

ไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียน
(Hyperbolic Narayana Quaternion)

นายพัฒนพงศ์ ทองสมนึก
รหัส 630510493

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ปีการศึกษา 2567

ไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเตอร์เนียน
(Hyperbolic Narayana Quaternion)

นายพัฒนพงศ์ ทองสมนึก
630510493

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2567

ไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเตอร์เนียน
(Hyperbolic Narayana Quaternion)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

นเรศวร ภูดลสิทธิ์พัฒน์

(รศ. ดร. นเรศวร ภูดลสิทธิ์พัฒน์)

ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร. ชนศักดิ์ หมวกทองกลาง)

กรรมการ

วันที่ 12 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาค้นคว้าอิสระ (206499) ตาม หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมี วัตถุประสงค์เพื่อให้ให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง ไฮเพอร์โบลิกนารายาณาควอเตอร์เนียมและสมบัติต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลิกนารายาณาควอเตอร์เนียม

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. นรวดี ภูตลสิทธิพัฒน์ อาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนะศักดิ์ หมวกทองกลาง กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระ ที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณาและตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นายพัฒนพงศ์ ทองสมนึก

หัวข้อ (ภาษาไทย) ไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียน
 (ภาษาอังกฤษ) Hyperbolic Narayana Quaternion
 ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นายพัฒนพงศ์ ทองสมนึก รหัสนักศึกษา 630510493
 ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รศ. ดร. นรวดี ภูตลสิทธิพัฒน์
 ชื่อกรรมการสอบ ผศ. ดร. ธนะศักดิ์ หมวกทองกลาง

บทคัดย่อ

ในการค้นคว้าอิสระนี้เราได้แรงบันดาลใจจากการศึกษาบทความของ Mac-Farlane เรื่อง ไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน เราได้นิยามไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียน และได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียนและสังยุคของมัน นอกจากนี้ เรายังหาคอร์มูลาสูตร Binet ผลรวมจำกัด และฟังก์ชันก่อกำเนิดของไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียน

In this independent study, we were inspired by studying Mac-Farlane's paper on hyperbolic quaternions. We defined hyperbolic Narayana quaternions and explored the relationship between hyperbolic Narayana quaternions and their conjugates. Additionally, we determined the norm, Binet formula, finite sum, and the generating function of hyperbolic Narayana quaternions.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	4
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main results)	6
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	13
บรรณานุกรม	14

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

ลำดับฟีโบนัชชีคือ ลำดับที่แต่ละตัวเลขเป็นผลรวมของตัวเลขสองตัวก่อนหน้า ตัวเลขที่เป็นส่วนหนึ่งของลำดับฟีโบนัชชีเรียกว่าตัวเลขฟีโบนัชชี ซึ่งโดยทั่วไปจะแทน ด้วย F_n ลำดับโดยทั่วไปเริ่มต้นจาก 0 และ 1 ลำดับฟีโบนัชชีถูกนำมาใช้ในสาขาวิทยาศาสตร์ต่าง ๆ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ และ สถาปัตยกรรมศาสตร์ ตัวอย่างเช่นการแก้ปัญหากระต่ายของฟีโบนัชชี “ถ้ากระต่ายหนึ่งคู่ออกลูกได้เดือนละคู่ และลูกกระต่ายสามารถแพร่พันธุ์ต่อได้ในเดือนที่สองหลังเกิด ผ่านไปหนึ่งปีจะมีกระต่ายกี่คู่” สามารถแก้ไขปัญหานี้ได้ด้วยสมการ

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$

Horadam [5] ได้ขยายจำนวนฟีโบนัชชี ดังนี้ สำหรับจำนวนจริงบวก p และ q ลำดับของจำนวน (p, q) -ฟีโบนัชชี กำหนดโดย

$$\mathcal{F}_n = p\mathcal{F}_{n-1} + q\mathcal{F}_{n-2}, \quad n \geq 2$$

โดยที่ $\mathcal{F}_0 = 0$, $\mathcal{F}_1 = 1$

ถ้า $p = 1 = q$ แล้วจะได้จำนวนฟีโบนัชชี

ถ้า $p = k$ และ $q = 1$ แล้วจะได้จำนวน k -ฟีโบนัชชี

จำนวนนารายณาได้ถูกแนะนำโดย นารายณานักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียในศตวรรษที่ 14 ขณะที่ศึกษาปัญหาฝูงวัวและลูกวัว ปัญหาวัวของนารายณาเป็นปัญหาที่คล้ายคลึงกับปัญหากระต่ายของฟีโบนัชชี ซึ่งให้ไว้ดังนี้ “วัวจะออกลูกหนึ่งตัวทุกปีและจะเริ่มออกลูกในปีที่สี่ โดยจะออกลูกหนึ่งตัวในช่วงต้นปีของแต่ละปี หลังจากผ่านไป 20 ปีจะมีลูกทั้งหมดกี่ตัว?” ปัญหานี้สามารถหาคำตอบได้ในลักษณะเดียวกับปัญหากระต่ายของฟีโบนัชชี ให้ n แทนจำนวนปี ปัญหาของนารายณาสามารถเขียนในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}, \quad n \geq 3 \tag{1.1}$$

โดยที่ $N_0 = 0$, $N_1 = 1$ และ $N_2 = 1$

จำนวนนารายณา 12 พจน์แรก คือ 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28,...

