

การแก้ปริศนา 3 ลูกบาศก์ 4 สีโดยทฤษฎีกราฟ
(Solving a 4-colored 3-cube Puzzle by Graph Theory)

นายอมรินทร์ หมากรสูข
รหัส 630510569

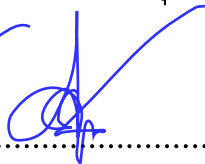
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

การแก้ปริศนา 3 ลูกบาศก์ 4 สีโดยทฤษฎีกราฟ
(Solving a 4-colored 3-cube Puzzle by Graph Theory)

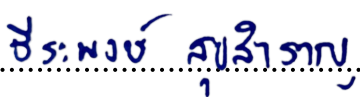
อมรินทร์ หมากรสูข

ได้รับการพิจารณาอนุมัติเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ :

  ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์)

 กรรมการ

(รศ. ดร.ธีระพงษ์ สุขสำราญ)

การแก้ปริศนา 3 ลูกบาศก์ 4 สีโดยทฤษฎีกราฟ
(Solving a 4-colored 3-cube Puzzle by Graph Theory)

นายอมรินทร์ หมากสุข
รหัส 630510569

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขา คณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษา เรื่อง การแก้ ปริศนา 3 ลูกบาศก์ 4 สีโดยทฤษฎีกราฟ

ผู้ค้นคว้าขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์ อาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระที่ คอยช่วยเหลือให้คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และให้คำปรึกษา ตลอดจน ตรวจสอบความถูกต้อง พิจารณาแก้ไข จนทำให้การศึกษาค้นคว้านี้เสร็จสิ้นสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่าน ที่ได้อบรม สั่งสอน และให้ความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้า อันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการ การศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้ ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ และผู้เกี่ยวข้องที่ช่วย สนับสนุน ให้คำปรึกษาและช่วยเหลือขณะที่ผู้ค้นคว้ากำลังศึกษาค้นคว้าอิสระชิ้นนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณบิดา มารดา และครอบครัว รวมทั้งขอบคุณไปยังทุกท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับงาน ค้นคว้าอิสระฉบับนี้ ซึ่งผู้ค้นคว้าไม่ได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ด้วย

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ผู้ค้นคว้าขอมอบคำชื่น ชมและคุณงามความดีนั้นแก่ ครู อาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอน ในทางตรงกันข้ามหากผลงานค้นคว้าอิสระนี้ เกิดข้อผิดพลาดประการใด ผู้ค้นคว้าต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และขอน้อมรับความผิดพลาดไว้เพียงผู้เดียว

อมรินทร์ หมากสุข

หัวข้อ (ภาษาไทย)	การแก้ปริศนา 3 ลูกบาศก์ 4 สีโดยทฤษฎีกราฟ
(ภาษาอังกฤษ)	Solving a 4-colored 3-cube Puzzle by Graph Theory
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นายอมรินทร์ หมากสุข รหัสนักศึกษา 630510569
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ. ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์
ชื่อกรรมการสอบ	รศ. ดร.ธีระพงษ์ สุขสำราญ

บทคัดย่อ

อินสแตนซ์ อินซานิตี เป็นปริศนาลูกบาศก์ 4 ลูก 4 สี โดยที่เป้าหมายของปริศนานี้คือการเรียงลูกบาศก์ 4 ลูกให้เป็นหอคอยในแนวตั้ง เมื่อพิจารณาด้านซ้าย ด้านขวา ด้านหน้า และด้านหลังของหอคอย หน้าที่อยู่ในด้านเดียวกันต้องมีสีแตกต่างกันทั้งหมด อินสแตนซ์ อินซานิตี เป็นแรงบันดาลใจให้เราสร้างปริศนาขึ้นมาใหม่และศึกษาปริศนาที่สร้างขึ้น โดยสร้างหอคอยที่ใช้ลูกบาศก์ 3 ลูกจาก 4 ลูก และใช้ทฤษฎีกราฟเข้ามาแก้ เราสามารถแบ่งกรณีศึกษาได้ 4 กรณี ดังนี้ กรณีที่ 1 ประกอบไปด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกที่ 2 และลูกที่ 3 กรณีที่ 2 ประกอบไปด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกที่ 2 และลูกที่ 4 กรณีที่ 3 ประกอบไปด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกที่ 3 และลูกที่ 4 และกรณีที่ 4 ประกอบไปด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 2 ลูกที่ 3 และลูกที่ 4 ซึ่งได้ผลลัพธ์จำนวนวิธีในการสร้างหอคอยทั้งหมด 26 วิธี

Abstract

Instant Insanity is a puzzle with four 4-color cubes. The goal of this puzzle is to arrange all 4 cubes to form a vertical tower. When consider the left side, right side, front side and back side of the tower, the faces of the cubes on the same side must have different colors. Instant Insanity inspires us to design a new puzzle and study it. We build a tower using 3 out of 4 cubes and use graph theory to solve this puzzle. We can divide it into 4 cases as follows: case 1 is composed of cube number 1, cube number 2 and cube number 3; case 2 is composed of cube number 1, cube number 2 and cube number 4; case 3 is composed of cube number 1, cube number 3 and cube number 4; and case 4 is composed of cube number 2, cube number 3 and cube number 4. The number of ways to build a tower is 26.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
สารบัญ	ค
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
3 ผลการศึกษา (Result)	4
3.1 กรณีที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกที่ 2 และลูกที่ 3	8
3.2 กรณีที่ 2 ลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกที่ 2 และลูกที่ 4	13
3.3 กรณีที่ 3 ลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกที่ 3 และลูกที่ 4	17
3.4 กรณีที่ 4 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 ลูกที่ 3 และลูกที่ 4	23
4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	27
5 ภาคผนวก	28
บรรณานุกรม	29

บทที่ 1.

บทนำ (Introduction)

อินสแตนต์ อินซานิทีเป็นเกมที่เริ่มรู้จักกันในปี 1900 โดยในปี 1967 พาร์กเกอร์ บราเทอร์ได้เป็นผู้คิดชื่อเกมขึ้นมาว่า “อินสแตนต์ อินซานิที” ทำให้ตัวเกมได้รับความนิยมมากในช่วงปี 1960 ในอดีตเกมนี้ได้ปรากฏออกมามากมายหลายชื่อ เช่น “เดอะ เกรท แทนทาไลเซอร์” “โกรเซอร์ส” และ “คัตเซนแจมเมอร์” ซึ่งตัวเกมนี้นี้ประกอบไปด้วยลูกบาศก์จำนวน 4 ลูก โดยแต่ละลูกจะประกอบไปด้วย 4 สีได้แก่ สีขาว (W) สีแดง (R) สีเขียว (G) และสีน้ำเงิน (B) วิธีการเล่นเกมคือจะต้องนำลูกบาศก์ทั้ง 4 ลูกมาจัดเรียงเป็นหอคอยในแนวตั้ง ดังนั้นหอคอยจะประกอบไปด้วยด้านทั้งหมด 4 ด้านคือ ด้านซ้าย (L) ด้านขวา (R) ด้านหน้า (F) และด้านหลัง (B) เมื่อนำทั้ง 4 ลูกมาเรียงเป็น หอคอยแล้วด้านทุกด้านของหอคอยจะต้องประกอบไปด้วยสี W-R-G-B ครบทั้ง 4 สี และไม่มีสีซ้ำกันในแต่ละด้าน และการให้สีในแต่ละลูกจะแตกต่างกัน

หลังจากที่อินสแตนต์ อินซานิทีเคยโด่งดังในปี 1967 บราวน์ [2] ได้เสนอวิธีการในการแก้ปัญหาของเกมนี้ แล้วได้เผยแพร่ทฤษฎีออกมาในปี 1968 หลังจากนั้น ชวาร์ต [8] ได้พัฒนาทฤษฎีของบราวน์ โดยวิธีการของพวกเขาได้ลดจำนวนวิธีที่เป็นไปได้จาก 82,944 เหลือเป็น 81 วิธีแต่กลับไม่ได้มีวิธีที่เป็นระบบให้ได้มาซึ่งคำตอบ ส่งผลให้เกรโกสและกิบเบิร์ต [5] ได้ออกมาอธิบายวิธีการเพื่อพัฒนางานของบราวน์และชวาร์ต มีการแทนที่ปัญหาโดยใช้ปัญหากราฟง่าย ๆ ซึ่งวิธีการนี้สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาที่เสนอโดยบราวน์ในปี 1969 เดเวนเทอร์ [9] ได้แนะนำให้ใช้ทฤษฎีกราฟ โดยสีของลูกบาศก์สามารถอธิบายได้โดยจุดยอด และด้านคู่ตรงข้ามก็ถูกอธิบายได้ด้วยเส้นเชื่อม

เร็ว ๆ นี้ได้มีนักวิจัยหลายท่านได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับรูปทรงต่าง ๆ ที่นอกเหนือจากลูกบาศก์ เจบาซิงห์และซีโมนสัน [7] ได้ขยายแนวคิดของอินสแตนต์ อินซานิที เป็นทรงตันเพลโตได้แก่ ลูกบาศก์ ทรงแปดหน้า ทรงสิบหน้า ทรงยี่สิบหน้า และทรงสี่หน้า ซึ่งผลการศึกษาที่ได้ถูกเผยแพร่ในปี 2002 ต่อมาฟราเซอร์ [4] ใช้ทฤษฎีกราฟในการแก้ปัญหาเกม 6 ทรงแปดหน้า 6 สี ซึ่งเกมนี้ก็ถูกพัฒนามาจากอินสแตนต์ อินซานิทีในปี 2013 เดเมน [3] ได้ศึกษารูปแบบต่าง ๆ รวมถึงปริซึมสามเหลี่ยมและปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก

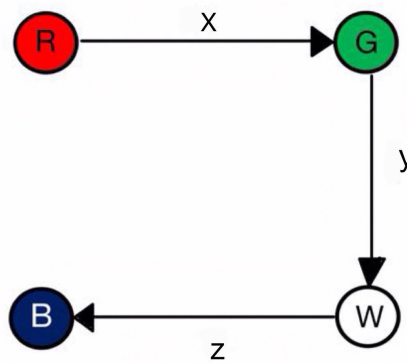
จุดประสงค์ เพื่อหาจำนวนวิธีการจัดเรียงลูกบาศก์ 3 ลูก 4 สีในแนวตั้งที่สีของลูกบาศก์แต่ละด้านแตกต่างกันทั้งหมด โดยพิจารณาด้านซ้าย ขวา หน้า และหลังเท่านั้น

บทที่ 2.

