การแยกแบบพลวัตเพื่อการทำนาย

Dynamic mode decomposition for prediction

ปานฝน ยืนธรรม

รหัสนักศึกษา 620510509

รายงานค้นคว้าอิสระชิ้นนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2566

การแยกแบบพลวัตเพื่อการทำนาย

Dynamic mode decomposition for prediction

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

.....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรนุช บุนนาค)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กมลวรรณ ก่อเจริญ)

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษากระบวนวิชาค้นคว้าอิสระ 206499 (Independent Study) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้า ประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ

งานค้นคว้าอิสระชิ้นนี้ประสบความสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับการอนุเคราะห์ช่วยเหลือจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรนุช บุนนาค ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ให้คำปรึกษาและให้โอกาสข้าพเจ้าในการทำงานค้นคว้าอิสระชิ้นดังกล่าว และให้ความช่วยเหลือในการแนะนำ ให้ข้อมูล ความรู้ ทักษะ เทคนิคต่างๆ รวมถึงแนวทางการทำการค้นคว้าอิสระ อีกทั้งตรวจสอบความถูกต้องในการศึกษาอิสระนี้ให้แก่ข้าพเจ้า ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งจนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี ข้าพเจ้าตระหนักถึงความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์และขอกราบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กมลวรรณ ก่อเจริญ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ กรุณาให้ข้อเสนอแนะ ให้คำปรึกษา แก้ไขและให้แนวคิดต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้ดียิ่งขึ้น ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งจนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ทุกท่านที่ได้อบรม สั่งสอนและให้ความรู้ด้านคณิตศาสตร์อันเป็นประโยชน์ที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ให้แก่นักศึกษา ขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคน และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องที่คอยสนับสนุน ให้คำปรึกษา ช่วยเหลือในการทำการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้

สุดท้ายนี้หากการศึกษาค้นคว้าอิสระเล่มนี้จะมีประโยชน์แก่ผู้สนใจ ข้าพเจ้าขอมอบคำขอบคุณ ชื่นชมและคุณความดีให้แก่ครอบครัว ผู้ที่ให้การดูและเป็นกำลังใจที่สำคัญยิ่งในการทำการศึกษาค้าคว้าของข้าพเจ้า ครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนข้าพเจ้า ในส่วนของความผิดพลาดหรือข้อบกพร่องประการใด ข้าพเจ้าขอน้อมรับผิดไว้และยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้มาศึกษาเพื่อเป็นประโยชน์ในการพัฒนาการศึกษาค้นคว้าต่อไป

ปานฝน ยืนธรรม

หัวข้อ (ภาษาไทย) : การแยกแบบพลวัตเพื่อการทำนาย

(ภาษาอังกฤษ) : Dynamic mode decomposition for prediction

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ : นางสาวปานฝน ยืนธรรม

รหัสประจำตัวนักศึกษา : 620510509

ชื่อประธานกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรนุช บุนนาค

ชื่อกรรมการสอบ : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กมลวรรณ ก่อเจริญ

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและนำหลักการทำ DMD มาทำนายข้อมูลผ่าน MATLAB เพื่อวิเคราะห์ อภิปราย และวิจารณ์ผลที่ได้จากการทำนาย โดยศึกษาข้อมูลตัวอย่าง 3 ชุด คือ ชุดที่ 1 ข้อมูลผู้ป่วย COVID-19 ในประเทศไทย จากการศึกษาพบว่าไม่เหมาะที่จะใช้วิธี DMD ในการทำนาย เนื่องจากแนวโน้มของกราฟข้อมูลจากการทำนายและข้อมูลจริงไม่เป็นไปในทิศทางเดียวกัน ชุดที่ 2 ข้อมูล PM 2.5 ในจังหวัดเชียงใหม่ จากการศึกษาพบว่าไม่เหมาะที่จะใช้วิธี DMD ในการทำนาย เพราะค่าข้อมูลจากการทำนายและข้อมูลจริงมีความต่างกันมากในบางจุด และชุดที่ 3 ข้อมูลประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ จากการศึกษาพบว่ามีความเหมาะสมกับวิธี DMD เนื่องจากค่าข้อมูลจากการทำนายและข้อมูลจริงใกล้เคียงกัน โดยมีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเพียง 0.7818% และกราฟข้อมูลจากการทำนายและข้อมูลจริงมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน

Abstract

The objective of this independent study is to investigate the performance of Dynamic mode decomposition (DMD) in terms of prediction. Three sets of sample data are used in the study. The DMD is unsuccessful in determining the number of COVID-19 patients in Thailand. It was either significantly underestimated or overestimated. For the PM 2.5 data in Chiang Mai, DMD is successful in some intervals and ultimately fails in others. In the final set, the DMD predicted data for Chiang Mai's population accurately reflects the actual data, with a deviation of just 0.7818%, and the predicted data's trend is in line with the actual data.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ ก

บทคัดย่อ ข

สารบัญ ค

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำการค้นคว้าอิสระ 2

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ 2

1.4 ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ 2

1.5 ขั้นตอนการดำเนินการของการค้นคว้าอิสระ 3

บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน 4

2.1 เมทริกซ์เอกฐาน 4

2.2 เมทริกซ์คล้าย 4

2.3 การแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม 6

2.4 เมทริกซ์ผกผัน 7

2.5 เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุค 7

2.6 โพรบิเนียสนอร์ม (The Frobenius norm) 7

2.7 ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ 8

2.8 Singular Value Decomposition (SVD) 9

2.9 การแยกเชิงสเปกตรัม 14

2.10 ความคลาดเคลื่อน 16

บทที่ 3 วิธีการดำเนินโครงงาน 17

3.1 Dynamic Mode Decomposition (DMD) 17

3.2 วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม MATLAB 22

บทที่ 4 ผลการศึกษา 31

4.1 สรุปผลการศึกษา 31

4.2 อภิปรายผลการศึกษา 31

4.3 ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม 32

บรรณานุกรม 33

ภาคผนวก 34

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

การทำนาย หรือ การพยากรณ์ คือ การประมาณค่าหรือการคาดคะเนผลว่าจะเกิดอะไรขึ้นในอนาคต เช่น การทำนายยอดขายของปีหน้า การทำนายปริมาณฝนในเดือนตุลาคม การทำนายปริมาณนักท่องเที่ยวที่จะเข้ามาเที่ยวในประเทศไทยช่วงปีใหม่ เป็นต้น ซึ่งการทำนายมีบทบาทสำคัญกับทุกหน่วยงาน ทั้งหน่วยงานรัฐและเอกชน ซึ่งหน่วยงานต่าง ๆ เหล่านี้จำเป็นต้องอาศัยการทำนายเพื่อที่จะสามารถวางแผนหรือกำหนดนโยบายสำหรับการเตรียมพร้อมรับมือกับความไม่แน่นอนที่อาจเกิดขึ้นในอนาคต