ลำดับนี้เรียกว่าลำดับนารายณา (หรือเรียกอีกอย่างว่าลำดับฟีโบนัชชี-นารายณาหรือลำดับวัวของนารายณา)

ควอเทอร์เนียนถูกแนะนำโดย เซอร์วิลเลียม โรวัน แฮมิลตัน [4] กลางศตวรรษที่ 19 เป็นตัวเลขไฮเพอร์คอมเพล็กซ์สี่มิติ ควอเทอร์เนียนถูกนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในด้านเทคโนโลยีขั้นสูง เช่น คอมพิวเตอร์กราฟิก การประมวลผลสัญญาณ หุ่นยนต์ และอื่น ๆ อีกมากมาย ควอเทอร์เนียนเป็นพีชคณิตที่มีสมบัติการจัดหมู่แต่ไม่มีสมบัติการสลับที่ภายใต้การคูณ ถูกนิยามดังนี้

$$H = \{q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

โดยที่ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, และ $\mathbf{k}$ เป็นหน่วยจินตภาพสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}$$

พีโบนัชชีควอเทอร์เนียนได้รับการศึกษาโดยผู้เขียนหลายคน ซึ่งนิยามดังนี้

$$QF_n = F_n + F_{n+1}\mathbf{i} + F_{n+2}\mathbf{j} + F_{n+3}\mathbf{k}$$

โดยที่ F_n คือจำนวนฟีโบนัชชีพจน์ที่ n

(p, q) -ฟีโบนัชชีควอเทอร์เนียนถูกนิยามโดย Ipek [6] คือ

$$QF_n = F_n + F_{n+1}\mathbf{i} + F_{n+2}\mathbf{j} + F_{n+3}\mathbf{k}$$

โดยที่ F_n คือจำนวน (p, q) -ฟีโบนัชชีพจน์ที่ n

อเล็กซานเดอร์ แมค-ฟาร์เลน [8] นิยามไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียนเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1891 ไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน เป็นจำนวนเชิงซ้อนสี่มิติ เช่นเดียวกับควอเทอร์เนียน แต่ไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียนไม่มีสมบัติการจัดหมู่และไม่มีสมบัติการสลับที่ภายใต้การคูณ ไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน [8] กำหนดโดย

$$K = \{q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

โดยที่ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, และ $\mathbf{k}$ เป็นหน่วยจินตภาพสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}$$

ให้ $p = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$ และ $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ แล้ว การบวก การลบ การคูณด้วยสเกลาร์ และการคูณ นิยามดังนี้

การบวกและการลบ

$$p \pm q = (p_0 \pm q_0) + \mathbf{i}(p_1 \pm q_1) + \mathbf{j}(p_2 \pm q_2) + \mathbf{k}(p_3 \pm q_3)$$

การคูณด้วยสเกลาร์

$$\lambda p = \lambda p_0 + \mathbf{i}\lambda p_1 + \mathbf{j}\lambda p_2 + \mathbf{k}\lambda p_3$$

การคูณ

$$pq = (p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + \mathbf{i}(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2) \\ + \mathbf{j}(p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1) + \mathbf{k}(p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)$$

โคซอล [7] ได้ศึกษาเรื่องไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน และคุณสมบัติพีชคณิตของพวกมัน

ในปี ค.ศ. 2018 อัยดิน [2] ได้ให้คำจำกัดความของไฮเพอร์โบลิก k -ฟีโบนัชชีควอเทอร์เนียน และได้ตรวจสอบสมบัติทางพีชคณิตบางประการของไฮเพอร์โบลิก k -ฟีโบนัชชีควอเทอร์เนียนอีกด้วย ในปีค.ศ. 2020 Yagmur ได้นิยามไฮเพอร์โบลิก (p, q) -ฟีโบนัชชีควอเทอร์เนียนดังนี้

$$HQ\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1}\mathbf{i} + \mathcal{F}_{n+2}\mathbf{j} + \mathcal{F}_{n+3}\mathbf{k}$$

โดยที่ $\mathcal{F}_n$ คือจำนวน (p, q) -ฟีโบนัชชี และ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ สอดคล้องกับ

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}$$

เป้าหมายของการค้นคว้าอิสระนี้คือ นิยามจำนวนไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียน และศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียน

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ทฤษฎีบท 2.1 [9] สูตร Binet ของจำนวนนารายนาพจน์ที่ n คือ

$$N_n = \frac{r^{n+1}}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+1}}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+1}}{(t-r)(t-s)}$$

โดยที่ r , s , และ t เป็นรากของสมการ $x^3 - x^2 - 1 = 0$

ทฤษฎีบท 2.2 ผลบวก $n + 1$ พจน์แรกของจำนวนนารายนา คือ

$$\sum_{k=0}^n N_k = N_{n+1} + N_n + N_{n-1} - 1$$

พิสูจน์. โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $p(n)$ แทนข้อความ

$$\sum_{k=0}^n N_k = N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n$$

จาก

$$\sum_{k=0}^1 N_k = N_0 + N_1 = 1 = N_2 + N_1 + N_0 - 1$$

ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

ให้ $m \in \mathbb{N}$ และ $p(m)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\sum_{k=0}^m N_k = N_{m+1} + N_m + N_{m-1} - 1$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} N_k &= \sum_{k=0}^m N_k + N_{m+1} = N_{m+1} + N_m + N_{m-1} - 1 + N_{m+1} \\ &= (N_{m+1} + N_{m-1}) + N_{m+1} + N_m - 1 \\ &= N_{m+2} + N_{m+1} + N_m - 1 \end{aligned}$$