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

บทนิยาม 2.1 [6] กราฟระบุทิศทาง (directed graph) D คือสามอันดับ $(V(D), A(D), \psi_D)$ ที่ประกอบไปด้วยเซตของจุดยอด (vertex) ที่ไม่เป็นเซตว่าง $V(D)$ และเซต $A(D)$ ของเส้นเชื่อม (arc) ที่เซตของ $A(D)$ และ $V(D)$ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน และฟังก์ชันการตกกระทบ (incidence function) ψ_D ฟังก์ชันการตกกระทบจะเชื่อมโยงระหว่างเส้นเชื่อมของกราฟ D และคู่อันดับของจุดยอดของกราฟ D (ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน) ถ้า a เป็นเส้นเชื่อม และ u, v คือจุดยอด ซึ่ง $\psi_D(a) = (u, v)$ กล่าวได้ว่า a คือเส้นเชื่อมของจุด u, v โดยที่ u เป็นหางลูกศรของ a และ v เป็นหัวลูกศรของ a เพื่อความสะดวกจะเรียกราฟระบุทิศทางว่าไดกราฟ (digraph)

ตัวอย่าง 2.2 ตัวอย่างไดกราฟ



$$V(D) = \{R, G, B, W\}$$

$$A(D) = \{x, y, z\}$$

$$\psi_D = \{(x, (R, G)), (y, (G, W)), (z, (W, B))\}$$

บทนิยาม 2.3 [12] ให้ $f : A \rightarrow B$ ให้ $U \subseteq A$ การจำกัดของ f บน U (restriction of f to U) เขียนแทนด้วย $f|_U$ คือเซตย่อยของ f ที่โดเมนคือเซต U นั่นคือ

$$f|_U = \{(x, y) \in f | x \in U\}$$

บทนิยาม 2.4 [6] ไดกราฟ D' เป็นไดกราฟย่อย (subdigraph) ของ D ถ้า $V(D') \subseteq V(D)$ และ $A(D') \subseteq A(D)$ และ $\psi_{D'}$ เป็นการจำกัดของ ψ_D บน $A(D')$

บทนิยาม 2.5 [11] nP_r แทนจำนวนวิธีการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน (permutation) คราวละ r ขึ้นจากสิ่งของทั้งหมด n ชิ้นที่แตกต่างกัน

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

บทนิยาม 2.6 [11] nC_r หรือ $\binom{n}{r}$ แทนจำนวนวิธีในการเลือกสิ่งของ (combination) คราวละ r ขึ้นจากสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกัน

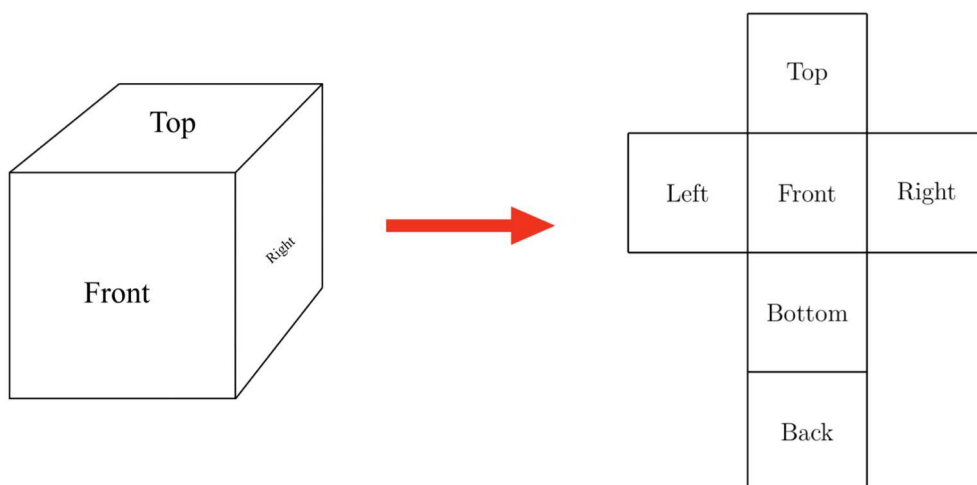
$${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

บทที่ 3.

ผลการศึกษา (Results)

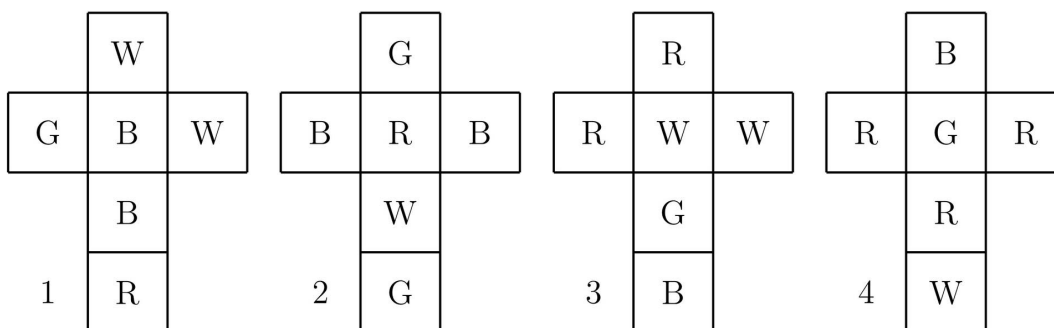
อินสแตนต์ อินซานิที่ประกอบไปด้วยด้วยลูกบาศก์ 4 ลูกโดยที่มีการให้สีแต่ละด้านดังนี้ สีแดง (R) สีเขียว (G) สีขาว (W) และสีน้ำเงิน (B) สำหรับการแก้ปัญหาของเกมนี้นี้ต้องการที่จะจัดเรียงลูกบาศก์ 3 ลูกจาก 4 ลูกให้เป็นแนวตั้ง เรียกว่าหอคอย (tower) ที่ด้านแต่ละด้านของหอคอยมีด้าน 3 สีที่แตกต่างกัน โดยด้านของหอคอยที่พิจารณาคือ ด้านหน้า หลัง ซ้าย และขวาของหอคอย เนื่องจากพิจารณาวิธีการเรียงลูกบาศก์ 3 ใน 4 ของลูกบาศก์ จึงสามารถแบ่งกรณีออกเป็น $({}^4_3) = 4$ กรณี

สำหรับลูกบาศก์แต่ละลูกจะประกอบไปด้วยด้าน หน้า/หลัง บน/ล่าง และซ้าย/ขวา สามารถคลี่ลูกบาศก์ออกมาได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

และการให้สีของลูกบาศก์ลูกที่ 1-4 เป็นไปตามรูปที่ 2



รูปที่ 2

สำหรับเกมนี้จะได้ว่า การเรียงลูกบาศก์คือการเรียงแบบสุ่ม จะทำให้โอกาสที่รูปแบบจะตรงกับกติกาของเกมมีน้อยมาก เนื่องจากจำนวนวิธี ในการเรียงลูกบาศก์มีเยอะมาก ซึ่งสามารถคำนวณจำนวนวิธีการเรียงลูกบาศก์ทั้งหมดได้ดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1 [1] มีจำนวนวิธีในการหมุนลูกบาศก์ 24 วิธี

ทฤษฎีบท 3.2 มีจำนวนวิธีในการเรียงลูกบาศก์เป็นหอคอย 6,912 วิธีดังนี้

บทพิสูจน์ สามารถจัดเรียงลูกบาศก์ 3 ลูกได้จำนวนวิธี 24 วิธี

ในการเรียงลูกบาศก์จะเลือกลูกบาศก์ 3 ลูกจาก 4 ลูกซึ่งลูกบาศก์แต่ละลูกจะถือว่าแตกต่างกัน ดังนั้นจึงเขียนสัญลักษณ์แทนการจัดเรียงลูกบาศก์ได้เป็น 4P_3 ทำให้สามารถจัดเรียงลูกบาศก์ได้ $\frac{4!}{(4-3)!} = 24$ วิธี

จากนั้น หมุนลูกบาศก์ 3 ลูกโดยที่แต่ละลูกสามารถหมุนได้ 24 วิธีจากทฤษฎีบทประกอบ 3.1 ดังนั้นจึงมีจำนวนวิธีในการหมุนลูกบาศก์ 24^3 วิธี

จากหลักการคูณได้จำนวนวิธีในการวางลูกบาศก์เป็น $24 * (24^3) = 331,776$ วิธี

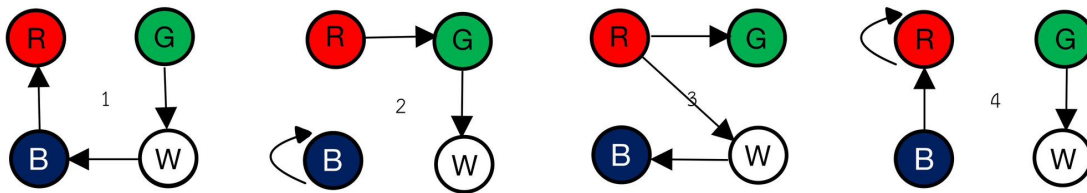
ซึ่งการหมุนและการพลิกของหอคอยมองว่าไม่ได้แตกต่างกัน จึงต้องหารด้วยจำนวนดังนี้

1. หอคอยหมุนรอบแกนตั้งได้ 4 วิธี
2. หอคอยพลิกรอบแกนนอนได้ 2 วิธี

นอกจากนี้ หอคอยที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนลูกบาศก์ 3 ลูกซึ่งทำได้ 6 วิธี ถือว่าไม่ได้หอคอยที่แตกต่างกัน จึงต้องหารด้วย 6

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเรียงลูกบาศก์คือ $\frac{331,776}{4 \cdot 2 \cdot 6} = 6,912$ วิธี ซึ่งเป็นจำนวนที่ค่อนข้างมาก ในการศึกษานี้จึงใช้กราฟศึกษาวิธีที่เป็นไปได้ในการสร้างหอคอยที่ถูกกติกา $\square$

สำหรับการกำหนดผลลัพธ์ของ อินสแตนต์ อินชานีที จะสร้างกราฟสำหรับการให้สีของลูกบาศก์แต่ละลูก โดยที่จุดยอดของแต่ละกราฟจะแทนสีทั้งหมด 4 สี หลังจากนั้นจะสร้างเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุดที่เป็นสีของด้านคู่ตรงข้าม โดยไม่จำเป็นที่จะต้องเป็นจุดยอดที่แตกต่างกัน ในส่วนของเส้นเชื่อมจะมีการกำหนดทิศทางจากซ้ายไปขวา หน้าไปหลัง และบนไปล่าง โดยมีทิศทางจากหางลูกศรไปยังหัวลูกศร กราฟแสดงการให้สีของลูกบาศก์ทั้ง 4 ลูกดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

เห็นได้ว่าจะได้กราฟของการให้สีของลูกบาศก์เป็น 4 กราฟ จากกราฟแสดงการให้สีของลูกบาศก์แต่ละลูกในรูปที่ 3 ในการศึกษาครั้งนี้สนใจลูกบาศก์ 3 ลูกจาก 4 ลูกเท่านั้น

จะพิจารณากราฟของการให้สี 3 กราฟแล้วนำมาสร้างเป็นกราฟรวม ซึ่งบนกราฟรวมจะมีจุดยอดคือ R, G, W และ B และมีเส้นเชื่อมที่มาจากกราฟทั้ง 3 เส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะถูกกำกับด้วยหมายเลขของลูกบาศก์ลูกนั้น ๆ สำหรับกราฟรวมของลูกบาศก์ลูกที่ i ลูกบาศก์ลูกที่ j และลูกบาศก์ลูกที่ k แต่ละเส้นเชื่อมจะมีหมายเลขของลูกบาศก์กำกับอยู่ว่าเส้นเชื่อมนั้นมาจากลูกบาศก์ลูกใด หากพิจารณาเส้นเชื่อมที่มี i กำกับ จะเห็นได้ว่ามีเส้นเชื่อมเช่นนั้นทั้งหมด 3 เส้น โดยกราฟรวมของกราฟย่อยทั้ง 3 กราฟจะมีเส้นเชื่อมทั้งหมด 9 เส้น

