสนาม ว่า **สเกลาร์ (scalar)** สำหรับการศึกษาครั้งนี้ เราพิจารณาปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ เท่านั้น

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทนการบวก $\oplus$ ด้วย $+$ สำหรับ $a \odot u$ เราจะเขียนแทนด้วย au สำหรับทุกเวกเตอร์ u และ $a \in \mathbb{F}$

นิยาม 2.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ S เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ V เรียก S ว่าเป็น **ปริภูมิย่อย (subspace)** ของ V ก็ต่อเมื่อ S เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 2.3 [3] กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ S เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ V จะได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $u \in S$ และ $v \in S$ แล้ว $u + v \in S$
2. ถ้า $u \in S$ และ $a \in \mathbb{F}$ แล้ว $au \in S$

ตัวอย่าง 2.4 ตัวอย่างของปริภูมิเวกเตอร์

1. $\mathbb{R}^n$ โดยใช้การบวกของเวกเตอร์ และการคูณด้วยสเกลาร์ตามปกติ
2. $P_n = \{p \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}\}$

$$C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง}\}$$

$$C^{(n)}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ สามารถหาอนุพันธ์อันดับที่ } n \text{ ได้ และ } f^{(n)} \text{ ต่อเนื่อง}\}$$

ภายใต้การบวกแบบทีละจุด (pointwise addition) และการคูณด้วยสเกลาร์กับฟังก์ชันตามปกติจะได้ว่า

$$P_n \text{ เป็นปริภูมิย่อยของ } C^{(n)}(\mathbb{R}) \text{ เป็นปริภูมิย่อยของ } C(\mathbb{R})$$

□

นิยาม 2.5 ให้ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V จะกล่าวว่า เวกเตอร์ v ใน V เป็น **ผลรวมเชิงเส้น (linear combination)** ของ S ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ ที่ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ที่ทำให้

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

เรานิยามสัญลักษณ์ $\text{Span}\{S\} = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{F}\}$ ดังนั้น $\text{Span}\{S\}$ เป็นเซตย่อยของ V ยิ่งไปกว่านั้น $\text{Span}\{S\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

นิยาม 2.6 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V จะเรียก S ว่า **แผ่ทั่ว (span) V** ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เวกเตอร์ใน V เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S นั่นคือ $\text{Span}\{S\} = V$

นิยาม 2.7 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V และ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นสเกลาร์ใด ๆ

ถ้า $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$ แล้ว $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ จะเรียก S ว่าเป็น **อิสระเชิงเส้น (linearly independent)**

ถ้า $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$ และมีจำนวนเต็ม i บางตัวที่ $a_i \neq 0$ แล้วจะเรียก S ว่า **ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent)**

นิยาม 2.8 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V จะเรียก B ว่าเป็น **ฐาน (basis)** ของ V ก็ต่อเมื่อ

1. B แผ่ทั่ว V
2. B เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.9 ตัวอย่างฐานของปริภูมิเวกเตอร์

1. $\{1, x, x^2\}$ เป็นฐานของ P_2
2. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ เป็นฐานของ $\mathbb{R}^2$

□

นิยาม 2.10 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด แล้ว **มิติ (dimension)** ของ V เขียนแทนด้วย $\dim(V)$ หมายถึง จำนวนเวกเตอร์ที่อยู่ในฐานของ V สำหรับกรณีที่ $V = \{\vec{0}\}$ จะนิยามให้ $\dim(V) = 0$ และจะเรียกปริภูมิเวกเตอร์ V ว่ามี **มิติจำกัด (finite dimension)** ถ้า $\dim(V) = n$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 2.11 [3] ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ B เป็นฐานของ V แล้วทุก $v \in V$ จะสามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกใน B ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

นิยาม 2.12 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นฐานของ V สำหรับ $v \in V$ ถ้า $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$ เมื่อ $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ แล้ว **เวกเตอร์พิกัดของ V ที่สอดคล้องกับฐาน B** (coordinate vector of v with respect to the basis B) เขียนแทนด้วย $[v]_B$ นิยามโดย

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.13 พิจารณาฐาน $\{1, x, x^2\}$ สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ P_2 จะได้ว่า

$$[3x^2 - x]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

□

นิยาม 2.14 ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์บน $\mathbb{F}$ เรียกฟังก์ชัน $T:V \rightarrow W$ ว่าเป็น **การแปลงเชิงเส้น (linear transformation)** จาก V ไปยัง W ถ้า T สอดคล้องกับสมบัติ 2 ข้อ ต่อไปนี้

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ สำหรับทุกเวกเตอร์ u และ v ใน V
2. $T(cv) = cT(v)$ สำหรับทุกเวกเตอร์ v ใน V และทุก $c \in \mathbb{F}$

ตัวอย่าง 2.15 ให้ $n \in \mathbb{N}$ นิยาม $T:C^{(n)}(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ โดย $T(f) = f^{(n)}$ สำหรับทุก $f \in C^{(n)}(\mathbb{R})$ แล้ว T เป็นการแปลงเชิงเส้น