การทำนาย หรือ การพยากรณ์ จะอาศัยการวิเคราะห์ข้อมูลในอดีต ข้อมูลปัจจุบันและจากประสบการณ์สามารถนำไปใช้ เพื่อให้ทราบถึงแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของสถานการณ์ หรือสภาพแวดล้อมที่จะมีผลในอนาคต ซึ่งการทำนายหรือการพยากรณ์ทางสถิติเป็นการพยากรณ์โดยใช้ข้อมูลทางสถิติ โดยใช้ข้อมูลสถิติประเภทที่เรียกว่าข้อมูลอนุกรมเวลาหรือข้อมูลย้อนหลังหลาย ๆ ปี เป็นเครื่องมือ การทำนายโดยวิธีนี้จะต้องศึกษาถึงพฤติการณ์ของเรื่องนั้น ๆ ที่เกิดขึ้นในอดีตว่ามีลักษณะอย่างไรก่อน แล้วจึงทำการทำนายข้อมูลอนุกรมเวลา โดยจะบอกให้ทราบถึงพฤติการณ์นั้น ๆ ซึ่งวิธีการทำนายทางสถิตินั้นก็ประกอบได้ด้วยหลากหลายวิธี เช่น วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ วิธีเอกซ์โพเนนเชียล วิธีบอกซ์เจนกินส์ วิธีตัวแบบถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เป็นต้น ซึ่งวิธีที่กล่าวมาถือว่าเป็นวิธีที่ถูกใช้งานอย่างแพร่หลาย แต่ในความเป็นจริงแล้วยังมีอีกหลายวิธีการทำนายที่ยังไม่นิยมนำมาใช้ อาจด้วยเหตุผลต่าง ๆ เช่น ยังไม่ได้รับการศึกษาที่มากพอ จึงทำให้ยังไม่ทราบว่าเหมาะสมที่จะนำมาใช้กับข้อมูลแบบใด หรืออาจจะยังไม่เข้าใจหลักการทำงานของวิธีอย่างแท้จริงจึงยังไม่ถูกเลือกมาใช้ในการทำนาย

ผู้ทำวิจัยได้เห็นว่ายังมีวิธีที่สามารถนำมาทำนายได้อีก คือ วิธีการแยกแบบพลวัต หรือ Dynamic mode decomposition (DMD) โดยงานค้นคว้าอิสระนี้ก็จะทำการศึกษาหลักการการทำ DMD ทั้งทางทฤษฎี และการใช้งาน โดยได้นำมาทำนายข้อมูลสถิติย้อนหลังผ่าน MATLAB ศึกษาพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อการทำนาย และนำผลลัพธ์ที่ได้มาทำการวิเคราะห์ อภิปราย และวิจารณ์ เพื่อที่จะปรับปรุงและหาผลที่ดีที่สุด แล้วสรุปว่าการทำนายนี้เหมาะสมที่จะนำไปทำนายต่อหรือไม่ ซึ่งจะใช้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนและแนวโน้มของกราฟระหว่างกราฟข้อมูลจากการทำนายและกราฟข้อมูลจริงเป็นเกณฑ์ในการบอกความเหมาะสม

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำการค้นคว้าอิสระ

1. เพื่อศึกษาหลักการ DMD
2. เพื่อศึกษาการใช้ DMD เพื่อการทำนายโดยใช้ MATLAB
3. เพื่อวิเคราะห์ อภิปราย และวิจารณ์ผลจากการใช้ DMD ในการทำนาย

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ

1. สามารถทำนายข้อมูลด้วยหลักการ DMD โดยใช้ MATLAB ได้
2. สามารถวิเคราะห์ อภิปราย และวิจารณ์ผลจากการใช้ DMD ในการทำนาย
3. สามารถปรับปรุง และหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับการใช้ DMD ในการทำนาย

1.4 ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

1. ข้อมูลสถิติ
    - ข้อมูลผู้ป่วย COVID-19 ในประเทศไทย จากองค์การอนามัยโลก เก็บข้อมูลเป็นรายวัน ตั้งแต่วันที่ 1 เมษายน พ.ศ. 2563 ถึงวันที่ 30 กันยายน พ.ศ. 2564 จำนวน 549 ข้อมูล
    - ข้อมูล PM 2.5 จากศูนย์วัดโรงเรียนยุพราชวิทยาลัย ตำบลศรีภูมิ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ เก็บข้อมูลเป็นรายวัน ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2564 ถึงวันที่ 30 เมษายน พ.ศ. 2564 จำนวน 120 ข้อมูล
    - ข้อมูลประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ เก็บข้อมูลเป็นรายเดือน ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ. 2545 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ. 2561 จำนวน 204 ข้อมูล
2. พารามิเตอร์ที่ใช้ในการศึกษา

    จำนวนข้อมูล จำนวนหลักของเมทริกซ์ จำนวนแถวของเมทริกซ์ และแรงค์ของเมทริกซ์ในขั้นตอนการทำ Singular value decomposition (SVD)

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษา ดำเนินการภายในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

1.5 ขั้นตอนการดำเนินการของการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาแนวคิด และวิธีการทำ DMD

2. ศึกษาวิธีการใช้โปรแกรม MATLAB

3. ค้นคว้าข้อมูลสถิติที่น่าสนใจมาทำการทำนายด้วยวิธี DMD

4. นำผลลัพธ์มาวิเคราะห์ อภิปราย และวิจารณ์ โดยเปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับข้อมูลการทำ DMD

5. ปรับพารามิเตอร์ที่ศึกษา เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์จากการทำ DMD

6. หาปัจจัยอื่นที่ส่งผลกับข้อมูลที่สนใจเพิ่ม และทำการวิเคราะห์ผลดูความแม่นยำของผลลัพธ์จากการใช้ DMD ในการทำนาย

7. สรุปผลการดำเนินการ

8. จัดทำรูปเล่ม

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 เมทริกซ์เอกฐาน

นิยาม 2.1.1 [9] ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$

A เป็น**เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)** เมื่อ $\det(A) = 0$

A เป็น**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix)** เมื่อ $\det(A) \neq 0$

นิยาม 2.1.2 [6] ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด $n \times n$ มี และ $AB = BA = I_n$ จะกล่าวว่า A เป็น**ตัวผกผันการคูณ (inverse)** ของ B เขียนแทนด้วย $A = B^{-1}$ หรือ B เป็น**ตัวผกผันการคูณ (inverse)** ของ A เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

2.2 เมทริกซ์คล้าย

นิยาม 2.2.1 [6] เมทริกซ์จัตุรัส A และ B ซึ่งมีมิติเดียวกัน เป็น**เมทริกซ์คล้าย (similar matrix)** ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P (non-singular matrix) ซึ่งทำให้ $B = P^{-1}AP$ หรือ $PB = AP$

ตัวอย่าง 2.2.2 จงแสดงว่า $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์คล้าย

วิธีทำ มีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ซึ่งทำให้ $PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

และ $AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $PB = AP$ หรือ $B = P^{-1}AP$

ดังนั้น A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย

<u>ทฤษฎีบท 2.2.3</u> [5] ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้ายที่มีมิติ $n \times n$ แล้ว A และ B จะมีพหุนามลักษณะเฉพาะเหมือนกัน ดังนั้น A และ B จะมีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

พิสูจน์ เนื่องจาก A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย

ดังนั้น จะมีเมทริกซ์ P ที่มีมิติ $n \times n$ และมีตัวผกผันสำหรับการคูณ P^{-1} ที่ทำให้ $B = P^{-1}AP$

จะได้ว่า $\det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n)$

$$= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I_n)P)$$
$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P)$$
$$= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P)$$
$$= \frac{1}{\det(P)}\det(A - \lambda I_n)\det(P)$$
$$= \det(A - \lambda I_n)$$

นั่นคือ A และ B มีพหุนามลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

เพราะฉะนั้น สมการลักษณะเฉพาะ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ และ $\det(B - \lambda I_n) = 0$ เป็นสมการเดียวกัน แสดงว่า A และ B มีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน ■

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย โดย $PA = BP$ และ P เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ และ A กับ B จะมีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

วิธีทำ พิจารณา $|P| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(7 + 5) + 3(-4 - 3)$$
$$= 3 \neq 0$$

ดังนั้น P จะหาตัวผกผันสำหรับการคูณได้

เนื่องจาก $PA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

และ $BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

แสดงว่า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย เพราะ $PA = BP$

ต่อมาจะแสดงว่า A และ B มีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

เนื่องจาก $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & -3 & -25 \\ 2 & 1-\lambda & 8 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (-6-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$
$$+(-25)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (-6-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 9) + 3(-2\lambda - 2) - 25(2 + 2\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$
$$= (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