จากกราฟรวมนี้ จะหาคู่ของกราฟย่อย G_{LR} และ G_{FB} ในกราฟรวมที่ได้ เพื่อนำมาใช้บอกว่าด้านซ้ายขวาและด้านหน้าหลังของลูกบาศก์แต่ละลูกในหอคอย ที่เป็นคำตอบของเกมต้องเป็นด้านใดบ้างตามลำดับ จากกติกาเกมจะสังเกตได้ว่า

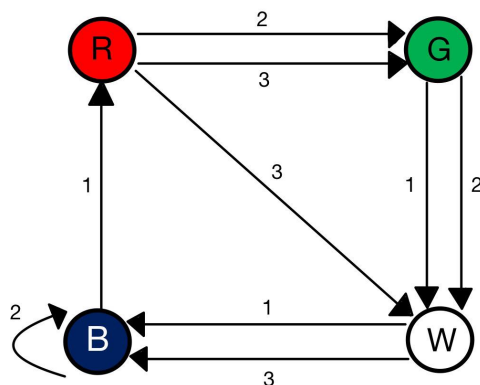
1. ด้านซ้ายและขวาของหอคอยมีด้าน 3 สีที่แตกต่างกัน แทนด้วยกราฟย่อย G_{LR} ที่มีเส้นเชื่อม 3 เส้น โดย 1 จุดเป็นหัวลูกศรได้ไม่เกิน 1 ครั้ง และ 1 จุดเป็นหางลูกศรได้ไม่เกิน 1 ครั้ง
2. ด้านหน้าและหลังของหอคอยมีด้าน 3 สีที่แตกต่างกัน แทนด้วยกราฟย่อย G_{FB} ที่มีเส้นเชื่อม 3 เส้น โดย 1 จุดเป็นหัวลูกศรได้ไม่เกิน 1 ครั้ง และ 1 จุดเป็นหางลูกศรได้ไม่เกิน 1 ครั้ง

3. สำหรับลูกบาศก์ลูกหนึ่ง เมื่อเลือกเส้นใดเส้นหนึ่งเป็นด้านซ้ายขวาแล้ว อีก 2 เส้นจะเป็นด้านซ้ายขวาไม่ได้อีก ทำให้อีก 2 เส้นที่เหลือจะกลายเป็นด้านหน้าหลัง และด้านบนล่างของลูกบาศก์ลูกนั้น แสดงว่าในการสร้างกราฟย่อย G_{LR} และ G_{FB} มีการใช้เส้นเชื่อมจากลูกบาศก์แต่ละลูก ลูกละ 1 ครั้ง แทนด้วยกราฟย่อย G_{LR} และ G_{FB} ที่มีเส้นเชื่อมจากลูกบาศก์แต่ละลูก ลูกละ 1 เส้น
4. ด้าน 1 คู่จะเป็น ซ้าย/ขวา และ หน้า/หลัง พร้อมกันไม่ได้ ดังนั้นจึงไม่มีเส้นเชื่อมที่อยู่ในกราฟย่อย G_{LR} และ G_{FB} พร้อมกัน ทำให้เมื่อเลือกกราฟใดกราฟหนึ่งเป็น G_{LR} จะไม่สามารถเลือกกราฟย่อยนี้เป็น G_{FB} อีก

กราฟย่อยที่สามารถเป็น G_{LR} และ G_{FB} มีได้หลายกราฟย่อย เนื่องจากหอคอยของสามารหมุนได้ หากเลือกกราฟย่อย i เป็น G_{LR} และกราฟย่อย j เป็น G_{FB} จะไม่สามารถเลือกกราฟย่อย i เป็น G_{FB} และกราฟย่อย j เป็น G_{LR} ได้อีกเพราะจะทำให้เกิดกรณีที่ซ้ำกัน

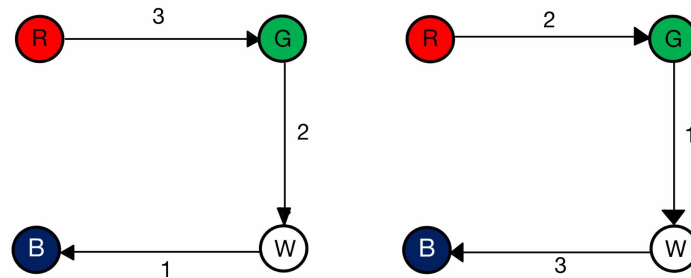
หลังจากได้กราฟย่อย G_{LR} และ G_{FB} มาแล้วจะเห็นได้ว่าในแต่ละกราฟย่อยจะประกอบไปด้วยเส้นเชื่อมที่มีหมายเลขของลูกบาศก์ทั้ง 3 ลูก ซึ่งการให้สีของกราฟย่อย G_{LR} จะมองว่าเส้นเชื่อมนั้นกำกับด้วยหมายเลขใดก็จะเป็นการให้สีของลูกบาศก์หมายเลขนั้น โดยที่จุดยอดที่เป็นหางลูกศรก็จะเป็นสีของด้านซ้าย ส่วนจุดยอดที่เป็นหัวลูกศรก็จะเป็นสีของด้านขวา ในทำนองเดียวกัน G_{FB} จุดยอดที่เป็นหางลูกศรก็จะเป็นสีของด้านหน้า ส่วนจุดยอดที่เป็นหัวลูกศรก็จะเป็นสีของด้านหลัง

ตัวอย่าง 3.3 สมมติพิจารณาลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 ลูกบาศก์ลูกที่ 3 จะสามารถสร้างกราฟรวมได้ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

เห็นได้ว่าบนเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะแสดงหมายเลขของลูกบาศก์แต่ละลูกกำกับไว้ และแต่ละเส้นจะมีทิศทางจากซ้ายไปขวา หน้าไปหลัง และบนไปล่าง เมื่อได้กราฟย่อยที่สอดคล้องกับกติกาเกมข้างต้นแล้วทำการเรียงลูกบาศก์ให้เป็นหอคอยในแนวตั้ง จะเห็นด้านที่มีสีแตกต่างกันเพียง 4 ด้านคือ ด้านซ้าย ด้านขวา ด้านหน้า และด้านหลัง สมมติว่าได้กราฟย่อยออกมาเป็นดังนี้



จะกำหนดให้กราฟ G_{LR} เป็นด้านซ้าย/ขวา และกราฟย่อย G_{FB} จะเป็นด้านหน้า/หลัง จากนั้นสามารถสร้างตารางบอกสีของด้านซ้าย/ขวาและหน้า/หลังของลูกบาศก์แต่ละลูก ได้ดังนี้

ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
2	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีเขียว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน

กรณีศึกษา

กรณีที่ 1 : ลูกบาศก์ลูกที่ 1 + ลูกบาศก์ลูกที่ 2 + ลูกบาศก์ลูกที่ 3

สามารถสร้างกราฟรวมออกมาได้ดังรูปที่ 5

จากกราฟรวมจะสร้างกราฟย่อยที่นำมาใช้เป็น G_{LR} และ G_{FB} กำหนดให้เส้นเชื่อมกราฟแทนด้วย (a, b, c) โดยที่ a แทนตัวเลขของลูกบาศก์และ b แทนจุดสีทางลูกศรและ c แทนจุดสีหัวลูกศร โดยจากกราฟรวมสามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 1 ได้ 3 กรณีคือกรณีที่ 1 $(1, B, R)$ กรณีที่ 2 คือ $(1, W, B)$ และกรณีที่ 3 คือ $(1, G, W)$

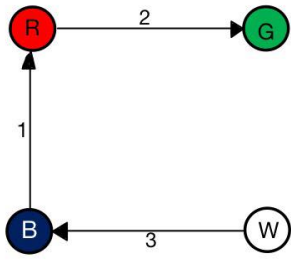
ในกรณีที่ 1 สามารถเลือกเส้นที่ 2 ได้ 2 กรณีเนื่องจาก $(2, B, B)$ จะทำให้ที่จุด B มีทางลูกศรมากกว่า 1 จุดจึงได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(2, R, G)$ และ $(1, B, R)$, $(2, G, W)$ ซึ่งในกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(2, R, G)$ สามารถใช้เส้นที่ 3 ได้เพียง $(3, W, B)$ เนื่องจาก $(3, R, W)$ ตรงจุด R เกิดทางลูกศรมากกว่า 1 ครั้ง และ $(3, R, G)$ ทำให้เกิดทางและหัวลูกศรมากกว่า 1 ครั้ง

ที่จุด R และ G ตามลำดับ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ 1 ที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, R, G), (3, W, B)$ ในขณะที่ $(1, B, R), (2, G, W)$ สามารถเลือกเส้นที่ 3 ได้ 2 แบบคือ $(3, W, B)$ และ $(3, R, G)$ ซึ่ง $(3, R, W)$ ใช้ไม่ได้เพราะที่จุด W มีการใช้หัวลูกศรมากกว่า 1 ครั้ง จึงได้กราฟย่อยที่ 2 ที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, G, W), (3, W, B)$ และกราฟย่อยที่ 3 ที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, G, W), (3, R, G)$ ซึ่งในกรณีอื่นๆจะพิจารณากราฟย่อยแบบเดียวกับกรณีนั่นคือ จะพิจารณาจุดแต่ละจุดจะประกอบด้วยหัวลูกศรได้ไม่เกิน 1 ครั้งและมีหางลูกศรไม่เกิน 1 ครั้ง ดังนั้นจะละรายละเอียดในการอธิบายและจะออกเฉพาะผลที่ได้เท่านั้น

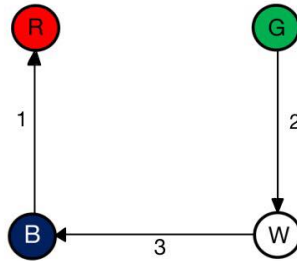
ในกรณีที่ 2 สามารถใช้เส้นที่ 2 ได้ทั้ง 2 กรณีนั่นคือ $(2, G, R)$ และ $(2, G, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (2, R, G)$ และ $(1, W, B), (2, G, W)$ ในกรณีของ $(1, W, B), (2, R, G)$ ไม่สามารถเลือกเส้นที่ 3 ได้เลยแต่ในกรณี $(1, W, B), (2, G, W)$ เลือกเส้นที่ 3 ได้ 1 กรณีคือ $(3, R, G)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ 4 ที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (2, G, W), (3, R, G)$

ในกรณีที่ 3 สามารถเลือกเส้นที่ 2 ได้ 2 กรณีคือ $(2, R, G)$ และ $(2, B, B)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (2, R, G)$ และ $(1, G, W), (2, B, B)$ โดยที่ $(1, G, W), (2, R, G)$ เลือกเส้นที่ 3 ได้ 1 กรณี คือ $(3, W, B)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ 5 ที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (2, R, G), (3, W, B)$ ในทำนองเดียวกันกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (2, B, B)$ เลือกเส้นที่ 3 ได้กรณีเดียวนั่นคือ $(3, R, G)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ 6 ที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (2, B, B), (3, R, G)$