พิสูจน์ พิจารณา $T(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)^{(n)} = (f_1)^{(n)} + (f_2)^{(n)} = T(f_1) + T(f_2)$ สำหรับทุก f_1 และ f_2 ใน $C^{(n)}(\mathbb{R})$ และ $T(cf) = (cf)^{(n)} = cf^{(n)} = cT(f)$ สำหรับทุก $f \in C^{(n)}(\mathbb{R})$ และทุกสเกลาร์ c ดังนั้น T เป็นการแปลงเชิงเส้น □

นิยาม 2.16 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นฐานของ V ถ้า $T:V \rightarrow V$ เป็นการแปลงเชิงเส้นแล้ว **เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B (matrix representation of T with respect to basis B)** กำหนดโดย

$$[T]_B = [[T(v_1)]_B : [T(v_2)]_B : \dots : [T(v_n)]_B]$$

ทฤษฎีบท 2.17 [3] ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นฐานของ V

ถ้า $T:V \rightarrow V$ เป็นการแปลงเชิงเส้นแล้ว $[T]_B [v]_B = [T(v)]_B$ สำหรับทุก v ใน V

นิยาม 2.18 ให้ $T:V \rightarrow W$ และ T เป็นการแปลงเชิงเส้น ถ้ามี $S:W \rightarrow V$ โดยที่ $S \circ T = I_V$ และ $T \circ S = I_W$ เมื่อ $I_V:V \rightarrow V$ และ $I_W:W \rightarrow W$ แล้วจะเรียก S ว่า**ตัวผกผันของ T (the inverse of T)** ซึ่งจะเขียนแทน S ด้วย T^{-1}

ทฤษฎีบท 2.19 [3] ถ้า $T:V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ T เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้ว T^{-1} เป็นการแปลงเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 2.20 [3] ถ้า $T:V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว T หาตัวผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ T เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ทฤษฎีบท 2.21 [3] ให้ $T: V \rightarrow V$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ B เป็นฐานของ V จะได้ว่า

1. T หาตัวผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ $[T]_B$ มีเมทริกซ์ผกผัน

2. ถ้า T^{-1} หาค่าได้แล้ว $([T]_B)^{-1} = [T^{-1}]_B$

ตัวอย่าง 2.22 กำหนดการแปลงเชิงเส้น $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ นิยามโดย

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2) \text{ สำหรับทุก } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ และ } B = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

เป็นฐานของ $\mathbb{R}^2$

$$\text{เนื่องจาก } T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2)$$

$$\text{จะได้ว่า } T(1, 1) = (2, 2) \text{ และ } T(1, 2) = (3, 6)$$

$$\text{ให้ } [T(1, 1)]_B = [(2, 2)]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{พิจารณา } (2, 2) = a_1(1, 1) + a_2(1, 2)$$

$$= (a_1 + a_2, a_1 + 2a_2)$$

$$\text{จะได้ว่า } a_1 + a_2 = 2 \text{ และ } a_1 + 2a_2 = 2$$

$$\text{จากการแก้ระบบสมการ จะได้ว่า ผลเฉลย คือ } a_1 = 2 \text{ และ } a_2 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } [T(1, 1)]_B = [(2, 2)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า}$$

$$[T(1, 2)]_B = [(3, 6)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น } T \text{ ที่สอดคล้องกับฐาน } B \text{ คือ}$$

$$[T]_B = [[T(1, 1)]_B : [T(1, 2)]_B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$([T]_B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.21 จะได้ว่า

$$[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

ตัวอย่าง 2.23 ให้ $T: P_n \rightarrow P_n$ นิยามโดย $T(p(x)) = p'(x)$ สำหรับทุก $p(x) \in P_n$ แล้ว

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

เมื่อ $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ เป็นฐานของ P_n

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

ต่อไปจะหาเมทริกซ์ ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B

พิจารณา

$$T(1) = 0, \quad T(x) = 1, \quad T(x^2) = 2x, \dots, \quad T(x^n) = nx^{n-1}$$

นั่นคือ

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}, \quad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}, \quad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}, \dots, \quad [T(x^n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \\ 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B คือ

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T(1)]_B & [T(x)]_B & [T(x^2)]_B & \cdots & [T(x^n)]_B \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

□

ตัวอย่าง 2.24 การหาอนุพันธ์ของ $3 + 7x^2$ โดยใช้เมทริกซ์ $[T]_B$

จาก ตัวอย่าง 2.23 จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} [T(3 + 7x^2)]_B &= [T]_B [3 + 7x^2]_B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}(3 + 7x^2) = T(3 + 7x^2) = (0)1 + (14)x + (0)x^2 = 14x$$

□

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main results)

ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีการปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการประยุกต์ความรู้จากวิชาพีชคณิตเชิงเส้น โดยเริ่มจากฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\int x^k e^{nx} dx$ เมื่อ $k, n \in \mathbb{N}$ โดยปกติแล้วการจะหาค่าต้องใช้วิธีการหาปริพันธ์แบบแยกส่วน k ครั้ง แต่ถ้าหากใช้ทฤษฎีบทที่ศึกษาต่อไปนี้ จะสามารถหาค่าของปริพันธ์ของฟังก์ชันได้โดยง่ายโดยในที่นี้ เราจะศึกษากรณี $k = 2$