จะได้ สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

โดยที่ค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = -1, 1, 2$

และเนื่องจาก $\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

จะได้ สมการลักษณะเฉพาะของ B คือ $(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0$

และค่าลักษณะเฉพาะของ B คือ $\lambda = -1, 1, 2$

นั่นคือ A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย และมีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

2.3 การแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

นิยาม 2.3.1 เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่า**ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ (diagonalizable)** ถ้า A คล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม D นั่นคือมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ที่ $P^{-1}AP = D$

ทฤษฎีบท 2.3.2 เมทริกซ์ $A_{n\times n}$ สามารถทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ ถ้า A มีเซตของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะครบ n

2.4 เมทริกซ์ผกผัน

นิยาม 2.4.1 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ $AB = BA = I$ แล้วจะกล่าวว่า A เป็น**เมทริกซ์ผกผัน หรือ อินเวอร์ส (inverse)** ของเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A = B^{-1}$ หรือ B เป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$ และถ้า A และ B ไม่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะเรียก A เป็น**ซูโด-อินเวอร์ส (pseudo-inverse)** ของเมทริกซ์ B

2.5 เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุค

เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุค หรือ คอนจูเกตทรานสโพส (conjugate transpose) ของเมทริกซ์ A มิติ $m \times n$ ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ A ซึ่งเปลี่ยนสมาชิกทั้งหมดเป็นสังยุค เขียนแทนด้วยเมทริกซ์ A^*

นิยาม 2.51 [11] ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติ $m \times n$ จะได้

$$(A^*)_{i,j} = \overline{A_{J,\imath}}$$

เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ และขีดเส้นตรงหมายถึงสังยุคจำนวนเชิงซ้อน

หรือเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$A^* = (\bar{A})^T = \overline{A^T}$$

ซึ่ง A^T คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน และ $\bar{A}$ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นสังยุค

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3+i & 5 \\ 2-2i & i \end{bmatrix}$

เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุคของเมทริกซ์ คือ $A^* = \begin{bmatrix} 3-i & 2+2i \\ 5 & -i \end{bmatrix}$

2.6 โพรบิเนียสนอร์ม (The Frobenius norm)

นิยาม 2.6.1 [12] โพรบิเนียสนอร์ม $\|\cdot\|_F : \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ สำหรับ $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ โดยที่

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2} = \sqrt{\mathbf{Tr}(A^T A)}$$

สัญลักษณ์ $\mathbf{Tr}(A)$ แทนเทรซของเมทริกซ์ A คือผลบวกในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ A หรือเท่ากับผลบวกของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ A

2.7 ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

นิยาม 2.7.1 [6] กำหนด A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ สเกลาร์ λ จะเรียกว่า **ค่าลักษณะเฉพาะ**ของ A ที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\vec{v}$ ถ้ามีเวกเตอร์ $\vec{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n$ ที่ทำให้ $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ เวกเตอร์ $\vec{v}$ เรียกว่า **เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ**ของ A ที่สมนัยกับ λ

[ระบบคลังข้อมูลทางวิชาการ BRU, เมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ]

ตัวอย่าง 2.7.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\lambda = 2$ จงแสดงว่า λ และ $\vec{v}$ เป็น eigenvalue และeigen vector ของ A ตามลำดับ

พิสูจน์ เนื่องจาก $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

เมื่อ $\lambda = 2$ จะได้ $\lambda\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

จะได้ว่า $\lambda = 2$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A สำหรับ $\lambda = 2$

จากตัวอย่าง 2.1.2 ถ้าให้ $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วจะได้ว่า $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2a \end{bmatrix}$ และ $\lambda\vec{v} = 2\vec{v} = 2\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2a \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

นั่นคือ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะเพียงค่าเดียวของ A ที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\vec{v}$ หรือกล่าวคือ สำหรับค่าลักษณะเฉพาะเพียงหนึ่งค่า จะมีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะได้หลายเวกเตอร์

นิยาม 2.7.3 [5] ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ และ λ เป็นสเกลาร์ใด ๆ จะเรียก $\det(A - \lambda I_n)$ ซึ่งเป็นพหุนามใน λ ว่า **พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial)** เรียกสมการ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)** และเรียกรากของสมการนี้ว่า **ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue)** ของเมทริกซ์ A

2.8 Singular Value Decomposition (SVD)

ถ้าเมทริกซ์ H มี m แถว n หลัก จะเรียก $m \times n$ ว่า**ขนาด (size)** หรือ **มิติ (dimension)** ของ H เขียนแทนด้วย $\dim H$

นิยาม 2.8.1 [10] กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ ขนาด $m \times n$ เราจะเรียก

สับสเปซของ $\mathbb{R}^n$ ที่สแปนด้วยเวกเตอร์แถว ว่า **สเปซแถว (row space)** ของ A

สับสเปซของ $\mathbb{R}^m$ ที่สแปนด้วยเวกเตอร์หลัก ว่า **สเปซหลัก (column space)** ของ A

สับสเปซของ $\mathbb{R}^n$ ที่เป็นผลเฉลยของ $AX = 0$ ว่า **นัลสเปซ (null space)** ของ A

เราเรียกมิติของปริภูมิหลักของเมทริกซ์ A ว่า**แรงก์ (rank) ของเมทริกซ์ A** เขียนแทนด้วย $\operatorname{rank} A$ และเราเรียกมิติของปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์ A ว่า**ศูนยภาพ (nullity) ของเมทริกซ์ A** เขียนแทนด้วย $\operatorname{nullity} A$ หรือ $\operatorname{nul} A$ นั่นคือ

$$\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Col} A) \text{ และ } \operatorname{nullity} A = \dim(\operatorname{Nul} A)$$

นิยาม 2.8.2 [10] กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เราเรียกมิติของสเปซแถว (หรือสเปซหลัก) ของ A ว่า **แรงค์(rank) ของ A** และเรียกมิติของนัลสเปซของ A ว่า**นัลลิตี (nullity) ของ A**

ข้อสังเกต ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มี n หลัก

1. $\operatorname{rank} A$ เป็นจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด เมื่อจัดให้อยู่ในรูป row echelon ได้แล้ว
2. ผลเฉลยของระบบสมการ $AX = 0$ จะมีจำนวนตัวพารามิเตอร์ เท่ากับ $\operatorname{nullity} A$
3. มิติ หรือ จำนวนสมาชิกของฐานของ null space ของ A เท่ากับ $\operatorname{nullity} A$

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะได้ว่า A^TA เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ n และต้องมีคุณสมบัติแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ให้ $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งของ $\mathbb{R}^n$ ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์เฉพาะของ A^TA และให้ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับแต่ละเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A^TA ส่งผลให้ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \|A\vec{v}_i\|^2 = (A\vec{v}_i)^T A\vec{v}_i &= \vec{v}_i^T A^T A\vec{v}_i \\ &= \vec{v}_i^T(\lambda_i \vec{v}_i) \\ &= \lambda_i \end{aligned}$$

ค่าลักษณะเฉพาะของ A^TA เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 และ $\sqrt{\lambda_i}$ เป็นความยาวของเวกเตอร์ $A\vec{v}_i$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

สังเกตว่าเราอาจเรียงอันดับค่าลักษณะเฉพาะของ A^TA ได้เป็น

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

เราเรียก $\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \geq \cdots \geq \sqrt{\lambda_n} \geq 0$ ว่า **ค่าเอกฐาน (singular values)** ของ A และกำหนดให้ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