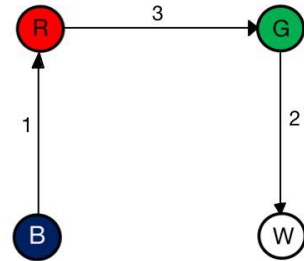
กราฟย่อยทั้ง 6 กราฟได้แก่



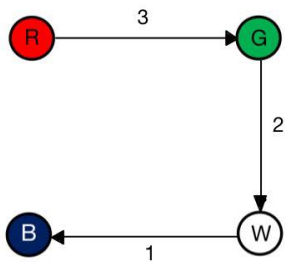
กราฟย่อย 1



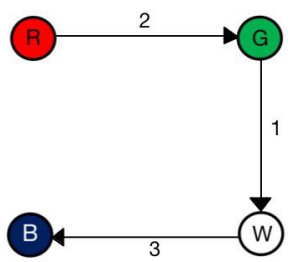
กราฟย่อย 2



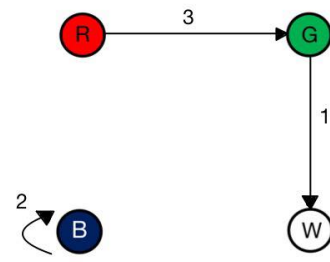
กราฟย่อย 3



กราฟย่อย 4



กราฟย่อย 5

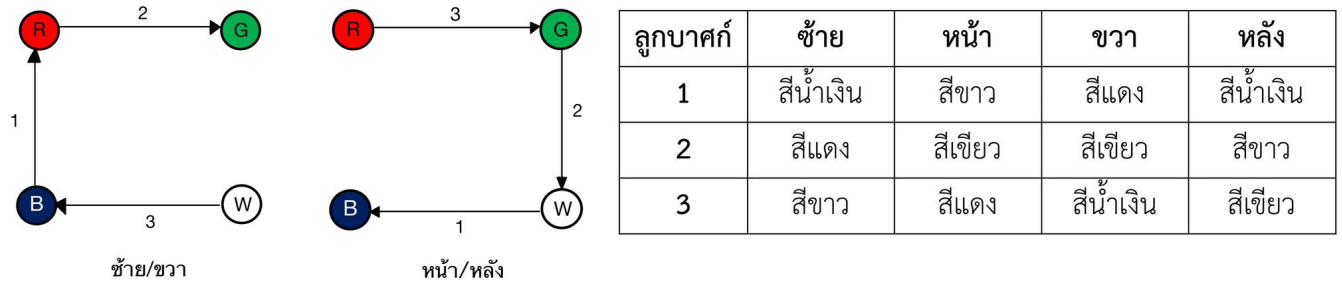


กราฟย่อย 6

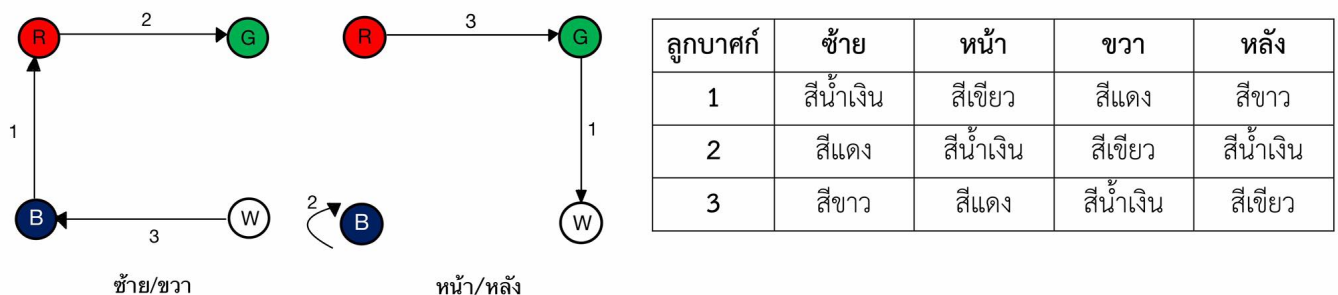
จากทั้ง 3 กรณีสามารถจับคู่กราฟย่อยได้ 5 คู่ ได้แก่คู่ที่ 1 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, R, G), (3, W, B)$ และ $(1, W, B), (2, G, W), (3, R, G)$ คู่ที่ 2 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, R, G), (3, W, B)$ และ $(1, G, W), (2, B, B), (3, R, G)$ คู่ที่ 3 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, R, G), (3, W, B)$ และ $(1, G, W), (2, B, B), (3, R, G)$ คู่ที่ 4 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, G, W), (3, R, G)$ และ $(1, G, W), (2, R, G), (3, W, B)$ และคู่ที่ 5 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (2, G, W), (3, R, G)$ และ $(1, G, W), (2, R, G), (3, W, B)$

กราฟย่อยที่ใช้เป็น G_{LR} และ G_{FB} จำนวน 5 คู่ และตารางแสดงสีของลูกบาศก์ เป็นดังนี้

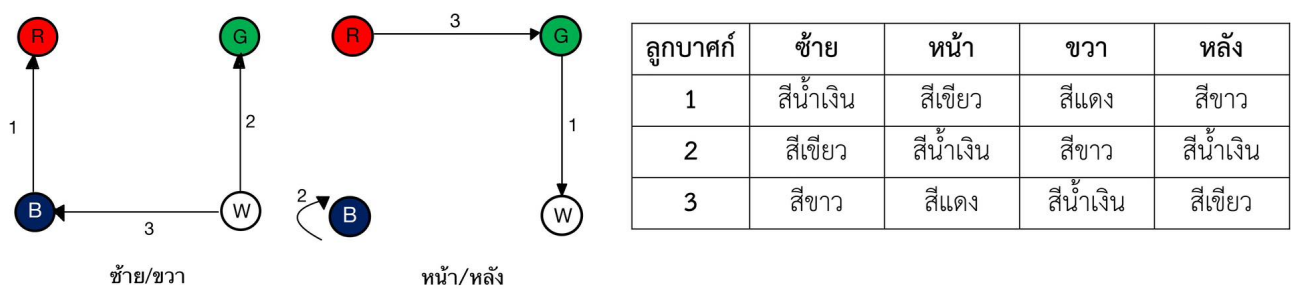
คู่ที่ 1



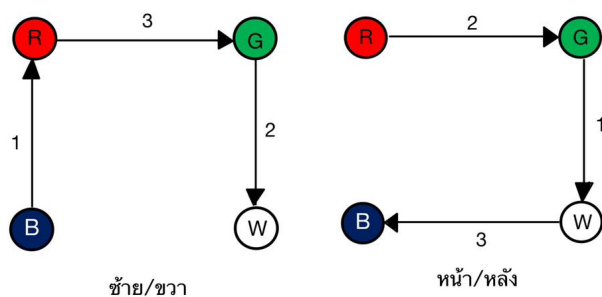
คู่ที่ 2



คู่ที่ 3

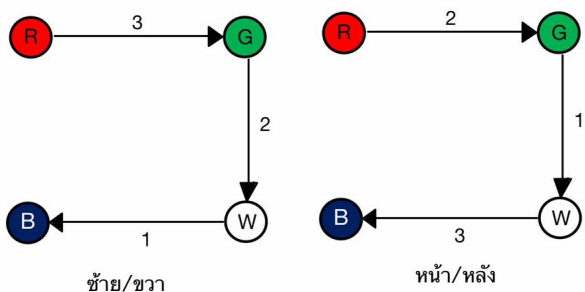


คู่ที่ 4



ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีเขียว	สีแดง	สีขาว
2	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีเขียว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน

คู่ที่ 5

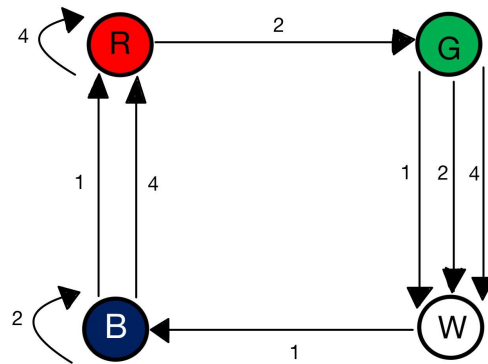


ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
2	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีเขียว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน

ในกรณีที่ 1 ศึกษาลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 และลูกบาศก์ลูกที่ 3 ซึ่งได้จำนวนคำตอบของกรณีที่ 1 ทั้งหมด 5 คำตอบ นั่นคือสามารถเรียงลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 และลูกบาศก์ลูกที่ 3 ได้ 5 วิธีในการแก้ปัญหาของเกมนี้

กรณีที่ 2 : ลูกบาศก์ลูกที่ 1 + ลูกบาศก์ลูกที่ 2 + ลูกบาศก์ลูกที่ 4

สามารถสร้างกราฟรวมออกมาได้ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

จากกราฟรวมสามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 1 ได้ 3 กรณีนั้นคือ กรณีที่ 1 $(1, B, R)$ กรณีที่ 2 $(1, W, B)$ และกรณีที่ 3 $(1, G, W)$

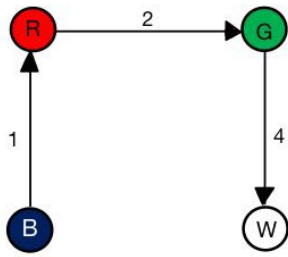
กรณีที่ 1 สามารถเลือกเส้นจากลูกบาศก์ลูกที่ 2 ได้ 2 กรณีนั้นคือ $(2, R, G)$ และ $(2, G, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(2, R, G)$ และ $(1, B, R)$, $(2, G, W)$ โดยกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(2, R, G)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้เพียง 1 แบบคือ $(4, G, W)$ ดังนั้นจึงได้กราฟย่อยที่ 1 ที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(2, R, G)$, $(4, G, W)$ และกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(2, G, W)$ ไม่สามารถเลือกเส้นจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้

กรณีที่ 2 $(1, W, B)$ สามารถเลือกเส้นจากลูกบาศก์ลูกที่ 2 ได้ 2 กรณีคือ $(2, G, W)$ และ $(2, R, G)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, G, W)$ และ $(1, W, B)$, $(2, R, G)$ โดยกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, G, W)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 2 แบบนั้นคือ $(4, B, R)$ และ $(4, R, R)$ ดังนั้นจึงได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, G, W)$, $(4, B, R)$ และ $(1, W, B)$, $(2, G, W)$, $(4, R, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 2 และกราฟย่อยที่ 3 ตามลำดับ ในขณะที่กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, R, G)$ ก็สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 2 แบบคือ $(4, B, R)$ และ $(4, G, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, R, G)$, $(4, B, R)$ และ $(1, W, B)$, $(2, R, G)$, $(4, G, W)$ เป็นกราฟย่อยที่ 4 และกราฟย่อยที่ 5 ตามลำดับ

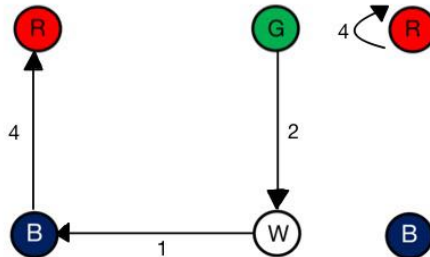
กรณีที่ 3 $(1, G, W)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 2 ได้ 2 แบบคือ $(2, B, B)$ และ $(2, R, G)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W)$, $(2, B, B)$ และ $(1, G, W)$, $(2, R, G)$ ในกรณีของกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W)$, $(2, B, B)$ เลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้