นั่นคือ $p(m + 1)$ เป็นจริง



ทฤษฎีบท 2.3 [3] ให้ $n \geq 1$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n = N_{n+3} - 1$
2. $N_1 + N_4 + N_7 + \dots + N_{3n-2} = N_{3n-1}$
3. $N_2 + N_5 + N_8 + \dots + N_{3n-1} = N_{3n}$
4. $N_3 + N_6 + N_9 + \dots + N_{3n} = N_{3n+1} - 1$

บทนิยาม 2.4 [1] ให้ $\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ เป็นลำดับของค่าคงตัว และ $x \in \mathbb{R}$ แล้วอนุกรม

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, |x| < R$$

เราจะเรียกฟังก์ชัน $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ว่าฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) ของลำดับ $\{a_n\}$ เมื่อ R เป็นค่าที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main results)

ก่อนอื่นเราจะนิยามไฮเพอร์โบลิกนารายาณาควอเทอร์เนียน ดังนี้

บทนิยาม 3.1 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม ไฮเพอร์โบลิกนารายาณาควอเทอร์เนียน กำหนดโดย

$$HN_n = N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}$$

โดยที่ N_n คือจำนวนนารายาณาพจน์ที่ n และ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}$$

จำนวนไฮเพอร์โบลิกนารายาณาสามพจน์แรกคือ

$$HN_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad HN_1 = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad HN_2 = 1 + \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \dots$$

ให้ $HN_n = N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}$ และ $HN_m = N_m + N_{m+1}\mathbf{i} + N_{m+2}\mathbf{j} + N_{m+3}\mathbf{k}$ เป็นไฮเพอร์โบลิกนารายาณาควอเทอร์เนียน แล้วการบวก การลบ การคูณด้วยสเกลาร์ และการคูณนิยามดังนี้

การบวกและการลบ

$$HN_n \pm HN_m = (N_n \pm N_m) + \mathbf{i}(N_{n+1} \pm N_{m+1}) + \mathbf{j}(N_{n+2} \pm N_{m+2}) + \mathbf{k}(N_{n+3} \pm N_{m+3})$$

การคูณด้วยสเกลาร์

$$\lambda HN_n = \lambda N_n + \mathbf{i}\lambda N_{n+1} + \mathbf{j}\lambda N_{n+2} + \mathbf{k}\lambda N_{n+3}$$

การคูณ

$$\begin{aligned} (HN_n)(HN_m) = & (N_n N_m + N_{n+1} N_{m+1} + N_{n+2} N_{m+2} + N_{n+3} N_{m+3}) \\ & + \mathbf{i}(N_n N_{m+1} + N_{n+1} N_m + N_{n+2} N_{m+3} - N_{n+3} N_{m+2}) \\ & + \mathbf{j}(N_n N_{m+2} - N_{n+1} N_{m+3} + N_{n+2} N_m + N_{n+3} N_{m+1}) \\ & + \mathbf{k}(N_n N_{m+3} + N_{n+1} N_{m+2} - N_{n+2} N_{m+1} + N_{n+3} N_m) \end{aligned}$$

สังยุคของจำนวนไฮเพอร์โบลิกนารายาณาควอเทอร์เนียน นิยามดังนี้

$$\overline{HN_n} = N_n - N_{n+1}\mathbf{i} - N_{n+2}\mathbf{j} - N_{n+3}\mathbf{k}$$

ต่อไปเราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างไฮเพอร์โบลิกนารายาณาควอเทอร์เนียนและสังยุคของมัน

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$HN_n + \overline{HN_n} = 2N_n \quad (3.1)$$

$$HN_n - \overline{HN_n} = 2(HN_n - N_n) \quad (3.2)$$

$$HN_n(\overline{HN_n}) = N_n^2 - N_{n+1}^2 - N_{n+2}^2 - N_{n+3}^2 \quad (3.3)$$

พิสูจน์. พิจารณาสมการ (3.1) จะได้

$$\begin{aligned} HN_n + \overline{HN_n} &= (N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}) + (N_n - N_{n+1}\mathbf{i} - N_{n+2}\mathbf{j} - N_{n+3}\mathbf{k}) \\ &= 2N_n \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่าสมการ (3.2) เป็นจริง

$$\begin{aligned} HN_n - \overline{HN_n} &= (N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}) - (N_n - N_{n+1}\mathbf{i} - N_{n+2}\mathbf{j} - N_{n+3}\mathbf{k}) \\ &= 2(N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}) \\ &= 2(N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k} - N_n) \\ &= 2(HN_n - N_n) \end{aligned}$$