บทตั้ง 3.1 สำหรับทุก $0 \neq n \in \mathbb{R}$ ให้ $V = \text{Span}\{B\}$ เมื่อ $B = \{e^{nx}, xe^{nx}, x^2e^{nx}\}$ และนิยามการแปลงเชิงเส้น $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$ แล้ว

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 2 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

พิสูจน์ เราสามารถตรวจสอบได้ว่า B เป็นอิสระเชิงเส้น ซึ่งทำให้ได้ว่า B เป็นฐานของ V

ต่อไปจะหาเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B

พิจารณา

$$T(e^{nx}) = ne^{nx}$$

$$T(xe^{nx}) = nxe^{nx} + e^{nx}$$

$$T(x^2e^{nx}) = nx^2e^{nx} + 2xe^{nx}$$

นั่นคือ

$$[T(e^{nx})]_B = \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(xe^{nx})]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ 0 \end{bmatrix}, [T(x^2e^{nx})]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ n \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B คือ

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T(e^{nx})]_B & [T(xe^{nx})]_B & [T(x^2e^{nx})]_B \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 2 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.2 การหาอนุพันธ์ของ $3e^{5x} - 6xe^{5x} + 7x^2e^{5x}$ โดยใช้บทตั้ง 3.1

จากบทตั้ง 3.1 จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} [T(3e^{5x} - 6xe^{5x} + 7x^2e^{5x})]_B &= [T]_B [3e^{5x} - 6xe^{5x} + 7x^2e^{5x}]_B \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -16 \\ 35 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3e^{5x} - 6xe^{5x} + 7x^2e^{5x}) &= T(3e^{5x} - 6xe^{5x} + 7x^2e^{5x}) \\ &= 9e^{5x} - 16xe^{5x} + 35x^2e^{5x} \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.3 สำหรับทุก $0 \neq n \in \mathbb{R}$ และ $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\int ae^{nx} + bxe^{nx} + cx^2e^{nx} dx = \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} + \frac{2c}{n^3}\right)e^{nx} + \left(\frac{b}{n} - \frac{2c}{n^2}\right)xe^{nx} + \left(\frac{c}{n}\right)x^2e^{nx} + C$$

พิสูจน์ เราจะสร้างปริภูมิเวกเตอร์ V และฐาน B ดังนี้

ให้ $B = \{e^{nx}, xe^{nx}, x^2e^{nx}\}$ และ $V = \text{Span}\{B\}$

จากบทตั้ง 3.1 จะได้ว่า B เป็นฐานของ V

พิจารณาการแปลงเชิงเส้น $T: V \rightarrow V$ นิยามโดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$

จากบทตั้ง 3.1 จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 2 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det[T]_B \neq 0$

ดังนั้น

$$[T]_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & -\frac{1}{n^2} & \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} & -\frac{2}{n^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.21 จะได้ว่า $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} [T^{-1}(ae^{nx} + bxe^{nx} + cx^2e^{nx})]_B &= [T^{-1}]_B [(ae^{nx} + bxe^{nx} + cx^2e^{nx})]_B = [T]_B^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} + \frac{2c}{n^3} \\ \frac{b}{n} - \frac{2c}{n^2} \\ \frac{c}{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$T^{-1}(ae^{nx} + bxe^{nx} + cx^2e^{nx}) = \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} + \frac{2c}{n^3}\right)e^{nx} + \left(\frac{b}{n} - \frac{2c}{n^2}\right)xe^{nx} + \left(\frac{c}{n}\right)x^2e^{nx}$$

โดยปกติแล้ว การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตนั้น เราต้องบวกค่าคงที่ C ทางด้านขวามือ ซึ่งในที่นี้เราไม่สามารถทำได้ เพราะจะทำให้ T^{-1} ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

เราจะบวกค่าคงที่ C ในการเขียนคำตอบสุดท้ายดังนี้

$$\int ae^{nx} + bxe^{nx} + cx^2e^{nx} dx = \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} + \frac{2c}{n^3}\right)e^{nx} + \left(\frac{b}{n} - \frac{2c}{n^2}\right)xe^{nx} + \left(\frac{c}{n}\right)x^2e^{nx} + C \quad \square$$

ตัวอย่าง 3.4 การหาปริพันธ์ของ $\int 4e^{2x} + 3xe^{2x} + 5x^2e^{2x} dx$

โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int 4e^{2x} + 3xe^{2x} + 5x^2e^{2x} dx &= \left(\frac{4}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{2(5)}{2^3}\right)e^{2x} + \left(\frac{3}{2} - \frac{2(5)}{2^2}\right)xe^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)x^2e^{2x} \\ &= \left(\frac{16-6+10}{8}\right)e^{2x} + \left(\frac{6-10}{4}\right)xe^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)x^2e^{2x} \\ &= \frac{5e^{2x} - 2xe^{2x} + 5x^2e^{2x}}{2} + C \quad \square \end{aligned}$$