เพียงเส้นเดียวคือ $(4, R, R)$ ดังนั้นจึงได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (2, B, B), (4, R, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 6 ในขณะเดียวกัน $(1, G, W), (2, R, G)$ ก็สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้แบบเดียวคือ $(4, B, R)$ ดังนั้นได้ $(1, G, W), (2, R, G), (4, B, R)$

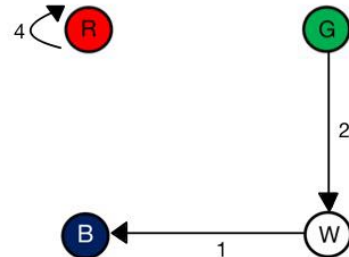
กราฟย่อยทั้ง 7 กราฟได้แก่



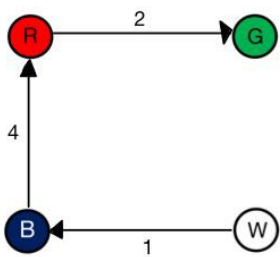
กราฟย่อย 1



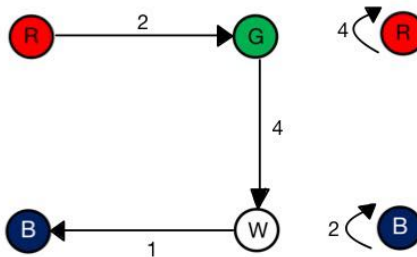
กราฟย่อย 2



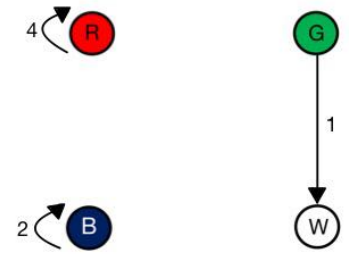
กราฟย่อย 3



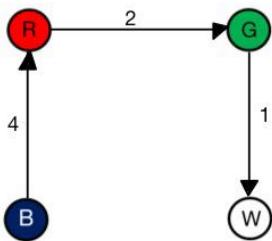
กราฟย่อย 4



กราฟย่อย 5



กราฟย่อย 6



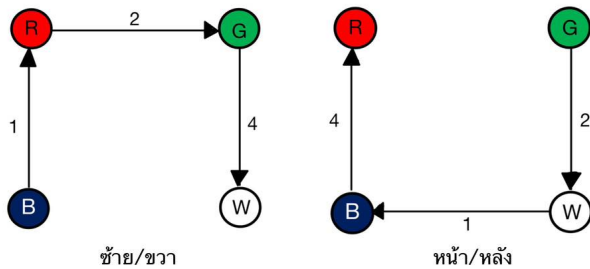
กราฟย่อย 7

จากทั้ง 3 กรณีสามารถจับคู่กราฟย่อยได้ 7 คู่ คู่ที่ 1 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, W, B), (2, G, W), (4, B, R)$ คู่ที่ 2 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, W, B), (2, G, W), (4, R, R)$ คู่ที่ 3 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (2, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, G, W), (2, B, B), (4, R, R)$ คู่ที่ 4 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (2, G, W), (4, B, R)$ และ $(1, G, W), (2, B, B), (4, R, R)$ คู่ที่ 5 คือ

กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, G, W)$, $(4, R, R)$ และ $(1, G, W)$, $(2, R, G)$, $(4, B, R)$ คู่ที่ 6 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, R, G)$, $(4, B, R)$ และ $(1, G, W)$, $(2, B, B)$, $(4, R, R)$ และคู่ที่ 7 คือกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B)$, $(2, R, G)$, $(4, G, W)$ และ $(1, G, W)$, $(2, B, B)$, $(4, R, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 7

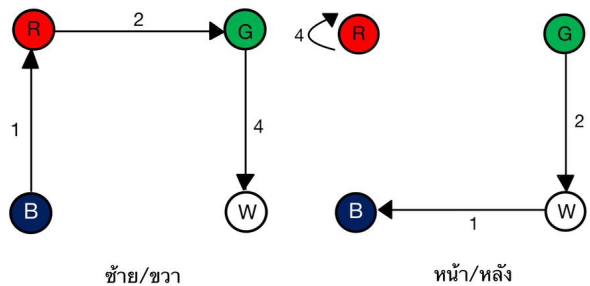
กราฟย่อยที่ใช้เป็น G_{LR} และ G_{FB} จำนวน 7 คู่ และตารางแสดงสีของลูกบาศก์ เป็นดังนี้

คู่ที่ 1



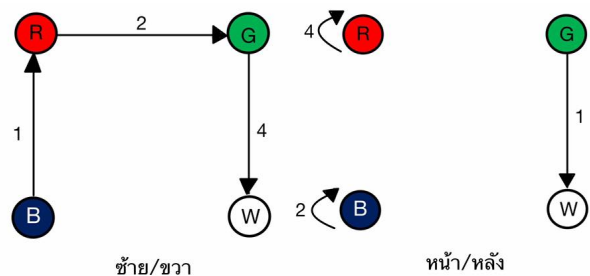
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง	สีน้ำเงิน
2	สีแดง	สีเขียว	สีเขียว	สีขาว
4	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 2



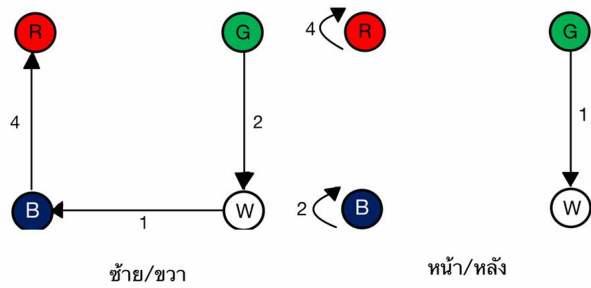
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง	สีน้ำเงิน
2	สีแดง	สีเขียว	สีเขียว	สีขาว
4	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 3



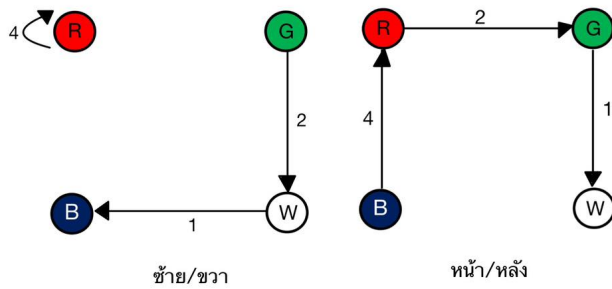
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีเขียว	สีแดง	สีขาว
2	สีแดง	สีน้ำเงิน	สีเขียว	สีน้ำเงิน
4	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 4



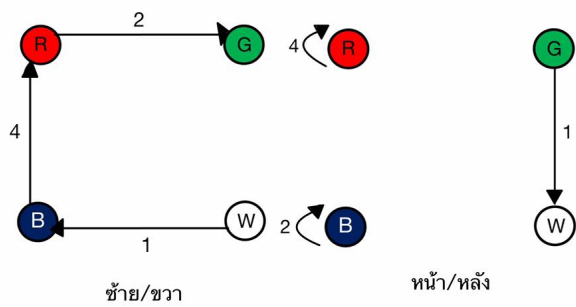
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
2	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีน้ำเงิน
4	สีน้ำเงิน	สีแดง	สีแดง	สีแดง

คู่ที่ 5



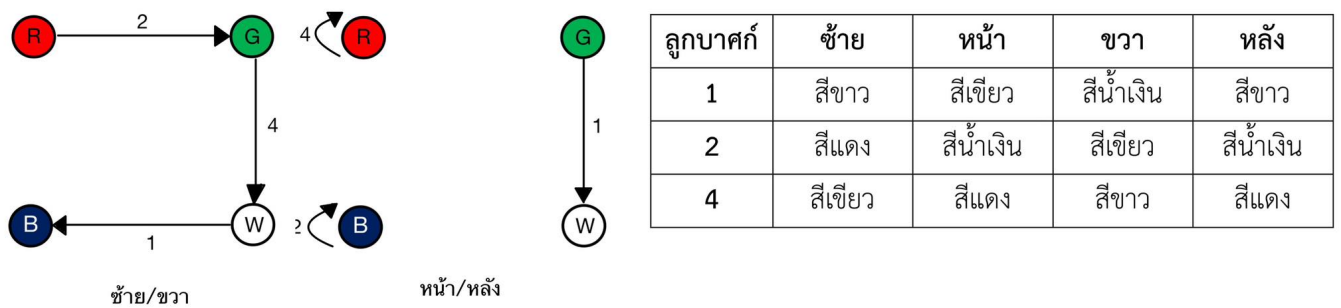
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
2	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีเขียว
4	สีแดง	สีน้ำเงิน	สีแดง	สีแดง

คู่ที่ 6



ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
2	สีแดง	สีน้ำเงิน	สีเขียว	สีน้ำเงิน
4	สีน้ำเงิน	สีแดง	สีแดง	สีแดง

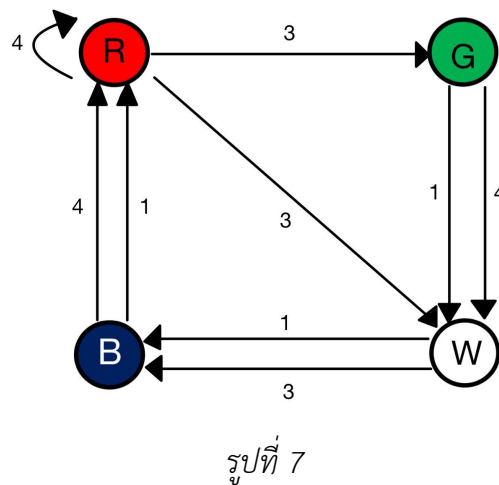
คู่ที่ 7



ในกรณีที่ 2 จะพิจารณาลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 จากการศึกษากรณีนี้ ทำให้ได้จำนวนวิธีของคำตอบทั้งหมด 7 คำตอบ นั่นคือสามารถเรียงลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ทั้งหมด 7 วิธี

กรณีที่ 3 : ลูกบาศก์ลูกที่ 1 + ลูกบาศก์ลูกที่ 3 + ลูกบาศก์ลูกที่ 4

สามารถสร้างกราฟรวมออกมาได้ดังรูปที่ 7



จากกราฟรวมสามารถเลือกเส้นจากลูกบาศก์ลูกที่ 1 ได้ 3 กรณีนั้นคือ กรณีที่ 1 $(1, B, R)$ กรณีที่ 2 $(1, W, B)$ และกรณีที่ 3 $(1, G, W)$

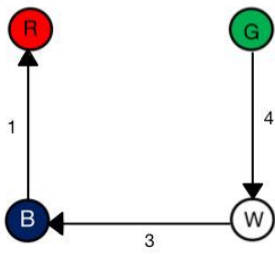
ในกรณีที่ 1 สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 3 ได้ทั้ง 3 แบบนั้นคือ $(3, W, B)$, $(3, R, W)$ และ $(3, R, G)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(3, W, B)$ และ $(1, B, R)$, $(3, R, W)$ และ $(1, B, R)$, $(3, R, G)$ ในส่วนของกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R)$, $(3, W, B)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้เพียงแบบเดียวคือ $(4, G, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้น