สุดท้ายจะแสดงว่าสมการ (3.3) เป็นจริง

$$\begin{aligned} HN_n(\overline{HN_n}) &= (N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k})(N_n - N_{n+1}\mathbf{i} - N_{n+2}\mathbf{j} - N_{n+3}\mathbf{k}) \\ &= N_n^2 - N_n N_{n+1}\mathbf{i} - N_n N_{n+2}\mathbf{j} - N_n N_{n+3}\mathbf{k} \\ &\quad + N_n N_{n+1}\mathbf{i} - (N_{n+1}\mathbf{i})^2 - N_{n+1} N_{n+2}\mathbf{ij} - N_{n+1} N_{n+3}\mathbf{ik} \\ &\quad + N_n N_{n+2}\mathbf{j} - N_{n+2} N_{n+1}\mathbf{ji} - (N_{n+2}\mathbf{j})^2 - N_{n+2} N_{n+3}\mathbf{jk} \\ &\quad + N_n N_{n+3}\mathbf{k} - N_{n+3} N_{n+1}\mathbf{ki} - N_{n+3} N_{n+2}\mathbf{kj} - (N_{n+3}\mathbf{k})^2 \\ &= N_n^2 - (N_{n+1}\mathbf{i})^2 - N_{n+1} N_{n+2}\mathbf{ij} - N_{n+1} N_{n+3}\mathbf{ik} - N_{n+2} N_{n+1}\mathbf{ji} - (N_{n+2}\mathbf{j})^2 \\ &\quad - N_{n+2} N_{n+3}\mathbf{jk} - N_{n+3} N_{n+1}\mathbf{ki} - N_{n+3} N_{n+2}\mathbf{kj} - (N_{n+3}\mathbf{k})^2 \\ &= N_n^2 - (N_{n+1}\mathbf{i})^2 - N_{n+1} N_{n+2}\mathbf{ij} - N_{n+1} N_{n+3}\mathbf{ik} + N_{n+2} N_{n+1}\mathbf{ij} - (N_{n+2}\mathbf{j})^2 \\ &\quad - N_{n+2} N_{n+3}\mathbf{jk} + N_{n+3} N_{n+1}\mathbf{ik} + N_{n+3} N_{n+2}\mathbf{jk} - (N_{n+3}\mathbf{k})^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } HN_n(\overline{HN_n}) = N_n^2 - N_{n+1}^2 - N_{n+2}^2 - N_{n+3}^2$$

□

บทแทรกต่อไปนี้จะให้สูตรนอร์มของไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเตอร์เนียน

บทแทรก 3.3 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$||HN_n|| = \sqrt{|N_n^2 - N_{n+1}^2 - N_{n+2}^2 - N_{n+3}^2|}$$

พิสูจน์. โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} ||HN_n|| &= \sqrt{HN_n(\overline{HN_n})} \\ &= \sqrt{|N_n^2 - N_{n+1}^2 - N_{n+2}^2 - N_{n+3}^2|} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } ||HN_n|| = \sqrt{|N_n^2 - N_{n+1}^2 - N_{n+2}^2 - N_{n+3}^2|}$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะให้สูตร Binet ของไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเตอร์เนียน

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$HN_n = \frac{r^{n+1}(1+ri+r^2j+r^3k)}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+1}(1+si+s^2j+s^3k)}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+1}(1+ti+t^2j+t^3k)}{(t-r)(t-s)}$$

โดยที่ r, s , และ t เป็นรากของสมการ $x^3 - x^2 - 1 = 0$

พิสูจน์. โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} HN_n &= N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{r^{n+1}}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+1}}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+1}}{(t-r)(t-s)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{r^{n+2}}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+2}}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+2}}{(t-r)(t-s)} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{r^{n+3}}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+3}}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+3}}{(t-r)(t-s)} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{r^{n+4}}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+4}}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+4}}{(t-r)(t-s)} \right) \mathbf{k} \\ &= \frac{r^{n+1}(1+ri+r^2j+r^3k)}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+1}(1+si+s^2j+s^3k)}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+1}(1+ti+t^2j+t^3k)}{(t-r)(t-s)} \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะพิจารณาผลรวมจำกัดของไฮเพอร์โบลิกนารายณาควเทอร์เนียน

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^n HN_k = HN_{n+1} + HN_n + HN_{n-1} - HN_1$$

พิสูจน์. โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n HN_k &= HN_0 + HN_1 + HN_2 + \dots + HN_n \\ &= (N_0 + N_1\mathbf{i} + N_2\mathbf{j} + N_3\mathbf{k}) + (N_1 + N_2\mathbf{i} + N_3\mathbf{j} + N_4\mathbf{k}) \\ &\quad + (N_2 + N_3\mathbf{i} + N_4\mathbf{j} + N_5\mathbf{k}) + \dots + (N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}) \\ &= (N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n) + \mathbf{i}(N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_{n+1}) \\ &\quad + \mathbf{j}(N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n+2}) + \mathbf{k}(N_3 + N_4 + N_5 + \dots + N_{n+3}) \\ &= \sum_{k=0}^n N_k + \mathbf{i} \sum_{k=0}^{n+1} N_k + \mathbf{j} \left(\sum_{k=0}^{n+2} N_k - 1 \right) + \mathbf{k} \left(\sum_{k=0}^{n+3} N_k - 2 \right) \\ &= (N_{n+1} + N_n + N_{n-1} - 1) + \mathbf{i}(N_{n+2} + N_{n+1} + N_n - 1) \\ &\quad + \mathbf{j}(N_{n+3} + N_{n+2} + N_{n+1} - 2) + \mathbf{k}(N_{n+4} + N_{n+3} + N_{n+2} - 3) \\ &= (N_{n+1} + N_{n+2}\mathbf{i} + N_{n+3}\mathbf{j} + N_{n+4}\mathbf{k}) + (N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}) \\ &\quad + (N_{n-1} + N_n\mathbf{i} + N_{n+1}\mathbf{j} + N_{n+2}\mathbf{k}) - (1 + \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= HN_{n+1} + HN_n + HN_{n-1} - HN_1 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^n HN_{3k} = HN_{3n+1} - 1 - \mathbf{k} \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=0}^n HN_{3k+1} = HN_{3n+2} - \mathbf{j} - \mathbf{k} \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=0}^n HN_{3k+2} = HN_{3n+3} - HN_0 \quad (3.6)$$