สำหรับกรณี $\int x^k e^{nx} dx$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนเต็ม k, n โดยที่ $k \geq 0, n \geq 1$ ให้ $V = \text{Span}\{B\}$ เมื่อ

$B = \{e^{nx}, xe^{nx}, x^2e^{nx}, \dots, x^k e^{nx}\}$ และนิยาม $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$ แล้ว

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 4 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}_{(k+1) \times (k+1)}$$

ต่อไปเราพิจารณาฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $x \cos(kx)$ และ $x \sin(kx)$ เมื่อ $0 \neq k \in \mathbb{R}$

บทตั้ง 3.5 สำหรับ $0 \neq k \in \mathbb{R}$ ให้ $V = \text{Span}\{B\}$ เมื่อ $B = \{\sin kx, \cos kx, x \sin kx, x \cos kx\}$ และนิยาม $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$ แล้ว

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

พิสูจน์ ก่อนอื่นเราจะแสดงว่า B เป็นฐานของ V

$$\text{ให้ } a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \text{ ซึ่ง } a_1 \sin kx + a_2 \cos kx + a_3 x \sin kx + a_4 x \cos kx = \vec{0} \quad (1)$$

เลือก $x = 0$ จะได้ว่า $a_2 = 0$

พิจารณา

$$a_1 \sin kx + a_3 x \sin kx + a_4 x \cos kx = \vec{0} \quad (2)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ตลอดสมการ (2) จะได้ว่า

$$a_1 k \cos kx + a_3 (kx \cos kx + \sin kx) + a_4 (-kx \sin kx + \cos kx) = \vec{0} \quad (3)$$

เลือก $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2k}$, $x = \frac{\pi}{k}$ แทนใน (3) ตามลำดับ จะได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$a_1 k + a_4 = 0$$

$$a_3 - a_4 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$-ka_1 - a_3\pi - a_4 = 0$$

ซึ่งเมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นนี้แล้วจะได้ว่า

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \text{ ดังนั้น } B \text{ เป็นอิสระเชิงเส้น}$$

จะได้ว่า B เป็นฐานของ V

จากนิยาม $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$

จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

ต่อไปจะหาเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B

พิจารณา

$$T(\sin kx) = k \cos kx$$

$$T(\cos kx) = -k \sin kx$$

$$T(x \sin kx) = kx \cos kx + \sin kx$$

$$T(x \cos kx) = -kx \sin kx + \cos kx$$

จะได้ว่า

$$[T(\sin kx)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(\cos kx)]_B = \begin{bmatrix} -k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(x \sin kx)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \text{ และ } [T(x \cos kx)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -k \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B คือ

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T(\sin kx)]_B & [T(\cos kx)]_B & [T(x \sin kx)]_B & [T(x \cos kx)]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

□

ตัวอย่าง 3.6 การหาอนุพันธ์ของ $x \cos(6x)$ โดยการประยุกต์ใช้บทตั้ง 3.5

โดย ทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} [T(x \cos(6x))]_B &= [T]_B [x \cos(6x)]_B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x \cos(6x)) &= T(x \cos(6x)) = (0)\sin(6x) + (1)\cos(6x) + (-6)x\sin(6x) + (0)x\cos(6x) \\ &= \cos(6x) - 6x\sin(6x)\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.7 สำหรับ $0 \neq k \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\int x \cos kx dx = \frac{1}{k^2} \cos kx + \frac{1}{k} x \sin kx + C$$

$$\int x \sin kx dx = \frac{1}{k^2} \sin kx - \frac{1}{k} x \cos kx + C$$

พิสูจน์ เราจะสร้างปริภูมิเวกเตอร์ V และฐาน B ดังนี้

ให้ $B = \{\sin kx, \cos kx, x \sin kx, x \cos kx\}$ และ $V = \text{Span}\{B\}$

จากบทตั้ง 3.5 จะได้ว่า B เป็นฐานของ V

ให้ $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$

จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

จากบทตั้ง 3.5 จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det[T]_B \neq 0$

ดังนั้น

$$[T]_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k^2} & 0 \\ -\frac{1}{k} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.21 จะได้ว่า $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$

ดังนั้น

$$[T^{-1}(x \cos kx)]_B = [T^{-1}]_B [(x \cos kx)]_B = [T]_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$T^{-1}(x \cos kx) = \frac{1}{k^2} \cos kx + \frac{1}{k} x \sin kx$$

นั่นคือ

$$\int x \cos kx dx = \frac{1}{k^2} \cos kx + \frac{1}{k} x \sin kx + C$$

สำหรับกรณี $\int x \sin kx dx$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

□

ตัวอย่าง 3.8 การหาปริพันธ์ของ $\int x \cos(5x) dx$

โดยทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int x \cos(5x) dx &= \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \frac{1}{5} x \sin(5x) + C \\ &= \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{5} x \sin(5x) + C \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะหาค่าของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $e^{nx} \cos(kx)$ และ $e^{nx} \sin(kx)$ เมื่อ $n, k \in \mathbb{Z}$