เชื่อม $(1, B, R), (3, W, B), (4, G, W)$ เป็นกราฟย่อยที่ 1 ในส่วนของกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (3, R, W)$ ไม่สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้เลย และกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (3, R, G)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 1 แบบคือ $(4, G, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, B, R), (3, R, G), (4, G, W)$ เป็นกราฟย่อยที่ 2

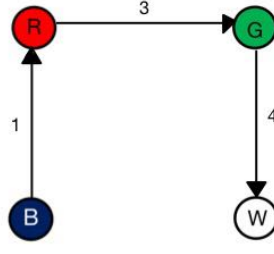
ส่วนในกรณีที่ 2 สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 3 ได้ 2 แบบคือ $(3, R, G)$ และ $(3, R, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (3, R, G)$ และ $(1, W, B), (3, R, W)$ ในส่วนของกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (3, R, G)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 2 แบบคือ $(4, B, R)$ และ $(4, G, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (3, R, G), (4, B, R)$ และ $(1, W, B), (3, R, G), (4, G, W)$ เป็นกราฟย่อยที่ 3 และกราฟย่อยที่ 4 ตามลำดับ ส่วนกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (3, R, W)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้เพียงเส้นเดียวคือ $(4, B, R)$ ดังนั้นจึงได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, W, B), (3, R, W), (4, B, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 5

และกรณีที่ 3 สามารถเลือกเส้นเชื่อมที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 3 ได้ 2 แบบคือ $(3, W, B)$ และ $(3, R, G)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (3, W, B)$ และ $(1, G, W), (3, R, G)$ ในกรณีที่ $(1, G, W), (3, W, B)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 2 แบบคือ $(4, B, R)$ และ $(4, R, R)$ ดังนั้นจึงได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (3, W, B), (4, B, R)$ และ $(1, G, W), (3, W, B), (4, R, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 6 และกราฟย่อยที่ 7 ตามลำดับ ส่วนกรณีที่ $(1, G, W), (3, R, G)$ สามารถเลือกเส้นเชื่อมที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้เพียงแบบเดียวคือ $(4, B, R)$ ดังนั้นจึงได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(1, G, W), (3, R, G), (4, B, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 8

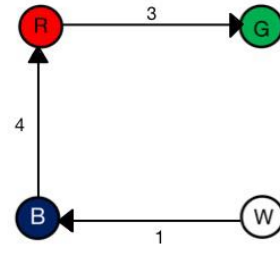
กราฟย่อยทั้ง 8 กราฟได้แก่



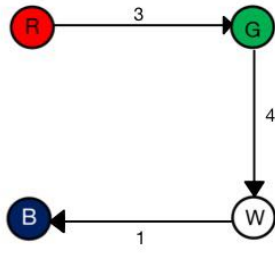
กราฟย่อย 1



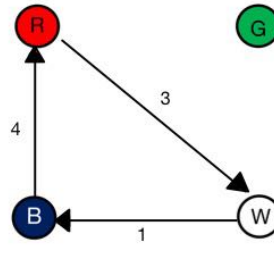
กราฟย่อย 2



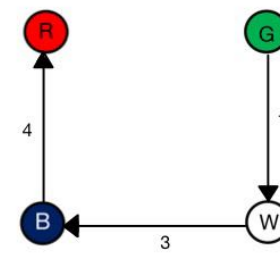
กราฟย่อย 3



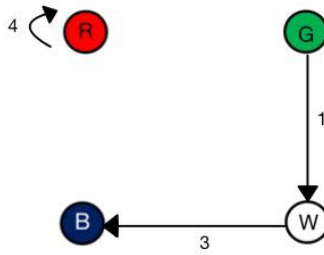
กราฟย่อย 4



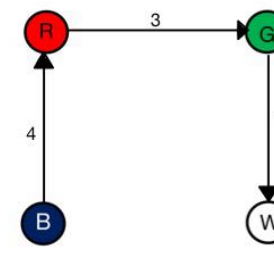
กราฟย่อย 5



กราฟย่อย 6



กราฟย่อย 7

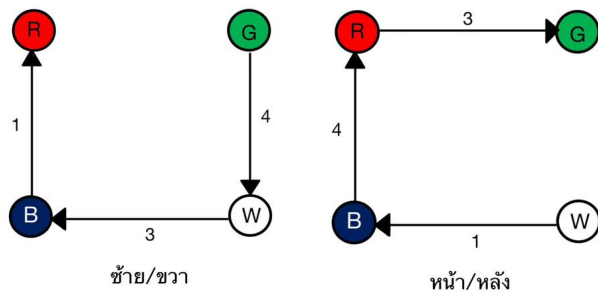


กราฟย่อย 8

จากทั้ง 3 กรณีสามารถจับคู่ G_{LR} และ G_{FB} ได้ 10 คู่ดังนี้ คู่ที่ 1 $(1, B, R), (3, W, B), (4, G, W)$ และ $(1, W, B), (3, R, G), (4, B, R)$ คู่ที่ 2 $(1, B, R), (3, W, B), (4, G, W)$ และ $(1, W, B), (3, R, W), (4, B, R)$ คู่ที่ 3 $(1, B, R), (3, W, B), (4, G, W)$ และ $(1, G, W), (3, R, G), (4, B, R)$ คู่ที่ 4 $(1, B, R), (3, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, W, B), (3, R, W), (4, B, R)$ คู่ที่ 5 $(1, B, R), (3, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, G, W), (3, W, B), (4, B, R)$ คู่ที่ 6 $(1, B, R), (3, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, G, W), (3, W, B), (4, R, R)$ คู่ที่ 7 $(1, W, B), (3, R, G), (4, B, R)$ และ $(1, G, W), (3, W, B), (4, R, R)$ คู่ที่ 8 $(1, W, B), (3, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, G, W), (3, W, B), (4, B, R)$ คู่ที่ 9 $(1, W, B), (3, R, G), (4, G, W)$ และ $(1, G, W), (3, W, B), (4, R, R)$ และคู่ที่ 10 $(1, W, B), (3, R, W), (4, B, R)$ และ $(1, G, W), (3, W, B), (4, R, R)$

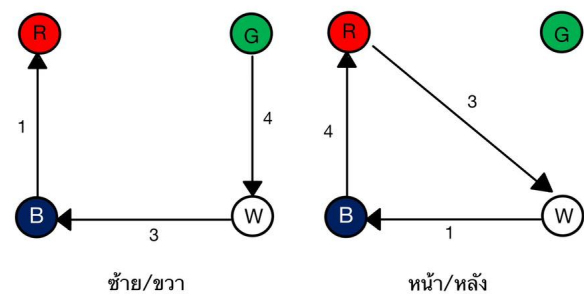
กราฟย่อยที่ใช้เป็น G_{LR} และ G_{FB} จำนวน 10 คู่ และตารางแสดงสีของลูกบาศก์ เป็นดังนี้

คู่ที่ 1



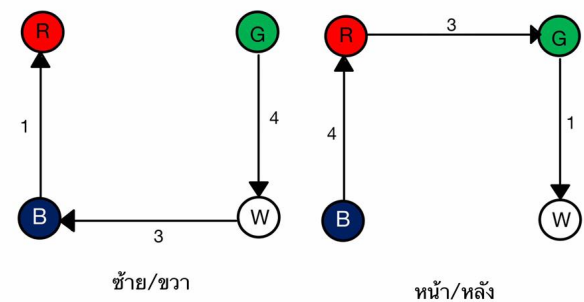
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง	สีน้ำเงิน
3	สีขาว	สีแดง	สีน้ำเงิน	สีเขียว
4	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 2



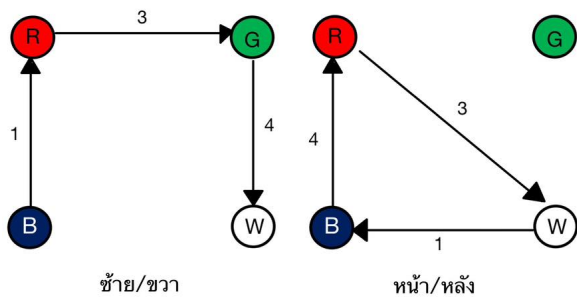
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง	สีน้ำเงิน
3	สีขาว	สีแดง	สีน้ำเงิน	สีขาว
4	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 3



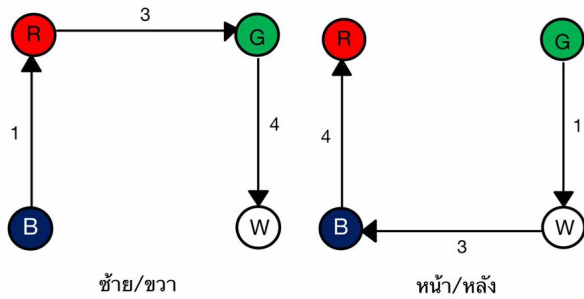
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีเขียว	สีแดง	สีขาว
3	สีขาว	สีแดง	สีเขียว	สีเขียว
4	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 4



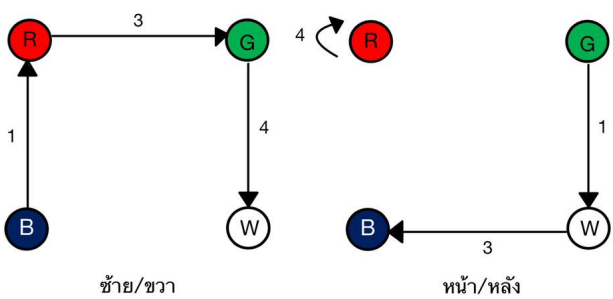
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง	สีน้ำเงิน
3	สีแดง	สีแดง	สีเขียว	สีขาว
4	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 5



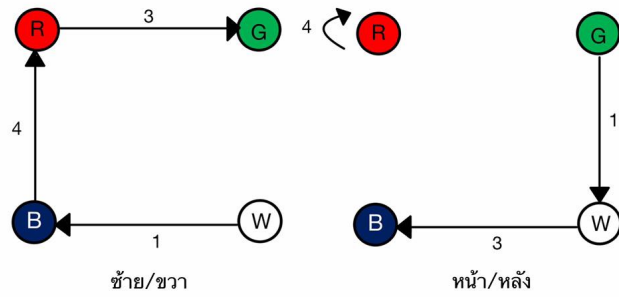
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีเขียว	สีแดง	สีขาว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน
4	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 6



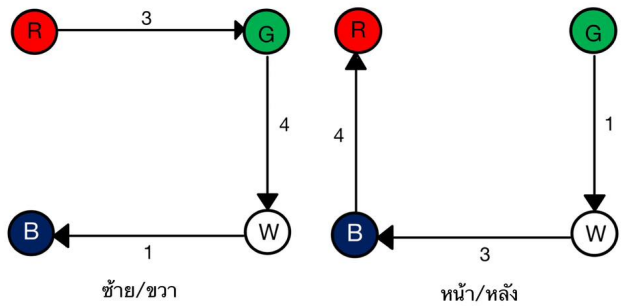
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีน้ำเงิน	สีเขียว	สีแดง	สีขาว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน
4	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 7