พิสูจน์. จะแสดงว่าสมการ (3.4) เป็นจริง โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n HN_{3k} &= HN_0 + HN_3 + HN_6 + \dots + HN_{3n} \\
&= (N_0 + N_1\mathbf{i} + N_2\mathbf{j} + N_3\mathbf{k}) + (N_3 + N_4\mathbf{i} + N_5\mathbf{j} + N_6\mathbf{k}) \\
&\quad + (N_6 + N_7\mathbf{i} + N_8\mathbf{j} + N_9\mathbf{k}) + (N_{3n} + N_{3n+1}\mathbf{i} + N_{3n+2}\mathbf{j} + N_{3n+3}\mathbf{k}) \\
&= (N_0 + N_3 + N_6 + \dots + N_{3n}) + (N_1 + N_4 + N_7 + \dots + N_{3n+1})\mathbf{i} \\
&\quad + (N_2 + N_5 + N_8 + \dots + N_{3n+2})\mathbf{j} + (N_3 + N_6 + N_9 + \dots + N_{3n+3})\mathbf{k} \\
&= (N_0 + N_3 + N_6 + \dots + N_{3n}) + (N_1 + N_4 + N_7 + \dots + N_{3(n+1)-2})\mathbf{i} \\
&\quad + (N_2 + N_5 + N_8 + \dots + N_{3(n+1)-1})\mathbf{j} + (N_3 + N_6 + N_9 + \dots + N_{3(n+1)})\mathbf{k} \\
&= (N_{3n+1} - 1) + (N_{3(n+1)-1})\mathbf{i} + (N_{3(n+1)})\mathbf{j} + (N_{3(n+1)+1} - 1)\mathbf{k} \\
&= (N_{3n+1} + N_{3n+2}\mathbf{i} + N_{3n+3}\mathbf{j} + N_{3n+4}\mathbf{k}) - 1 - \mathbf{k} \\
&= HN_{3n+1} - 1 - \mathbf{k}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่าสมการ (3.5) เป็นจริง โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n HN_{3k+1} &= HN_1 + HN_4 + HN_7 + \dots + HN_{3n+1} \\
&= (N_1 + N_2\mathbf{i} + N_3\mathbf{j} + N_4\mathbf{k}) + (N_4 + N_5\mathbf{i} + N_6\mathbf{j} + N_7\mathbf{k}) \\
&\quad + (N_7 + N_8\mathbf{i} + N_9\mathbf{j} + N_{10}\mathbf{k}) + (N_{3n+1} + N_{3n+2}\mathbf{i} + N_{3n+3}\mathbf{j} + N_{3n+4}\mathbf{k}) \\
&= (N_1 + N_4 + N_7 + \dots + N_{3n+1}) + (N_2 + N_5 + N_8 + \dots + N_{3n+2})\mathbf{i} \\
&\quad + (N_3 + N_6 + N_9 + \dots + N_{3n+3})\mathbf{j} + (N_4 + N_7 + N_{10} + \dots + N_{3n+4})\mathbf{k} \\
&= (N_1 + N_4 + N_7 + \dots + N_{3(n+1)-2}) + (N_2 + N_5 + N_8 + \dots + N_{3(n+1)-1})\mathbf{i} \\
&\quad + (N_3 + N_6 + N_9 + \dots + N_{3(n+1)})\mathbf{j} + (N_1 + N_4 + N_7 + N_{10} + \dots + N_{3(n+2)-2} - 1)\mathbf{k} \\
&= (N_{3(n+1)-1}) + (N_{3(n+1)})\mathbf{i} + (N_{3(n+1)+1} - 1)\mathbf{j} + (N_{3(n+2)-1} - 1)\mathbf{k} \\
&= (N_{3n+2} + N_{3n+3}\mathbf{i} + N_{3n+4}\mathbf{j} + N_{3n+5}\mathbf{k}) - \mathbf{j} - \mathbf{k} \\
&= HN_{3n+2} - \mathbf{j} - \mathbf{k}
\end{aligned}$$