ต่อไปสมมติว่า A มีค่าเอกฐานที่ต่างจาก 0 อยู่ r ตัว นั่นคือ $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ เพราะว่าเวกเตอร์ $\vec{v}_i$ และ $\lambda_j\vec{v}_j$ ตั้งฉากกันทุก $i \neq j$ จะได้ว่า

$$(A\vec{v}_i)^T(A\vec{v}_j) = \vec{v}_i^T A^T A\vec{v}_j = \vec{v}_i^T(\lambda_j\vec{v}_j) = 0$$

ดังนั้น $\mathcal{B} = \{A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก ส่งผลให้เซตนี้เป็นอิสระเชิงเส้น ซึ่งเราจะแสดงได้ว่า $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของ A โดยให้ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน A ดังนั้น จะมี $\vec{x}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ $\vec{y} = A\vec{x}$ เพราะว่า $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ ทำให้ มีสเกลาร์ $c_1, \dots, c_n$ ซึ่ง

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\vec{y} = A\vec{x} &= c_1A\vec{v}_1 + \cdots + c_rA\vec{v}_r + c_{r+1}A\vec{v}_{r+1} + \cdots + c_nA\vec{v}_n \\ &= c_1A\vec{v}_1 + \cdots + c_rA\vec{v}_r + \vec{0} + \cdots + \vec{0}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\vec{y}$ อยู่ใน $\operatorname{Span}\mathcal{B}$ ทำให้ได้ว่า $\{A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับหลักของ A และ $\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Col} A) = r$ โดย $\operatorname{Col} A$ แทนหลักของ A

เราสรุปจากการพิสูจน์ข้างต้นเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 2.8.3</u> [5] ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งของ $\mathbb{R}^n$ ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A^TA ซึ่งเรียงอันดับค่าลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับแต่ละเวกเตอร์เป็น $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ สมมติว่า A มีค่าเอกฐานที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ r ตัว จะได้ว่า $\{A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\operatorname{Col} A$ และ $\operatorname{rank} A = r$

[ยศนันต์ มีมาก, พีชคณิตเชิงเส้น 1, ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555, หน้า 121-127]

ตัวอย่าง 2.8.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าเอกฐานของ A

วิธีทำ เนื่องจาก $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$det(A^TA - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

ทำให้ได้สมการลักษณะเฉพาะของ A^TA คือ $(1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda)-2\big) = (1-\lambda)(\lambda-3)\lambda = 0$

จึงได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A^TA คือ $\lambda = 3, 1, 0$ เพราะฉะนั้น ค่าเอกฐานของ A คือ $\sigma = \sqrt{3}, 1, 0$ ตามลำดับ ■

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ **การแยกค่าเอกฐานของ** A **(singular value decomposition of** A**, SVD)** คือ การเขียน A เป็นผลคูณในรูปแบบ $A = U\Sigma V^T$ โดยที่ U มีมิติ $m \times m$ และ V มีมิติ $n \times n$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ ($U^TU = I_m$ และ $V^TV = I_n$) และ Σ เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ในรูปแบบ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

ซึ่ง D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $r \times r$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน m และ n ที่สมาชิกทแยงมุมทุกตัวของ D ไม่เท่ากับ 0 และตำแหน่งอื่น ๆ ใน Σ มีค่าเป็น 0 (สังเกตว่า $r = \text{rank}\, A$ เพราะว่า U และ V เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน)

สมมติว่าเรามีการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ A เป็น

$$A = U\Sigma V^T$$

จะได้ว่า $A^T = V\Sigma^T U^T$ และ

$$A^TA = (V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T\Sigma V^T$$

เพราะว่า $U^TU = I_m$

และเมทริกซ์ A^TA เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ ดังนั้น เราหาเมทริกซ์ V ได้จากการแปลงเมทริกซ์ A^TA เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก ซึ่งหลักของ V จะเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะต่าง ๆ ของ A^TA ที่เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย (เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 0 จะอยู่ในบรรดาหลักทาง

ขวามือสุดของเมทริกซ์ V) และ D จะเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทแยงมุมจากมุมบนซ้ายไปยังมุมล่างขวาเป็นค่าเอกฐานต่าง ๆ ที่เป็นบวกของ A ที่เรียงลำดับจากมากไปน้อย และหา U ได้จากความสัมพันธ์

$$AV = (U\Sigma V^T)V = U\Sigma$$

เพราะว่า $V^TV = I_n$

เพราะฉะนั้น เราสามารถหาการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ A มิติใด ๆ ได้เสมอจากการแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากของ A^TA ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตร และสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.8.5 [5] สำหรับเมทริกซ์ A ที่มีมิติ $m \times n$ และมีแรงค์เท่ากับ r จะมีเมทริกซ์ Σ มิติ $m \times n$ ในรูปแบบ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

ซึ่ง D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $r \times r$ ที่มีสมาชิกทแยงมุมจากมุมบนซ้ายไปยังมุมล่างขวาเป็นค่าเอกฐาน $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ ของ A และตำแหน่งอื่น ๆ ในเมทริกซ์ Σ มีค่าเป็น 0 และมีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ U มิติ $m \times m$ และเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ V มิติ $n \times n$ ซึ่งทำให้ $A = U\Sigma V^T$ ยิ่งกว่านั้น หลักของเมทริกซ์ V จะเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะต่าง ๆ ของ A^TA ที่เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย และเมทริกซ์ U หาได้จากความสัมพันธ์ $AV = U\Sigma$

หมายเหตุ ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งการแยกเอกฐานของ A มี

$$U = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \cdots \quad \vec{u}_m]_{m\times m}, D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \text{ และ } V = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n]_{n\times n}$$

เมื่อ $r = \operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$ และ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$

เนื่องจาก $r \leq m$ และ $AV = U\Sigma$ ทำให้เรามี $A\vec{v}_j = \sigma_j\vec{u}_j$ สำหรับทุก $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ จึงได้

$$\vec{u}_j = \frac{1}{\sigma_j}A\vec{v}_j \text{ สำหรับทุก } j \in \{1, 2, \dots, r\}$$

เพราะว่า $A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = U\Sigma\Sigma^T\Sigma U^T$ ดังนั้นหลักของ U จะเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะต่าง ๆ ของ A^TA ในกรณีที่ $r < m$ เราจึงหาเวกเตอร์ $\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_m$ ได้จากการหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ $\operatorname{Nul} AA^T$ ซึ่งคือเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ 0 และโดยทฤษฎีบท 2.8.5 ฐานหลักนี้จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ

$$\operatorname{nullity} AA^T = m - \operatorname{rank} AA^T = m - \operatorname{rank} A^TA = m - \operatorname{rank} A = m - r$$

ตัวอย่าง 2.8.6 จงหาการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เพราะว่า $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$\det(A^TA - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

ทำให้สมการลักษณะเฉพาะของ A^TA คือ $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

และได้ค่าลักษณะเฉพาะของ A^TA คือ $\lambda = 6, 1$

เพราะฉะนั้น ค่าเอกฐานของ A คือ $\sigma = \sqrt{6}, 1$

โดยทฤษฎีบท 2.8.5 ได้ว่า $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ต่อไป เราจะหาเมทริกซ์ V โดยการหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A^TA ที่สมนัยกับแต่ละค่าเฉพาะดังนี้

$\lambda = 6$ ดำเนินการแถวลดรูป $A^TA - 6I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^TA - 6I_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $x_1 + 2x_2 = 0$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A^TA - 6I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 1$ ดำเนินการแถวลดรูป $A^TA - I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^TA - 6I_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $-2x_1 + x_2 = 0$

ทำให้ได้ว่า $x_2 = 2x_1$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A^TA - I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

จึงสรุปได้ว่า $V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $AV = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -5 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

ดังนั้น $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-2\\ -5\\ 1\end{bmatrix}$ และ $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$

เราจะหา $\vec{u}_3$ ได้โดยการหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\text{Nul}\,(AA^T)$