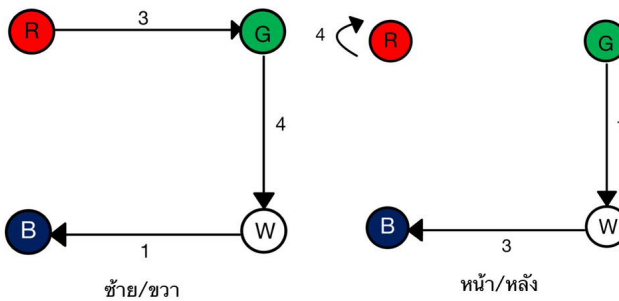
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน
4	สีน้ำเงิน	สีแดง	สีแดง	สีแดง

คู่ที่ 8

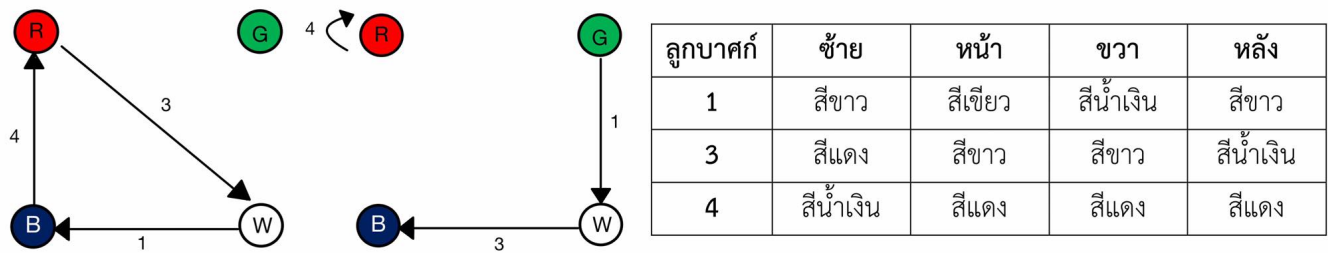


ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน
4	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว	สีแดง

คู่ที่ 9



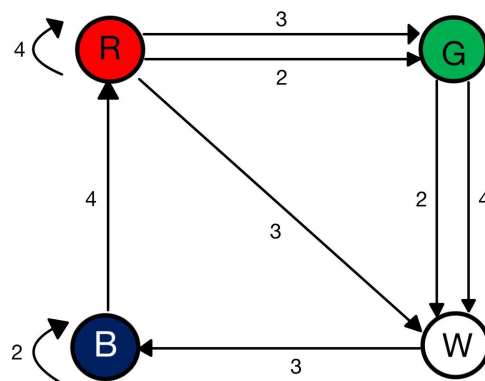
ลูกบาศก์	ซ้าย	หน้า	ขวา	หลัง
1	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน	สีขาว
3	สีแดง	สีขาว	สีเขียว	สีน้ำเงิน
4	สีเขียว	สีแดง	สีขาว	สีแดง



กรณีที่ 3 จากการศึกษาลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 3 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้จำนวนวิธีของคำตอบทั้งหมด 10 คำตอบ นั่นคือสามารถจัดเรียงลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 3 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ทั้งหมด 10 วิธี

กรณีที่ 4 : ลูกบาศก์ลูกที่ 2 + ลูกบาศก์ลูกที่ 3 + ลูกบาศก์ลูกที่ 4

สามารถสร้างกราฟรวมออกมาได้ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8

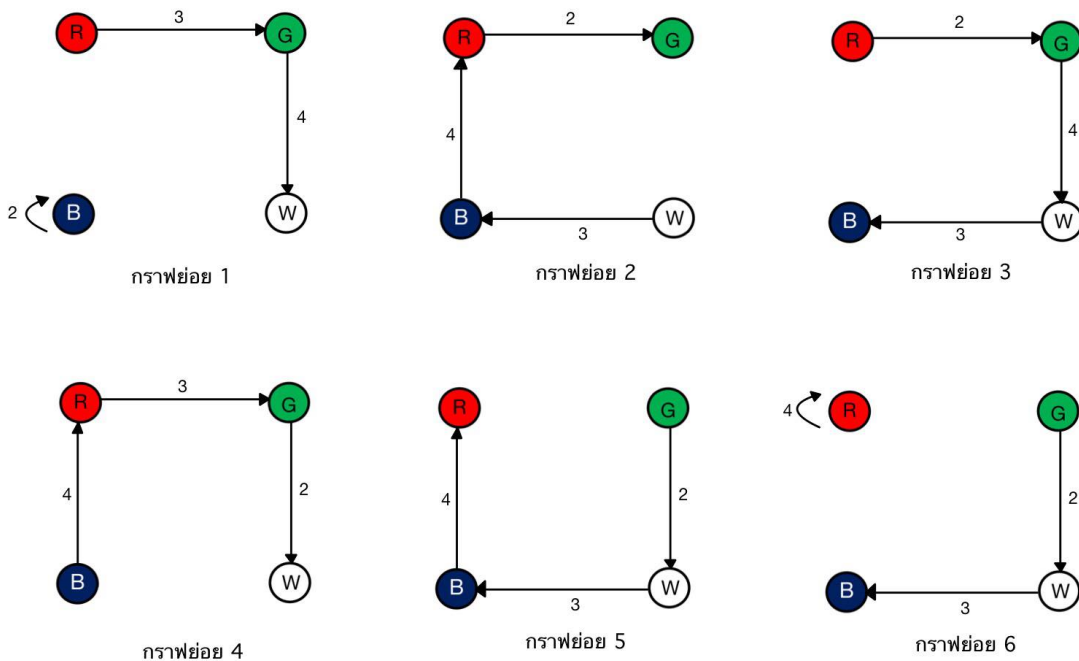
จากกราฟรวมสามารถเลือกเส้นทางที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 2 ได้ 3 กรณีคือ กรณีที่ 1 $(2, B, B)$ กรณีที่ 2 $(2, R, G)$ และกรณีที่ 3 $(2, G, W)$

กรณีที่ 1 $(2, B, B)$ สามารถเลือกเส้นทางที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 3 ได้ 2 แบบคือ $(3, R, G)$ และ $(3, R, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, B, B)$, $(3, R, G)$ และ $(2, B, B)$, $(3, R, W)$ ในส่วนของกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, B, B)$, $(3, R, G)$ สามารถเลือกเส้นทางที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้เพียง 1 แบบนั่นคือ $(4, G, W)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, B, B)$, $(3, R, G)$, $(4, G, W)$ เป็นกราฟย่อยที่ 1 ส่วนกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, B, B)$, $(3, R, W)$ ไม่สามารถเลือกเส้นทางที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้เลย

กรณีที 2 $(2, R, G)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 3 ได้เพียงแบบเดียว คือ $(3, W, B)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, R, G), (3, W, B)$ ซึ่งกราฟย่อยนี้ทำให้สามารถเลือกเส้นเชื่อมที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 2 แบบคือ $(4, B, R)$ และ $(4, G, W)$ ส่งผลให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, R, G), (3, W, B), (4, B, R)$ และ $(2, R, G), (3, W, B), (4, G, W)$ เป็นกราฟย่อยที่ 2 และกราฟย่อยที่ 3 ตามลำดับ

ในกรณีที่ 3 $(2, G, W)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 3 ได้ 2 แบบคือ $(3, R, G)$ และ $(3, W, B)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, G, W), (3, R, G)$ และ $(2, G, W), (3, W, B)$ ในส่วนของกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, G, W), (3, R, G)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 1 แบบคือ $(4, B, R)$ ทำให้ได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, G, W), (3, R, G), (4, B, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 4 ส่วนกราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, G, W), (3, W, B)$ สามารถเลือกเส้นที่มาจากลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ 2 แบบคือ $(4, B, R)$ และ $(4, R, R)$ ดังนั้นจะได้กราฟย่อยที่ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $(2, G, W), (3, W, B), (4, B, R)$ และ $(2, G, W), (3, W, B), (4, R, R)$ เป็นกราฟย่อยที่ 5 และกราฟย่อยที่ 6 ตามลำดับ

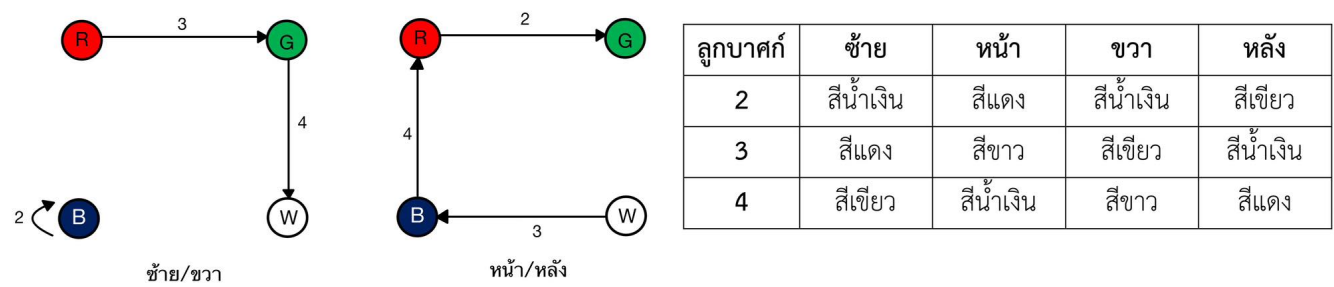
กราฟย่อยทั้ง 6 กราฟได้แก่



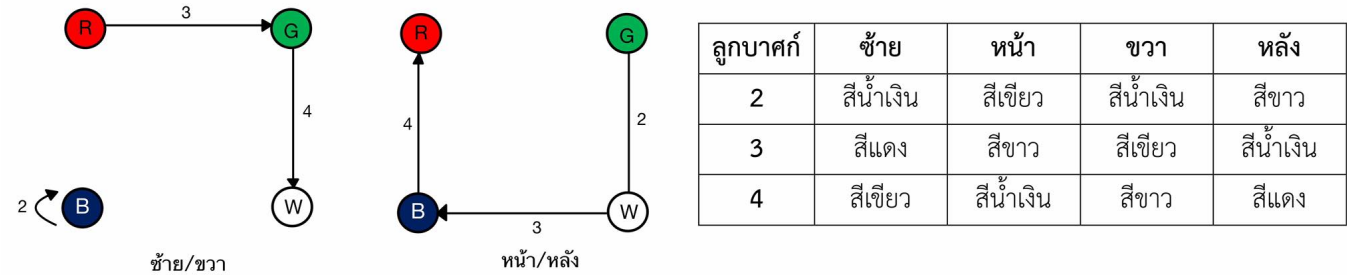
จากทั้ง 3 กรณีได้กราฟย่อยทั้งหมด 6 กราฟเมื่อนำมาจับคู่เป็น G_{LR} และ G_{FB} ได้ทั้งหมด 4 คู่ได้แก่คู่ที่ 1 $(2, B, B), (3, R, G), (4, G, W)$ และ $(2, R, G), (3, W, B), (4, B, R)$ คู่ที่ 2 $(2, B, B), (3, R, G), (4, G, W)$