สุดท้ายจะแสดงว่าสมการ (3.6) เป็นจริง โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n HN_{3k+2} &= HN_2 + HN_5 + HN_8 + \dots + HN_{3n+2} \\
 &= (N_2 + N_3\mathbf{i} + N_4\mathbf{j} + N_5\mathbf{k}) + (N_5 + N_6\mathbf{i} + N_7\mathbf{j} + N_8\mathbf{k}) \\
 &\quad + (N_8 + N_9\mathbf{i} + N_{10}\mathbf{j} + N_{11}\mathbf{k}) + (N_{3n+2} + N_{3n+3}\mathbf{i} + N_{3n+4}\mathbf{j} + N_{3n+5}\mathbf{k}) \\
 &= (N_2 + N_5 + N_8 + \dots + N_{3n+2}) + (N_3 + N_6 + N_9 + \dots + N_{3n+3})\mathbf{i} \\
 &\quad + (N_4 + N_7 + N_{10} + \dots + N_{3n+4})\mathbf{j} + (N_5 + N_8 + N_{11} + \dots + N_{3n+5})\mathbf{k} \\
 &= (N_2 + N_5 + N_8 + \dots + N_{3(n+1)-1}) + (N_3 + N_6 + N_9 + \dots + N_{3(n+1)})\mathbf{i} \\
 &\quad + (N_4 + N_7 + N_{10} + \dots + N_{3(n+2)-2} - 1)\mathbf{j} \\
 &\quad + (N_5 + N_8 + N_{11} + \dots + N_{3(n+2)-1} - 1)\mathbf{k} \\
 &= (N_{3(n+1)}) + (N_{3(n+1)+1} - 1)\mathbf{i} + (N_{3(n+2)-1} - 1)\mathbf{j} + (N_{3(n+2)} - 1)\mathbf{k} \\
 &= (N_{3n+3} + N_{3n+4}\mathbf{i} + N_{3n+5}\mathbf{j} + N_{3n+6}\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\
 &= HN_{3n+3} - HN_0
 \end{aligned}$$

□

บทตั้งต่อไปนี้จำเป็นสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.8

บทตั้ง 3.7 ให้ $n \geq 3$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$HN_n = HN_{n-1} + HN_{n-3}$$

พิสูจน์. โดยสมการ (1.1) จะได้

$$\begin{aligned}
 HN_n &= N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k} \\
 &= N_{n-1} + N_{n-3} + (N_n + N_{n-2})\mathbf{i} + (N_{n+1} + N_{n-1})\mathbf{j} + (N_{n+2} + N_n)\mathbf{k} \\
 &= N_{n-1} + N_{n-3} + N_n\mathbf{i} + N_{n-2}\mathbf{i} + N_{n+1}\mathbf{j} + N_{n-1}\mathbf{j} + N_{n+2}\mathbf{k} + N_n\mathbf{k} \\
 &= (N_{n-1} + N_n\mathbf{i} + N_{n+1}\mathbf{j} + N_{n+2}\mathbf{k}) + (N_{n-3} + N_{n-2}\mathbf{i} + N_{n-1}\mathbf{j} + N_n\mathbf{k}) \\
 &= HN_{n-1} + HN_{n-3}
 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.8 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของนารายณาควอเทอร์เนียน กำหนดโดย

$$\sum_{n=0}^{\infty} HN_n x^n = \frac{i+j+k+x(1+k)+x^2(j+k)}{1-x-x^3}$$

พิสูจน์.

ให้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} HN_n x^n = HN_0 + HN_1 x + HN_2 x^2 + HN_3 x^3 + \dots$$

แล้ว

$$\begin{aligned} xf(x) &= HN_0 x + HN_1 x^2 + HN_2 x^3 + HN_3 x^4 + \dots \\ x^3 f(x) &= HN_0 x^3 + HN_1 x^4 + HN_2 x^5 + HN_3 x^6 + \dots \end{aligned}$$

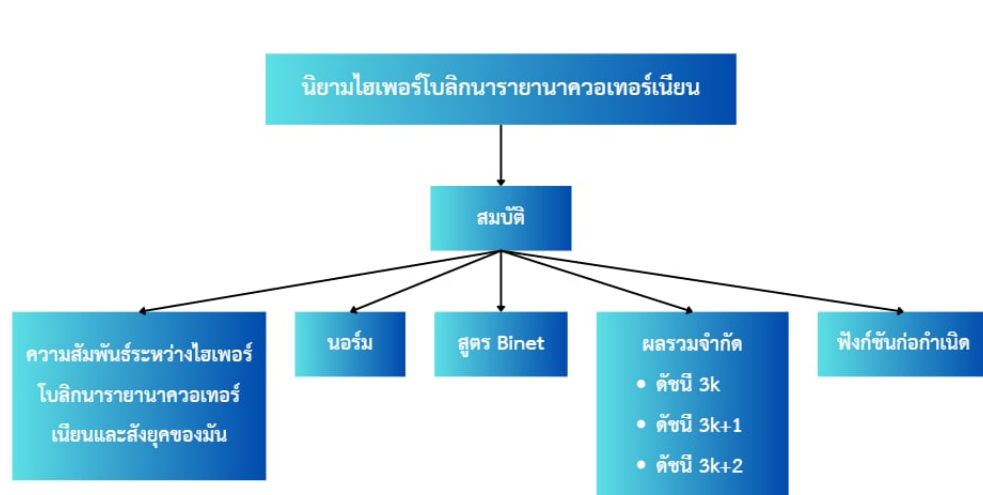
โดยบทตั้ง 3.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^3 f(x) &= HN_0 + x(HN_1 - HN_0) + x^2(HN_2 - HN_1) \\ &\quad + x^3(HN_3 - HN_2 - HN_0) + x^4(HN_4 - HN_3 - HN_1) + \dots \\ &= HN_0 + x(HN_1 - HN_0) + x^2(HN_2 - HN_1) \\ f(x)(1 - x - x^3) &= i+j+k + x(1+i+j+2k-i-j-k) \\ &\quad + x^2(1+i+2j+3k-1-i-j-2k) \\ f(x) &= \frac{i+j+k+x(1+k)+x^2(j+k)}{1-x-x^3} \end{aligned}$$

□

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)



ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้นิยามไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียนและได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียนและสังยุคของมัน ได้หาค่านอร์ม สูตร Binet ผลรวมจำกัด ผลรวมจำกัดโดยมีดัชนีเป็น $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$ และได้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดของไฮเพอร์โบลิกนารายานาควอเทอร์เนียน เพื่อเป็นการต่อยอดทฤษฎีใหม่ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตต่อไป

บรรณานุกรม

- [1] ไพศาล นาคมหาชาสินธุ์, วิชาญ ลีวักกิริตยุดกุล, คอมบินาทอริก, พิมพ์ครั้งที่ 1, มูลนิธิ สอวน, โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน, พ.ศ. 2548
- [2] Aydin, F. T., Hyperbolic k-Fibonacci quaternions, arXiv:1812.00781v1, 2018.
- [3] Flaut, C., Shpakivskyi, V. On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci–Narayana quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebr. 23(3), 673–688 (2013).
- [4] Hamilton, W.R., Elements of Quaternions, London Longmans Green, 1866.
- [5] Horadam, A. F., Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions, The American Math. Monthly 70 (1963), 289-291.
- [6] Ipek, A., On (p,q) -Fibonacci quaternions and their Binet formulas, generating functions and certain binomial sums, Adv. Appl. Clifford Algebras 27 (2017), 1343-1351.
- [7] Kosal, I. A., A note on hyperbolic quaternions, Universal Journal of Mathematics and Applications 1 (2018), 155-159.
- [8] Mac-Farlane, A., Hyperbolic quaternions, Proc. Roy. Soc. Edinburg 23 (1902), 169-180.
- [9] Narayana number. (2022, July). In Wikipedia. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Narayana_number.



HYPERBOLIC NARAYANA QUATERNION

Mr. Patthanapong Thongsomnuek student ID 630510493

Assoc. Prof. Dr. Narawadee Phudolsitthiphat

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

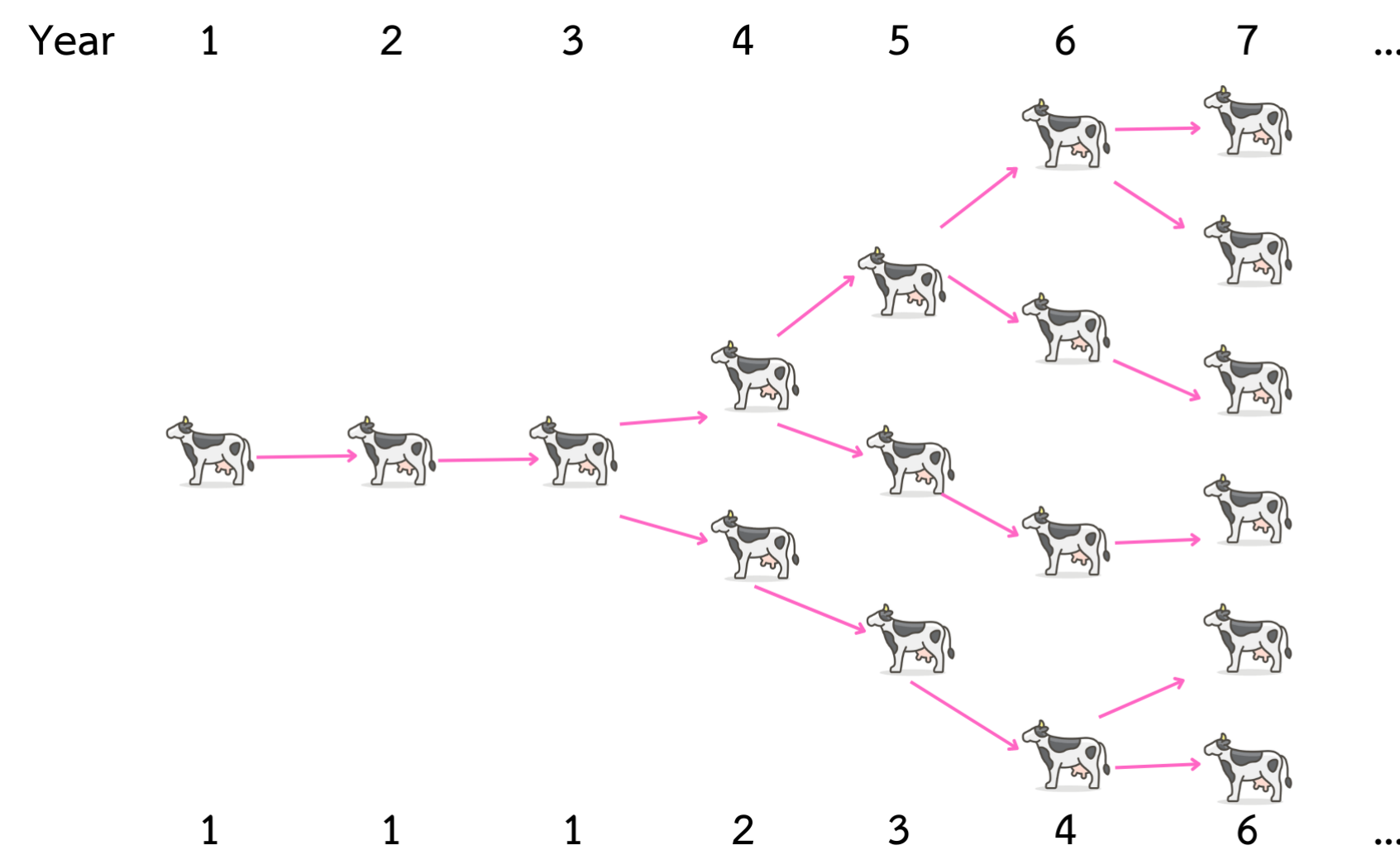


Abstract

In this independent study, we were inspired by studying Mac-Farlane's paper on hyperbolic quaternions. We defined hyperbolic Narayana quaternions and explored the relationship between hyperbolic Narayana quaternions and their conjugates. Additionally, we determined the norm, Binet formula, finite sum, and the generating function of hyperbolic Narayana quaternions.