โดยการประยุกต์ความรู้จากวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

บทตั้ง 3.9 สำหรับทุก $n, k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง n และ k ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ให้ $V = \text{Span}\{B\}$ เมื่อ $B = \{e^{nx} \sin kx, e^{nx} \cos kx\}$ และนิยามการแปลงเชิงเส้น $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$ แล้ว

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & -k \\ k & n \end{bmatrix}$$

พิสูจน์ ก่อนอื่นเราจะแสดงว่า B เป็นฐานของ V

ให้ $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a_1 e^{nx} \sin kx + a_2 e^{nx} \cos kx = \vec{0}$

เลือก $x = 0$ และ $x = \frac{\pi}{2k}$ ตามลำดับ จะได้ระบบสมการเชิงเส้น $a_2 = 0$ และ $a_1 e^{\frac{n\pi}{2k}} = 0$ เนื่องจาก $e^{\frac{n\pi}{2k}} > 0$

จะได้ว่า $a_1 = a_2 = 0$ ดังนั้น B เป็นอิสระเชิงเส้น

และเนื่องจาก $V = \text{Span}\{B\}$

นั่นคือ B เป็นฐานของ V

ต่อไปจะหาเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B

พิจารณา

$$T(e^{nx} \sin kx) = ne^{nx} \sin kx + ke^{nx} \cos kx$$

$$T(e^{nx} \cos kx) = -ke^{nx} \sin kx + ne^{nx} \cos kx$$

จะได้ว่า

$$\left[T(e^{nx} \sin kx) \right]_B = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \text{ และ } \left[T(e^{nx} \cos kx) \right]_B = \begin{bmatrix} -k \\ n \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B คือ

$$[T]_B = \left[\left[T(e^{nx} \sin kx) \right]_B : \left[T(e^{nx} \cos kx) \right]_B \right] = \begin{bmatrix} n & -k \\ k & n \end{bmatrix}$$

□

ตัวอย่าง 3.10 การหาอนุพันธ์ของ $e^{3x} \cos 4x$ โดยการประยุกต์ใช้บทตั้ง 3.9

จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

โดย ทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} [T(e^{3x} \cos 4x)]_B &= [T]_B [e^{3x} \cos 4x]_B \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}(e^{3x} \cos 4x) = T(e^{3x} \cos 4x) = -4e^{3x} \sin 4x + 3e^{3x} \cos 4x \quad \square$$

โดยปกติแล้วการจะหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้ ต้องใช้วิธีการหาปริพันธ์แบบแยกส่วน แต่ถ้าหากใช้ทฤษฎีบทที่ศึกษาต่อไปนี้จะสามารถหาค่าของปริพันธ์ของฟังก์ชันได้ โดยไม่จำเป็นต้องใช้การหาปริพันธ์แบบแยกส่วน

ทฤษฎีบท 3.11 สำหรับทุก $n, k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง n และ k ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้ว่า

$$\int e^{nx} \cos kx dx = \frac{k}{n^2 + k^2} e^{nx} \sin kx + \frac{n}{n^2 + k^2} e^{nx} \cos kx + C$$

พิสูจน์ เราจะสร้างปริภูมิเวกเตอร์ V และฐาน B ดังนี้

ให้ $B = \{e^{nx} \sin kx, e^{nx} \cos kx\}$ และ $V = \text{Span}\{B\}$

จากบทตั้ง 3.9 จะได้ว่า B เป็นฐานของ V

ให้ $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$

จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

จากบทตั้ง 3.9 จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & -k \\ k & n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det[T]_B \neq 0$

ดังนั้น

$$[T]_B^{-1} = \frac{1}{n^2 + k^2} \begin{bmatrix} n & k \\ -k & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{n^2 + k^2} & \frac{k}{n^2 + k^2} \\ -\frac{k}{n^2 + k^2} & \frac{n}{n^2 + k^2} \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.21 จะได้ว่า $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$

$$[T^{-1}(e^{nx} \cos kx)]_B = [T^{-1}]_B [(e^{nx} \cos kx)]_B = [T]^{-1}_B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{n^2 + k^2} \\ \frac{n}{n^2 + k^2} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$T^{-1}(e^{nx} \cos kx) = \frac{k}{n^2 + k^2} e^{nx} \sin kx + \frac{n}{n^2 + k^2} e^{nx} \cos kx$$

$$\int e^{nx} \cos kx dx = \frac{k}{n^2 + k^2} e^{nx} \sin kx + \frac{n}{n^2 + k^2} e^{nx} \cos kx + C$$

□

ตัวอย่าง 3.12 การหาปริพันธ์ของ $\int e^{4x} \cos 3x dx$

โดยทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า

$$\int e^{4x} \cos 3x dx = -\frac{3}{4^2 + 3^2} e^{4x} \sin 3x + \frac{4}{4^2 + 3^2} e^{4x} \cos 3x + C$$

$$= -\frac{3}{25} e^{4x} \sin(-3x) + \frac{4}{25} e^{4x} \cos(-3x) + C$$

□

สำหรับกรณี $\int e^{nx} \sin kx dx$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 3.13 สำหรับทุก $n, k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง n และ k ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้ว่า

$$\int e^{nx} \sin kx dx = \frac{n}{n^2 + k^2} e^{nx} \sin kx - \frac{k}{n^2 + k^2} e^{nx} \cos kx + C$$

ต่อไปเราจะพิจารณาฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $xe^{nx} \cos kx$, $xe^{nx} \sin kx$ เมื่อ $n, k \in \mathbb{R}$

บทตั้ง 3.14 สำหรับทุก $n, k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง n และ k ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ให้ $V = \text{Span}\{B\}$ เมื่อ $B = \{e^{nx} \sin kx, e^{nx} \cos kx, xe^{nx} \sin kx, xe^{nx} \cos kx\}$ และนิยามการแปลงเชิงเส้น $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$ แล้ว

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & -k & 1 & 0 \\ k & n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n & -k \\ 0 & 0 & k & n \end{bmatrix}$$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่า B เป็นฐานของ V

ให้ $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$a_1(e^{nx} \sin kx) + a_2(e^{nx} \cos kx) + a_3(xe^{nx} \sin kx) + a_4(xe^{nx} \cos kx) = \vec{0} \quad (1)$$

เลือก $x = 0$ จะได้ว่า $a_2 = 0$

พิจารณา

$$a_1(e^{nx} \sin kx) + a_3(xe^{nx} \sin kx) + a_4(xe^{nx} \cos kx) = \vec{0} \quad (2)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ตลอดสมการ (2) จะได้ว่า

$$ka_1 \cos kx + a_3(kx \cos kx + \sin kx) + a_4(-kx \sin kx + \cos kx) = \vec{0} \quad (3)$$

เลือก $x = \frac{\pi}{2k}$, $x = 0$ และ $x = \frac{\pi}{k}$ แทนใน (3) ตามลำดับ จะได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$a_3 - a_4 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$ka_1 + a_4 = 0$$

$$-ka_1 - a_3\pi - a_4 = 0$$

ซึ่งเมื่อหาคำตอบแล้วจะได้ว่า $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

ดังนั้น B เป็นอิสระเชิงเส้น

เนื่องจาก $V = \text{Span}\{B\}$ จะได้ว่า B เป็นฐานของ V

ต่อไปจะหาเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B

พิจารณา

$$T(e^{nx} \sin kx) = ne^{nx} \sin kx + ke^{nx} \cos kx$$

$$T(e^{nx} \cos kx) = -ke^{nx} \sin kx + ne^{nx} \cos kx$$

$$T(xe^{nx} \sin kx) = e^{nx} \sin kx + nxe^{nx} \sin kx + kxe^{nx} \cos kx$$

$$T(xe^{nx} \cos kx) = e^{nx} \cos kx - kxe^{nx} \sin kx + nxe^{nx} \cos kx$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} T(e^{nx} \sin kx) \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} n \\ k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T(e^{nx} \cos kx) \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -k \\ n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T(xe^{nx} \sin kx) \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ n \\ k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} T(xe^{nx} \cos kx) \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -k \\ n \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับฐาน B คือ

$$\begin{aligned} [T]_B &= \left[\begin{bmatrix} T(e^{nx} \sin kx) \end{bmatrix}_B : \begin{bmatrix} T(e^{nx} \cos kx) \end{bmatrix}_B : \begin{bmatrix} T(xe^{nx} \sin kx) \end{bmatrix}_B : \begin{bmatrix} T(xe^{nx} \cos kx) \end{bmatrix}_B \right] \\ &= \begin{bmatrix} n & -k & 1 & 0 \\ k & n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n & -k \\ 0 & 0 & k & n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.15 การหาอนุพันธ์ของ $xe^{3x} \cos 4x$ โดยการประยุกต์บทตั้ง 3.14

จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

โดย ทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} [T(xe^{3x} \cos 4x)]_B &= [T]_B [xe^{3x} \cos 4x]_B \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}(xe^{3x} \cos 4x) = T(xe^{3x} \cos 4x) = e^{3x} \cos 4x - 4xe^{3x} \sin 4x + 3xe^{3x} \cos 4x \quad \square$$

ทฤษฎีบท 3.16 สำหรับทุก $n, k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง n และ k ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int xe^{nx} \cos kx dx &= -\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} e^{nx} \sin kx + \frac{-n^2 + k^2}{(n^2 + k^2)^2} e^{nx} \cos kx + \frac{k}{n^2 + k^2} xe^{nx} \sin kx \\ &\quad + \frac{n}{n^2 + k^2} xe^{nx} \cos kx + C \end{aligned}$$

พิสูจน์ เราจะสร้างปริภูมิเวกเตอร์ V และฐาน B ดังนี้

ให้ $B = \{e^{nx} \sin kx, e^{nx} \cos kx, xe^{nx} \sin kx, xe^{nx} \cos kx\}$ และ $V = \text{Span}\{B\}$

จากบทตั้ง 3.14 จะได้ว่า B เป็นฐานของ V

นิยาม $T: V \rightarrow V$ โดย $T(f) = f'$ สำหรับทุก $f \in V$ จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