เพราะว่า $A^TA = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ สมนัยกับระบบเชิงเส้น $\begin{matrix}x_1 + 2x_3 = 0\\ x_2 - x_3 = 0\end{matrix}$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_3$ และ $x_2 = x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2x_3\\ x_3\\ x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(AA^T) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

เพราะฉะนั้น $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ และ $U = \begin{bmatrix}-2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6}\\ -5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$

ทำให้เราได้การแยกเอกฐานของเมทริกซ์ A คือ

$$A = \begin{bmatrix}-2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6}\\ -5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}-2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6}\\ -5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{6}\begin{bmatrix}-2/\sqrt{30}\\ -5/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\ 0\\ 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

2.9 การแยกเชิงสเปกตรัม

สเปกตรัม (spectrum) ของเมทริกซ์ A หมายถึง เซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ A แทนด้วย $\sigma(A)$

<u>ทฤษฎีบท 2.9.1</u> [5] ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์สมมาตร A มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. ค่าลักษณะเฉพาะทุกตัวของ A เป็นจำนวนจริง

2. มิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ มีค่าเท่ากับจำนวนการซ้ำกันของราก λ ในสมการลักษณะเฉพาะ

3. ปริภูมิเฉพาะสองปริภูมิซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะที่ต่างกันจะตั้งฉากกัน

4. A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้

ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ ดังนั้น A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ทำให้มีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ P ซึ่งทำให้ $A = PDP^T$ โดยที่หลักของเมทริกซ์ P คือเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะหนึ่งหน่วย $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \dots, \vec{\lambda}_n$ (ซ้ำได้) ซึ่งเป็นสมาชิกทแยงมุมของเมทริกซ์ทแยงมุม D และ

$$A = PDP^T = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \dots \quad \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_1\vec{u}_1 \quad \lambda_2\vec{u}_2 \quad \dots \quad \lambda_n\vec{u}_n] \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix}$$

นั่นคือ เราสามารถเขียน A ได้ในรูป

$$A = \lambda_1\vec{u}_1\vec{u}_1^T + \lambda_2\vec{u}_2\vec{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n\vec{u}_n^T$$

เรียกว่า **การแยกเชิงสเปกตรัม (spectral decomposition)** ของเมทริกซ์ A โดยแต่ละพจน์ในการแยกนี้จะขึ้นกับค่าลักษณะเฉพาะหรือสเปกตรัมและเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ซึ่งมีแรงค์เป็น 1 (สังเกตว่า $\text{Col}\,(\vec{u}_i\vec{u}_i^T) = \text{Span}\,\{\vec{u}_i\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$)

ตัวอย่าง 2.9.2 เมทริกซ์สมมาตร A ซึ่ง

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

มีการแยกเชิงสเปกตรัมเป็น

$$A = 8 \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= 8 \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

■

2.10 ความคลาดเคลื่อน

ความคลาดเคลื่อน (error) หรือ static error คือ ผลต่างระหว่างค่าที่วัดได้กับค่าที่แท้จริง โดยทั่วไปแสดงเป็นเปอร์เซ็นต์ (%) ถ้าค่าที่วัดได้ใกล้เคียงกับค่าจริงมาก แสดงว่าการวัดนั้นมีความแม่นยำหรือความถูกต้อง (accuracy) สูง

ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (absolute error) คือ ค่าปริมาณความแตกต่างระหว่างค่าจริงกับค่าที่ได้จากการวัด สามารถหาได้จากสมการ

$$\text{Absolute error} = |x_{measure} - x_t|$$

ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) สามารถหาได้จากสมการ

$$\text{Relative error} = \left| \frac{x_{measure} - x_t}{x_t} \right|$$

$$\%\ \text{error} = \text{Relative error} \times 100$$

โดยที่ x_t คือ ค่าจริง (True value)

$x_{measure}$ คือ ค่าที่ได้จากการวัด (Measure value)

บทที่ 3

วิธีการดำเนินโครงงาน

วิธีดำเนินงานค้นคว้าอิสระนี้เริ่มต้นจากการศึกษาหลักการการทำ DMD จากนั้นจึงทำการสืบค้นข้อมูลสถิติย้อนหลังที่น่าสนใจผ่านทางเว็บไซต์สำนักงานสถิติต่าง ๆ เพื่อนำข้อมูลนั้นมาทำการทำนายด้วยวิธี DMD ผ่านโปรแกรม MATLAB

3.1 Dynamic Mode Decomposition (DMD)

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = f(\vec{x}(t), t)$$

เมื่อ $\vec{x}$ เป็นเวกเตอร์ และ f เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ที่ขึ้นอยู่กับ $\vec{x}$ และ t โดยที่ f อาจเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่ยากในการหาคำตอบ

เมื่อต้องการศึกษาพฤติกรรมของ $\vec{x}(t)$ จะศึกษาจากระบบสมการที่ทำให้เป็นเชิงเส้นในรูป

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = Ax \qquad (1)$$

โดยที่คำตอบของ (1) คือ $x(t_0 + t) = e^{At}x(t_0)$

ซึ่งคำตอบนี้จะดูพฤติกรรมได้จากค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector)

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

ให้ $\vec{x} = \vec{\phi}_i e^{\lambda_i t}$ $\left(\lambda_i, \vec{\phi}_i\right)$ เป็นคู่ลักษณะเฉพาะของ A

ระบบสมการนี้มีคำตอบคือ $\vec{x}(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j \vec{\phi}_j e^{\lambda_j t}$ จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t)$

จะสามารถสร้างระบบสมการเชิงเส้น $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ โดยการใช้ข้อมูลได้อย่างไร

สมมติเราสามารถวัดค่าของ $\vec{x}$ ที่เวลา t ใด ๆ ได้ ให้ $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$ คือ ค่าของ $\vec{x}$ ที่ เวลา t_i

สร้างเมทริกซ์โดยใช้ค่าที่วัดได้

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_{m-1}]$$
$$X' = [\vec{x}_2 \quad \vec{x}_3 \quad \cdots \quad \vec{x}_m]$$

ให้สังเกตการเลื่อนของข้อมูลในหลักที่สอดคล้องกันของเมทริกซ์ X และ X'

$$\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2$$
$$\vec{x}_2 \rightarrow \vec{x}_3$$
$$\vec{x}_{m-1} \rightarrow \vec{x}_m$$

ข้อมูลใน X' จะเป็นข้อมูลตัวเดียวกันกับข้อมูล X แต่จะทำการเลื่อนไปหนึ่งขั้นเสมอ ไปจนถึงข้อมูลตัวที่ m

เราจะสร้างระบบสมการเชิงเส้น $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

จึงต้องการหา A ที่จะส่ง $\vec{x}$ จากสถานะหนึ่งไปอีกสถานะหนึ่ง

$$X' = AX$$

เมื่อพิจารณาการส่งต่าง ๆ $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ จะได้

$$A = \underset{A}{\operatorname{argmin}} \|X' - AX\|_F = X'X^{\dagger}$$

โดยที่ $\|\cdot\|_F$ คือ โฟรบิเนียสนอร์ม

$X^{\dagger}$ คือ ซูโด-อินเวอร์ส

เรียก $A = X'X^{\dagger}$ ว่า “exact DMD”

สมมติ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ และ X คือ เมทริกซ์ขนาด $n \times m$ โดยทั่วไป $m \ll n$

A จึงมีค่าเอกฐานที่ไม่เป็นศูนย์อย่างมาก m ค่า ดังนั้น $rank(A) \leq m$

Algorithm ในการหา A

ขั้นตอนที่ 1 หา singular value decomposition (SVD) ของ X

$$X = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$$

เมื่อ $\tilde{U} \in \mathbb{C}^{n\times r},\ \tilde{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r\times r},\ \tilde{V} \in \mathbb{C}^{m\times r},\ r \leq m \ll n$