1. Introduction

The Narayana numbers was introduced by the Indian mathematician Narayana in the 14th century, while studying the problem of a herd of cows and calves, Narayana's cows problem is a problem similar to the Fibonacci's rabbit problem which can be given as follows: A cow produces one calf every year and beginning in its fourth year, each calf produces one calf at the beginning of each year. How many calves are there altogether after 20 years?



This problem can be solved in the same way that Fibonacci solved its problem about rabbits. If n is the year, then the Narayana problem can be modelled by the recurrence

$$N_{n+3} = N_{n+2} + N_n, \quad n \geq 0,$$

where $N_0 = 0, N_1 = 1, N_2 = 1$

The first few terms are 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, ... This sequence is called Narayana sequence (also called Fibonacci-Narayana sequence or Narayana's cows sequence).

Alexander Mac-Farlane Örst described hyperbolic quaternions in 1891, and these numbers are not associative. Kurt Godel used the name of these quaternions in 1949, but the author actually implied split quaternions in his definition. Hyperbolic quaternions, just like real quaternions, are a generalization of complex numbers by four real numbers. Moreover, just like real quaternions, hyperbolic quaternions are not commutative, but hyperbolic quaternions have zero divisors.

2. Objective

1. To define the hyperbolic Narayana quaternion.
2. To study various properties of hyperbolic Narayana quaternions.

3. Definition

Let $n \geq 0$ be an integer. Hyperbolic Narayana quaternion is given by

$$HN_n = N_n + N_{n+1}\mathbf{i} + N_{n+2}\mathbf{j} + N_{n+3}\mathbf{k}.$$

where N_n are the nth Narayana number and $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ satisfy the equalities

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}.$$

The first few hyperbolic Narayana quaternion can be written as:

$$HN_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad HN_1 = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad HN_2 = 1 + \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \dots$$

4. Binet formula

Let $n \geq 0$ be an integer. Then

$$HN_n = \frac{r^{n+1}(1+r\mathbf{i}+r^2\mathbf{j}+r^3\mathbf{k})}{(r-s)(r-t)} + \frac{s^{n+1}(1+s\mathbf{i}+s^2\mathbf{j}+s^3\mathbf{k})}{(s-r)(s-t)} + \frac{t^{n+1}(1+t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k})}{(t-r)(t-s)}$$

where $r, s,$ and t are the roots of equation $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

5. Relationship between the hyperbolic Narayana quaternion and its conjugate.

Let $n \geq 0$ be an integer. Then

$$HN_n + \overline{HN_n} = 2N_n$$

$$HN_n - \overline{HN_n} = 2(HN_n - N_n)$$

$$HN_n(\overline{HN_n}) = N_n^2 - N_{n+1}^2 - N_{n+2}^2 - N_{n+3}^2.$$

6. Norm

Let $n \geq 0$ be an integer. Then

$$||HN_n|| = \sqrt{N_n^2 - N_{n+1}^2 - N_{n+2}^2 - N_{n+3}^2}.$$

7. Finite sum

Let $n \geq 0$ be an integer. Then

$$\sum_{k=0}^n HN_k = HN_{n+1} + HN_n + HN_{n-1} - HN_1$$

$$\sum_{k=0}^n HN_{3k} = HN_{3n+1} - 1 - \mathbf{k}$$

$$\sum_{k=0}^n HN_{3k+1} = HN_{3n+2} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\sum_{k=0}^n HN_{3k+2} = HN_{3n+3} - HN_0.$$

8. Generating function

The generating function of hyperbolic Narayana quaternion

$$\sum_{n=0}^{\infty} HN_n x^n = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + x(1 + \mathbf{k}) + x^2(\mathbf{j} + \mathbf{k})}{1 - x - x^3}.$$

Conclusion

In this independent study, we have defined the hyperbolic Narayana quaternion. The relationship between the hyperbolic Narayana quaternion and its conjugate has been shown. The norm, Binet formula, finite sum and the generating function of the hyperbolic Narayana quaternion were determined.

References

- [1]Aydin, F. T., Hyperbolic k-Fibonacci quaternions, arXiv:1812.00781v1, 2018.
- [2]Hamilton, W.R., Elements of Quaternions, London Longmans Green, 1866.
- [3]Ipek, A., On (p, q) -Fibonacci quaternions and their Binet formulas, generating functions and certain binomial sums, Adv. Appl. Clif ord Algebras 27 (2017), 1343-1351.
- [4] Kosal, I. A., A note on hyperbolic quaternions, Universal Journal of Mathematics and Applications 1 (2018), 155-159.
- [5]Mac-Farlane, A., Hyperbolic quaternions, Proc. Roy. Soc. Edinburg 23 (1902), 169-180.
- [6]Narayana number. (2022, July). In Wikipedia. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Narayana_number.