จากบทตั้ง 3.14 จะได้ว่า

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & -k & 1 & 0 \\ k & n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n & -k \\ 0 & 0 & k & n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det[T]_B \neq 0$

ดังนั้น

$$[T]_B^{-1} = \frac{1}{(n^2 + k^2)^2} \text{adj}([T]_B) = \begin{bmatrix} n(n^2 + k^2) & k(n^2 + k^2) & -n^2 + k^2 & -2nk \\ -k(n^2 + k^2) & n(n^2 + k^2) & 2nk & -n^2 + k^2 \\ 0 & 0 & n(n^2 + k^2) & k(n^2 + k^2) \\ 0 & 0 & -k(n^2 + k^2) & n(n^2 + k^2) \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.21 จะได้ว่า $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} [T^{-1}(xe^{nx} \cos kx)]_B &= [T^{-1}]_B [(xe^{nx} \cos kx)]_B \\ &= [T]_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \\ \frac{-n^2 + k^2}{(n^2 + k^2)^2} \\ \frac{k}{n^2 + k^2} \\ \frac{n}{n^2 + k^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T^{-1}(xe^{nx} \cos kx) &= -\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} e^{nx} \sin kx + \frac{-n^2 + k^2}{(n^2 + k^2)^2} e^{nx} \cos kx + \frac{k}{n^2 + k^2} xe^{nx} \sin kx \\ &\quad + \frac{n}{n^2 + k^2} xe^{nx} \cos kx \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}\int x e^{nx} \cos kx dx = & -\frac{2nk}{(n^2+k^2)^2} e^{nx} \sin kx + \frac{-n^2+k^2}{(n^2+k^2)^2} e^{nx} \cos kx + \frac{k}{n^2+k^2} x e^{nx} \sin kx \\ & + \frac{n}{n^2+k^2} x e^{nx} \cos kx + C\end{aligned}\quad \square$$

ตัวอย่าง 3.17 การหาปริพันธ์ของ $\int x e^{4x} \cos 3x dx$

โดยทฤษฎีบท 3.16 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int x e^{4x} \cos 3x dx = & -\frac{2(4)(3)}{(4^2+3^2)^2} e^{4x} \sin 3x + \frac{(-4)^2+3^2}{(4^2+3^2)^2} e^{4x} \cos 3x + \frac{3}{4^2+3^2} x e^{4x} \sin 3x \\ & + \frac{4}{4^2+3^2} x e^{4x} \cos 3x + C \\ = & -\frac{24}{625} e^{4x} \sin 3x + \frac{1}{25} e^{4x} \cos 3x + \frac{3}{25} x e^{4x} \sin 3x + \frac{4}{25} x e^{4x} \cos 3x + C\end{aligned}\quad \square$$

สำหรับกรณี $\int x e^{nx} \sin kx dx$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 3.18 สำหรับทุก $n, k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง n และ k ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int x e^{nx} \sin kx dx = & \frac{-n^2+k^2}{(n^2+k^2)^2} e^{nx} \sin kx + \frac{2nk}{(n^2+k^2)^2} e^{nx} \cos kx + \frac{n}{n^2+k^2} x e^{nx} \sin kx \\ & - \frac{k}{n^2+k^2} x e^{nx} \cos kx + C\end{aligned}$$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จากการศึกษาค้นคว้า เราพบว่า การหาปริพันธ์ของบางฟังก์ชันที่ต้องใช้การหาปริพันธ์แบบแยกส่วนนั้น เราสามารถใช้การคูณเมทริกซ์ในการหาปริพันธ์ได้ โดยการสร้างปริภูมิเวกเตอร์ V และฐาน B ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันนั้น จากนั้นสร้างเมทริกซ์ $[T]_B$ จากการแปลงเชิงเส้น $T(f) = f'$ ซึ่งจะทำให้ได้เมทริกซ์ $[T]_B^{-1}$ โดยเมทริกซ์นี้ทำหน้าที่เสมือนการหาปริพันธ์

ทำให้เราสามารถหาสูตรทั่วไปในการปริพันธ์ของบางฟังก์ชันบางรูปแบบได้ เช่น $x^k e^{nx}$, $x \cos(kx)$, $x \sin(kx)$, $e^{nx} \cos(kx)$, และ $x e^{nx} \cos(kx)$ อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันบางรูปแบบอาจต้องใช้ทฤษฎีบทอื่น ๆ มาช่วยในการสร้างเมทริกซ์ $[T]_B$

บรรณานุกรม

- [1] Rogers W. J., Jr., Application of Linear Algebra in Calculus, The American Mathematical Monthly, Vol 104, No. 1 (1997). pp. 20-26
- [2] Sprows J. D., Using Linear Algebra to do an integration by parts example, Mathematics Undergraduate Studies, Vol 15, No. 4 (2005). pp. 303-306.
- [3] กรรณิกา เกียนวัฒนา. (2560). พิชิตคณิตเชิงเส้น. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ภาคผนวก



INTEGRATIONS OF CERTAIN FUNCTIONS USING LINEAR ALGEBRA

Name: Mr. Pongsakon Kunpradit

Advisor: Assoc. Professor Dr. Tanadon Chaobankoh

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



Abstract

In this independent study, we investigate how linear algebra can be used to integrate certain types of functions. For each of these function types, we construct a matrix transformation derived from the selection of associative bases and vector spaces. We obtain alternative methods to solve these integrals as well as some integral formulas.