หลักของ $\tilde{U}$ เรียกว่า POD mode และ $\tilde{U}^*\tilde{U} = I$

หลักของ $\tilde{V}$ ตั้งฉากกัน และ $\tilde{V}^*\tilde{V} = I$

โดย A^* แทนคอนจูเกตทรานสโพสของ A

และในทางปฏิบัติแล้วการเลือก r ที่เหมาะสมเป็นส่วนสำคัญของ DMD

ขั้นตอนที่ 2 ถ้าต้องการใช้ $r = m$ สามารถหา A ได้โดยการหา pseudo-inverse ของ X

$$A = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^*$$

แต่ถ้าสนใจแค่ r ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ จะใช้

$$\tilde{A} = \tilde{U}^* A\tilde{U} = \tilde{U}^* X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}$$

เมทริกซ์ $\tilde{A}$ มีจำนวนค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่เป็นศูนย์เท่ากับของ A ($\tilde{A}$ และ A เป็นเมทริกซ์คล้าย) และใช้ $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ ในการประมาณ $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}(t_{k+1})$ ในเวลาถัดไปได้

ขั้นตอนที่ 3 ใช้การแยกเชิงสเปกตรัมแยก $\tilde{A}$ ในรูป

$$\tilde{A}W = W\Lambda$$

โดยที่ สมาชิกในแนวทแยงของ Λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ DMD

หลักของ W เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

ขั้นตอนที่ 4 ใช้เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่อยู่ใน W สร้างเมทริกซ์ Φ

$$\Phi = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W \qquad (\text{ขนาด } n \times r)$$

เรียก Φ ว่า DMD mode

พิจารณา

$$A\Phi = (X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\underbrace{\tilde{U}^{*})(X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}}_{\tilde{A}}W)$$

$$= X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{A}W$$

$$= X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W\Lambda$$

$$= \Phi\Lambda$$

แสดงว่า DMD mode เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

ให้ $\vec{b} = \Phi^{\dagger}x_1$

$\vec{b}$ เรียกว่า mode amplitude

วิธีหา ให้ $\vec{x}_1 = \Phi\vec{b}$

$$\tilde{U}\vec{x}_1 = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W\vec{b}$$

$$\vec{x}_1 = \tilde{U}^{*}X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W\vec{b}$$

$$\vec{x}_1 = \tilde{A}W\vec{b}$$

$$\vec{x}_1 = W\Lambda\vec{b}$$

$$\vec{b} = (W\Lambda)^{-1}\vec{x}_1$$

เมื่อ Φ มีขนาด $n \times r$

W มีขนาด $r \times n$

Λ มีขนาด $r \times r$

หา $\vec{x}_k$

$$\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{r} \vec{\phi}_j \lambda_j^{k-1} b_j = \Phi \Lambda^{k-1} \vec{b}$$

โดยที่ $\vec{\phi}_j$ คือ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A (DMD modes)

λ_j คือ ค่าลักษณะเฉพาะของ A (DMD eigenvalues)

b_j คือ mode amplitude

Λ คือ เมทริกซ์ที่สมาชิกในแนวทแยงของ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ DMD

3.2 วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม MATLAB

ข้อมูลชุดที่ 1 ข้อมูล COVID-19 ในประเทศไทย เก็บข้อมูลเป็นรายวัน ตั้งแต่วันที่ 1 เมษายน พ.ศ. 2563 ถึงวันที่ 30 กันยายน พ.ศ. 2564 จำนวน 549 ข้อมูล โดยใช้ข้อมูลช่วงวันที่ 1 เมษายน พ.ศ. 2563 ถึงวันที่ 14 กรกฎาคม พ.ศ. 2564 ในการหา A ซึ่งทำการทำนายต่อไปอีก 15 วัน คือวันที่ 15 กรกฎาคม พ.ศ. 2564 ถึงวันที่ 29 กรกฎาคม พ.ศ. 2564

X คือ เมทริกซ์จำนวนผู้ป่วย COVID-19

โดยที่ x_1 แทนจำนวนผู้ป่วย COVID-19 วันที่ 1

x_2 แทนจำนวนผู้ป่วย COVID-19 วันที่ 2

$\vdots$

x_i แทนจำนวนผู้ป่วย COVID-19 วันที่ i

จะได้ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{l+1} & \cdots & x_{k+l-1} \end{bmatrix}$ และ $X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{l+1} & x_{l+2} & \cdots & x_{k+l} \end{bmatrix}$

กำหนด K คือ จำนวนหลักของเมทริกซ์

L คือ จำนวนแถวของเมทริกซ์

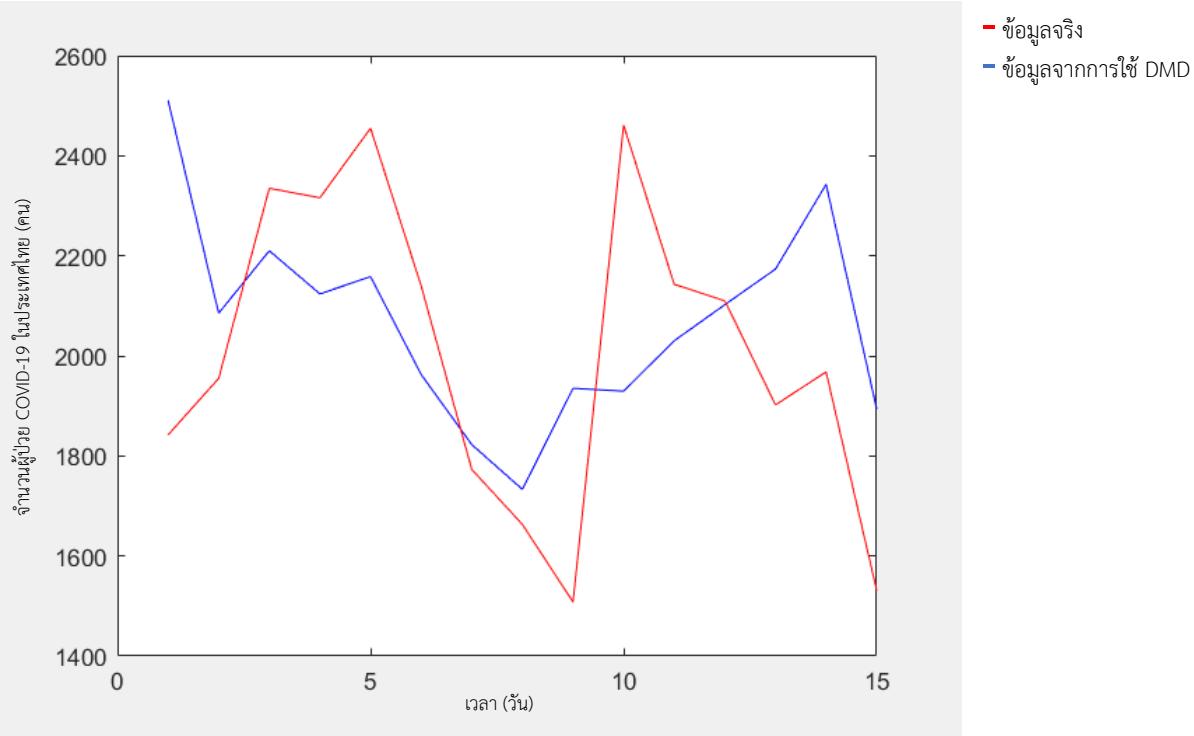
r คือ แรงค์ของเมทริกซ์ในขั้นตอนการทำ SVD