และ $(2, G, W), (3, W, B), (4, B, R)$ คู่ที่ 3 $(2, B, B), (3, R, G), (4, G, W)$ และ $(2, G, W), (3, W, B), (4, R, R)$ และคู่ที่ 4 $(2, R, G), (3, W, B), (4, G, W)$ และ $(2, G, W), (3, R, G), (4, B, R)$

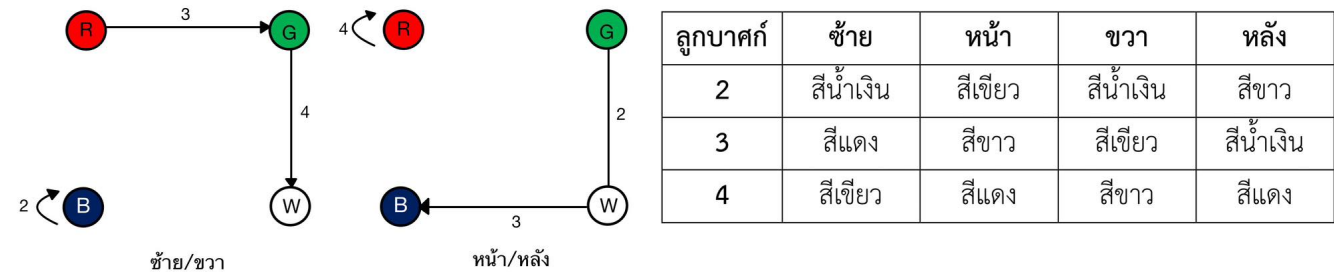
คู่ที่ 1



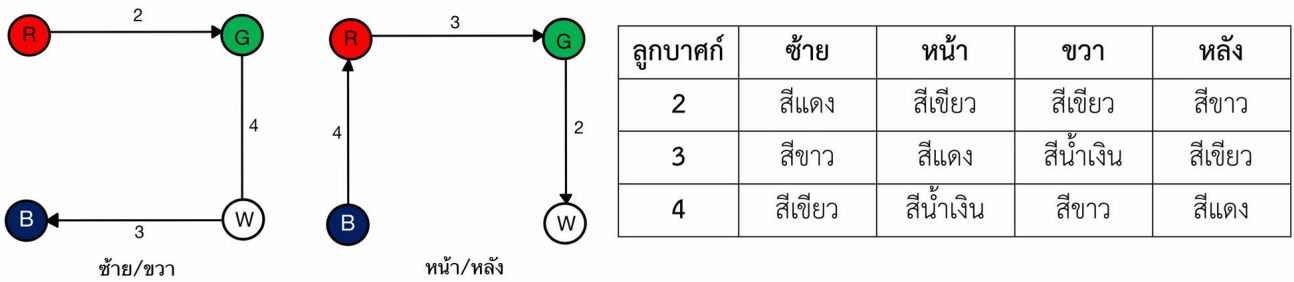
คู่ที่ 2



คู่ที่ 3



คู่ที่ 4



ในกรณีนี้ 4 นี้ศึกษาลูกบาศก์ลูกที่ 2 ลูกบาศก์ลูกที่ 3 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 ซึ่งได้จำนวนคำตอบของกรณีนี้คือ 4 คำตอบ นั่นคือจะสามารถเรียงลูกบาศก์ลูกที่ 2 ลูกบาศก์ลูกที่ 3 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 ได้ทั้งหมด 4 วิธี

บทที่ 4.

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จากการศึกษาหัวข้อ การแก้ปริศนา 3 ลูกบาศก์ 4 สีโดยทฤษฎีกราฟ ผู้ศึกษาได้ทำการศึกษาจากเกม Instant Insanity โดยทำการศึกษาลูกบาศก์ 3 ลูกจาก 4 ลูก โดยที่อ้างอิงการให้สีของลูกบาศก์ตามเกมมาตรฐาน ซึ่งทำให้สามารถแบ่งกรณีศึกษาออกเป็น 4 กรณีได้แก่

1. กรณีที่ 1 ประกอบด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 และลูกบาศก์ลูกที่ 3 โดยที่จำนวนคำตอบของกรณีนี้มีทั้งหมด 5 คำตอบ
2. กรณีที่ 2 ประกอบด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 2 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 ในกรณีนี้ได้คำตอบของปัญหานี้ทั้งหมด 7 คำตอบ
3. กรณีที่ 3 ประกอบด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 1 ลูกบาศก์ลูกที่ 3 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 ซึ่งได้คำตอบของกรณีนี้ทั้งหมด 10 คำตอบ
4. ในกรณีที่ 4 ประกอบด้วยลูกบาศก์ลูกที่ 2 ลูกบาศก์ลูกที่ 3 และลูกบาศก์ลูกที่ 4 มีคำตอบทั้งหมด 4 คำตอบ

ดังนั้น จากการศึกษาลูกบาศก์ 3 ลูกจาก 4 ลูกโดยแต่ละลูกประกอบด้วยสี 4 สี จะสามารถหาจำนวนวิธีที่สอดคล้องกับปัญหานี้ได้ทั้งหมด 26 วิธี



Solving a 4-colored 3-cube Puzzle by Graph Theory

Mr. Aummarin Maksook

Advisor: Asst. Prof. Dr. Piyashat Sripratak

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



Abstract

Instant Insanity is a puzzle with four 4-colored cubes. The goal of this puzzle is to arrange all 4 cubes to form a vertical tower. When consider the left side, right side, front side and back side of the tower, the faces of the cubes on the same side must have different colors. Instant Insanity inspires us to design a new puzzle and study it. We build tower using 3 out of 4 cubes and use graph theory to solve this puzzle. We can divide it into 4 cases as follows: case 1 is composed of cube number 1, cube number 2 and cube number 3; case 2 is composed of cube number 1, cube number 2 and cube number 4; case 3 is composed of cube number 1, cube number 3 and cube number 4; and case 4 is composed of cube number 2, cube number 3 and cube number 4.

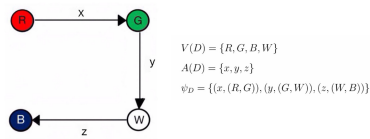
Objective

The goal of this puzzle is to arrange 3 out of 4 cubes to form a vertical tower with the property that when we consider the left side, the right side, the front side and the back side of the tower, the faces of the cubes on the same side must have different colors.

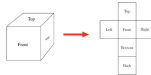
Preliminaries

Directed graph D is ordered triple $(V(D), A(D), \psi_D)$ that is composed of the non-empty set of vertices $V(D)$, the set of edges $A(D)$ and incident function ψ_D , where the incident function joins the edges of the graph D and ordered pairs of vertices. If a is an edge from u to v ; u is the tail of a and v is its head. [2]

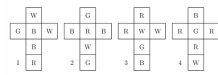
Example of a directed graph



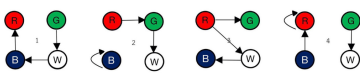
The net of cube [1]



The net of 4 cube [1]



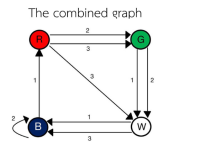
The graph constructed from the cubes



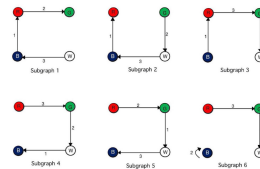
The rules of subgraph

1. The left side and the right side of the tower have three different colors. The corresponding subgraph G_{LR} must have 3 edges where each vertex is a head of no more than one edge and each vertex is a tail of no more than one edge.
2. The front side and the back side of the tower have three different colors. The corresponding subgraph G_{FB} must have 3 edges where each vertex is a head of no more than one edge and each vertex is a tail of no more than one edge.
3. For each cube, when choose any edge to be the left-right side, the other two edges cannot be the left-right side. Therefore, the other two edges must be the front-back side and the top-bottom side. Thus, G_{LR} and G_{FB} use edge from each cube once.
4. One pair of side cannot be the left-right side and the front-back at the same time, so there are no edges being in G_{LR} and G_{FB} at the same time. When we choose any subgraph to be G_{LR} , we cannot choose this subgraph to be G_{FB} .

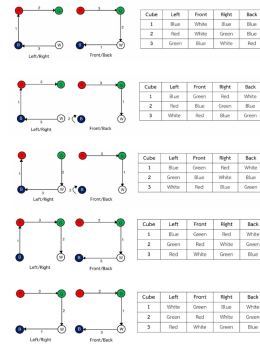
Case 1



The combined graph



The solution of Case 1.



Case 2

Cube	Left	Front	Right	Back
1	Blue	White	Red	White
2	Red	Green	Green	White
3	Green	Blue	White	Red

Case 3

Cube	Left	Front	Right	Back
1	Blue	White	Red	White
2	Red	Green	Green	White
3	Green	Blue	White	Red

Case 4

Cube	Left	Front	Right	Back
1	Blue	White	Red	White
2	Red	Green	Green	White
3	Green	Blue	White	Red

Reference

- [1] Beerler, R. A (2017). Instant Insanity (Supplemental Material for Intro to Graph Theory).
 [2] Bondy, J. A., and Murty, U. S. R. (1976). Graph theory with application. Ontario: The Macmillan Press Ltd.

บรรณานุกรม

- [1] Beerler, R. A (2017). Instant Insanity (Supplemental Material for Intro to Graph Theory).
- [2] Brown, T. A. (1968). A note on “Instant Insanity”. Mathematics Magazine, 41(1), 167-169.
- [3] Demaine, E. D., Demaine, M. L., Eisenstat, S., Morgan, T. D., and Uehae, R. (2013). Variations on instant insanity. Space-Efficient Data Structure, Streams, and Algorithms: Paper in Honor of J. Ian Munro on the Occasion of His 66th Birthday, 33-47.
- [4] Frasser, C. (2009). Graph Theory and Problem of Coloring Octahedron with six Colors as a Generalization of the Four-Colored Cube Game.
- [5] Grecos, A. P., and Gibberd, R. W. (1971). A diagrammatic solution to “Instant Insanity” problem. Mathematics Magazine, 44(3), 119-124
- [6] Bondy, J. A., and Murty, U. S. R. (1976). Graph theory with application. Ontario: The Macmillan Press Ltd.
- [7] Jebasingh, A., and Simoson, A. (2002). Platonic solid insanity. Congressus Numerantium, 101-112.
- [8] Schwartz, B. L. (1970). An improved solution to “Instant Insanity”. Mathematics Magazine, 43(1), 20-23.
- [9] Van Deventer, J. (2006, August). Graph theory and “Instant Insanity”. In The Many Facets of Graph Theory: Proceedings of the Conference held at Western Michigan University, Kalamazoo/MI., October 31-November 2, 1968 (pp. 283-286). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [10] บรรณานุกรม ใจพ่อ. (2562). แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์. เชียงใหม่ : หน่วยพิมพ์เอกสาร คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- [11] ปิยะฉัตร ศรีประทีป. (2565). เอกสารประกอบการสอนวิชา 206381 คณิตศาสตร์เชิงการจัด. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [12] สรศักดิ์ ลีรัตนาวลี และนที ทองศิริ. (2560). วิยุตคณิต. เชียงใหม่ : บริษัทกลางเวียงการพิมพ์ จำกัด.