Preliminaries

Definition 1: Suppose the V and W are vector spaces over the same field $\mathbb{F}$.

$T: V \rightarrow W$ is a linear transformation (linear map) if

1. $T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$ for all $v_1, v_2 \in V$ and
2. $T(kv) = kTv$ for all $k \in \mathbb{F}$ and for all $v \in V$.

Let $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ be a basis for V , and let $T: V \rightarrow V$ be a linear mapping.

Definition 2: The matrix representation of T with respect to B is defined by

$$[T]_B = [[T(b_1)]_B \mid \dots \mid [T(b_n)]_B].$$

Theorem 3 The matrix $[T]_B$ is a unique matrix such that

$$[T]_B[v]_B = [T(v)]_B \text{ (where } [v]_B \text{ is the coordinate vector of } v \text{ with respect to } B).$$

Theorem 4 If T is bijective, then T^{-1} is a linear map. In this case, $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$.

In other words, the inverse matrix $[T]_B^{-1}$ represents the inverse transformation T^{-1} .

Note that if $T: V \rightarrow V$ is the differentiation transformation $T(f) = f'$, then $T^{-1}: V \rightarrow V$ is the integration transformation (here we set $+C = 0$).

Concept

Let $T: V \rightarrow V$ be a linear map defined by $T(f) = f'$.

Example 5 Let $V = \text{Span}\{B\}$ where $B = \{\sin(6x), \cos(6x), x\sin(6x), x\cos(6x)\}$ is a basis. Then, the matrix representation of T is

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consider $v = x\cos(6x)$. We have that

$$[T]_B[v]_B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

That is

$$\frac{d}{dx}(x\cos(6x)) = \cos(6x) - 6x\sin(6x).$$

Now, consider

$$[T]_B^{-1}[v]_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{36} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{36} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Thus $\int x\cos(6x)dx = \frac{1}{36}\cos(6x) + \frac{1}{6}x\sin(6x) + C$.

Main Results

Using the above concept, we obtain the following results.

Lemma 6 Let $V = \text{Span}\{B\}$ where $B = \{\sin kx, \cos kx, x\sin kx, x\cos kx\}$ is a basis. Then

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}.$$

Theorem 7

$$\int x\cos kx dx = \frac{1}{k^2}\cos kx + \frac{1}{k}x\sin kx + C,$$

$$\int x\sin kx dx = \frac{1}{k^2}\sin kx - \frac{1}{k}x\cos kx + C.$$

Lemma 8 Let $V = \text{Span}\{B\}$ where $B = \{e^{nx}\sin kx, e^{nx}\cos kx\}$. Then

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & -k \\ k & n \end{bmatrix}$$

Theorem 9 For all $n, k \in \mathbb{Z}$ with $n^2 + k^2 \neq 0$,

$$\int e^{nx}\cos kx dx = \frac{1}{n^2 + k^2}e^{nx}\sin kx + \frac{1}{n^2 + k^2}e^{nx}\cos kx + C,$$

$$\int e^{nx}\sin kx dx = \frac{1}{n^2 + k^2}e^{nx}\sin kx - \frac{1}{n^2 + k^2}e^{nx}\cos kx + C.$$

Lemma 10 Let $V = \text{Span}\{B\}$ where $B = \{e^{nx}\sin kx, e^{nx}\cos kx, xe^{nx}\sin kx, xe^{nx}\cos kx\}$. Then

$$[T]_B = \begin{bmatrix} n & -k & 1 & 0 \\ k & n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n & -k \\ 0 & 0 & k & n \end{bmatrix}.$$

Theorem 11 For all $n, k \in \mathbb{Z}$ with $n^2 + k^2 \neq 0$,

$$\int xe^{nx}\cos kx dx = \frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2}e^{nx}\sin kx + \frac{-n^2 + k^2}{(n^2 + k^2)^2}e^{nx}\cos kx + \frac{k}{n^2 + k^2}xe^{nx}\sin kx + \frac{n}{n^2 + k^2}xe^{nx}\cos kx + C,$$

$$\int xe^{nx}\sin kx dx = \frac{-n^2 + k^2}{(n^2 + k^2)^2}e^{nx}\sin kx + \frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2}e^{nx}\cos kx + \frac{n}{n^2 + k^2}xe^{nx}\sin kx - \frac{k}{n^2 + k^2}xe^{nx}\cos kx + C.$$

References

- [1] Rogers W. J., Jr., Application of Linear Algebra in Calculus, The American Mathematical Monthly, Vol 104, No. 1 (1997), pp. 20-26.
- [2] Sprows J. D., Using Linear Algebra to do an integration by parts example, Mathematics Undergraduate Studies, Vol 15, No. 4 (2005), pp. 303-306.