ทำการปรับค่าพารามิเตอร์ K, L และ r เพื่อให้ได้กราฟและข้อมูลการทำนายที่เหมาะสม โดยเปรียบเทียบจากกราฟที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด โดยกำหนดให้ $K = 470$, $L = 25$ และ $r = 20$

จะได้ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{470} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{471} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{25} & x_{26} & \cdots & x_{494} \end{bmatrix}$ และ $X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_{471} \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_{472} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{26} & x_{27} & \cdots & x_{495} \end{bmatrix}$

ผลลัพธ์จากการใช้ DMD ในการทำนายจำนวนผู้ป่วย COVID-19 ในประเทศไทย ได้ดังนี้

x_k	ข้อมูลจริง	DMD	error
x_{495}	1,842	2,510.8	668.8122
x_{496}	1,955	2,085.3	130.3192
x_{497}	2,335	2,210.1	124.9483
x_{498}	2,316	2,123.9	192.1397
x_{499}	2,455	2,158.4	296.6253
x_{500}	2,140	1,962.7	177.3176
x_{501}	1,773	1,822.7	49.6543
x_{502}	1,663	1,733.1	70.0967
x_{503}	1,508	1,935.2	427.1931
x_{504}	2,461	1,929.4	531.5734
x_{505}	2,143	2,030.2	112.7518
x_{506}	2,110	2,102.3	7.6543
x_{507}	1,902	2,173.5	271.4637
x_{508}	1,968	2,342.7	374.7383
x_{509}	1,531	1,893.9	362.9281
ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนจากการทำนาย			253.2144
ค่าเฉลี่ยข้อมูลจริง			2,006.8
เปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน			12.6178%



กราฟแสดงข้อมูลจำนวนผู้ป่วย COVID-19 ในประเทศไทย (เส้นสีแดง) เปรียบเทียบกับข้อมูลจากการใช้ DMD ในการทำนาย (เส้นสีน้ำเงิน) ในช่วงวันที่ 2 ถึง 8 ข้อมูลจริงและข้อมูลจากการทำนายมีทิศทางเดียวกัน ในช่วงวันที่ 8 ถึง 11 ข้อมูลจริงและข้อมูลจากการทำนายมีทิศตรงกันข้ามกันและมีความแตกต่างกันของข้อมูลเป็นอย่างมาก ในวันที่ 12 ข้อมูลจริงและข้อมูลจากการทำนายมีค่าใกล้เคียงกันมาก มีค่าความคลาดเคลื่อนเพียง 7.6543 และในช่วงวันที่ 13 เป็นต้นไป กราฟทั้ง 2 มีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน โดยกราฟนี้มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 253.2144 และมีเปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 12.6178% ซึ่งการทำนายนี้ไม่เหมาะที่จะนำไปทำนายจำนวนผู้ป่วย COVID-19 ในประเทศไทย ถึงแม้จะมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่มาก แต่แนวโน้มของกราฟจากการทำนายยังไม่เหมือนกับกราฟข้อมูลจริง

ข้อมูลชุดที่ 2 ข้อมูล PM 2.5 ในจังหวัดเชียงใหม่ เก็บข้อมูลเป็นรายวัน ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2564 ถึงวันที่ 30 เมษายน พ.ศ. 2564 จำนวน 120 ข้อมูล โดยใช้ข้อมูลช่วงวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2564 ถึงวันที่ 11 มีนาคม พ.ศ. 2564 ในการหา A ซึ่งทำการทำนายต่อไปอีก 15 วัน คือวันที่ 12 มีนาคม พ.ศ. 2564 ถึงวันที่ 26 มีนาคม พ.ศ. 2564

X คือ เมทริกซ์ปริมาณ PM 2.5

โดยที่ x_1 แทนปริมาณ PM 2.5 วันที่ 1

x_2 แทนปริมาณ PM 2.5 วันที่ 2

$\vdots$

x_i แทนปริมาณ PM 2.5 วันที่ i

จะได้ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{l+1} & \cdots & x_{k+l-1} \end{bmatrix}$ และ $X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{l+1} & x_{l+2} & \cdots & x_{k+l} \end{bmatrix}$

กำหนด K คือ จำนวนหลักของเมทริกซ์

L คือ จำนวนแถวของเมทริกซ์

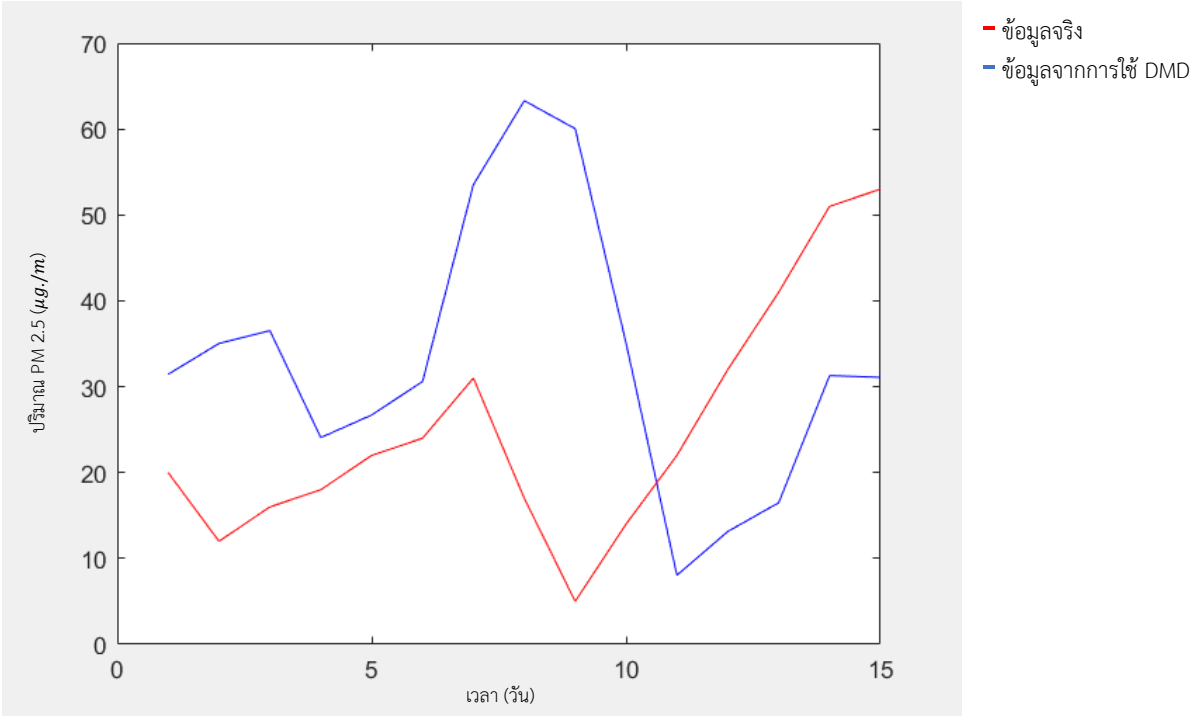
r คือ แรงค์ของเมทริกซ์ในขั้นตอนการทำ SVD

ทำการปรับค่าพารามิเตอร์ K, L และ r เพื่อให้ได้กราฟและข้อมูลการทำนายที่เหมาะสม โดยเปรียบเทียบจากกราฟที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ต่ำที่สุด โดยกำหนดให้ $K = 70$, $L = 30$ และ $r = 30$

จะได้ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{70} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{71} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{30} & x_{31} & \cdots & x_{99} \end{bmatrix}$ และ $X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_{71} \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_{72} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{100} \end{bmatrix}$

ผลลัพธ์จากการใช้ DMD ในการทำนายปริมาณ PM 2.5 ในจังหวัดเชียงใหม่ ได้ดังนี้

x_k	ข้อมูลจริง	DMD	error
x_{100}	20	31.4415	11.4415
x_{101}	12	35.0356	23.0356
x_{102}	16	36.5289	20.5289
x_{103}	18	24.0778	6.0778
x_{104}	22	26.7078	4.7078
x_{105}	24	30.6009	6.6009
x_{106}	31	53.5198	22.5198
x_{107}	17	63.2984	46.2984
x_{108}	5	60.0327	55.0327
x_{109}	14	35.0769	21.0769
x_{110}	22	8.0450	13.9550
x_{111}	32	13.1437	18.8563
x_{112}	41	16.4908	24.5092
x_{113}	51	31.2906	19.7094
x_{114}	53	31.0910	21.9090
ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนจากการทำนาย			21.0840
ค่าเฉลี่ยข้อมูลจริง			25.2000
เปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน			83.6667%



กราฟแสดงข้อมูล PM 2.5 (เส้นสีแดง) เปรียบเทียบกับข้อมูลจากการใช้ DMD ในการทำนาย (เส้นสีน้ำเงิน) ในช่วงวันที่ 1 ถึง 4 ข้อมูลจริงและข้อมูลจากการทำนายมีทิศทางสวนทางกัน ต่อมาในช่วงวันที่ 5 เป็นต้นไป กราฟทั้ง 2 มีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน แต่ค่าการจากการทำนายและข้อมูลจริงมีความแตกต่างกันอยู่ โดยกราฟนี้มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 21.0840 คิดเป็นเปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 83.6667% ซึ่งการทำนายนี้ไม่เหมาะที่จะนำไปทำนายค่า PM 2.5 เนื่องจากค่าข้อมูลจริงและข้อมูลจากการทำนายต่างกัน ส่งผลให้มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนสูง ถึงแม้แนวโน้มของกราฟทั้งสองจะไปในทิศทางเดียวกันก็ตาม

ข้อมูลชุดที่ 3 ข้อมูลประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ เก็บข้อมูลเป็นรายเดือน ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ. 2545 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ. 2561 จำนวน 204 ข้อมูล โดยใช้ข้อมูลช่วงเดือนมกราคม พ.ศ. 2545 ถึงเดือนพฤษาคม พ.ศ. 2549 ในการหา A ซึ่งทำการทำนายต่อไปอีก 15 เดือน คือเดือนมิถุนายน พ.ศ. 2549 ถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ. 2550

X คือ เมทริกซ์จำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่

โดยที่ x_1 แทนจำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ วันที่ 1

x_2 แทนจำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ วันที่ 2

$\vdots$

x_i แทนจำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ วันที่ i

จะได้ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{l+1} & \cdots & x_{k+l-1} \end{bmatrix}$ และ $X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{l+1} & x_{l+2} & \cdots & x_{k+l} \end{bmatrix}$

กำหนด K คือ จำนวนหลักของเมทริกซ์

L คือ จำนวนแถวของเมทริกซ์

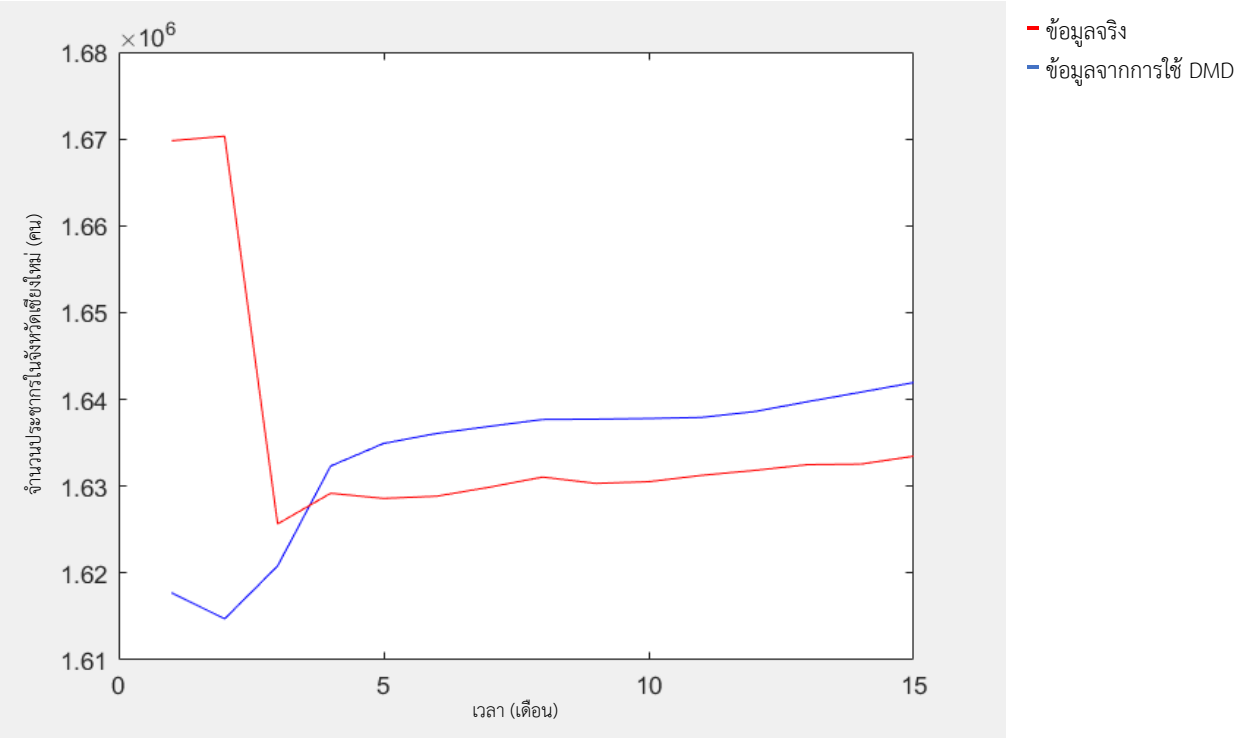
r คือ แรงค์ของเมทริกซ์ในขั้นตอนการทำ SVD

ทำการปรับค่าพารามิเตอร์ K, L และ r เพื่อให้ได้กราฟและข้อมูลการทำนายที่เหมาะสม โดยเปรียบเทียบจากกราฟที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ต่ำที่สุด โดยกำหนดให้ $K = 53$, $L = 30$ และ $r = 2$

จะได้ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{53} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{54} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{30} & x_{31} & \cdots & x_{82} \end{bmatrix}$ และ $X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_{54} \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_{55} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{83} \end{bmatrix}$

ผลลัพธ์จากการใช้ DMD ในการทำนายจำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ ได้ดังนี้

x_k	ข้อมูลจริง	DMD	error
x_{83}	1,669,795	1,617,730	52,065
x_{84}	1,670,317	1,614,726	55,591
x_{85}	1,625,658	1,620,822	4,836
x_{86}	1,629,193	1,632,328	3,135
x_{87}	1,628,597	1,634,933	6,336
x_{88}	1,628,853	1,636,081	7,228
x_{89}	1,629,895	1,636,900	7,005
x_{90}	1,631,057	1,637,690	6,633
x_{91}	1,630,328	1,637,728	7,400
x_{92}	1,630,522	1,637,802	7,280
x_{93}	1,631,256	1,637,929	6,673
x_{94}	1,631,826	1,638,603	6,777
x_{95}	1,632,490	1,639,742	7,252
x_{96}	1,632,548	1,640,833	8,285
x_{97}	1,633,459	1,641,942	8,483
ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนจากการทำนาย			12,999
ค่าเฉลี่ยข้อมูลจริง			1,662,707
เปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน			0.7818%



กราฟแสดงข้อมูลจำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ (เส้นสีแดง) เปรียบเทียบกับข้อมูลจากการใช้ DMD ในการทำนาย (เส้นสีน้ำเงิน) ในช่วงวันที่ 1 ถึง 3 ข้อมูลจริงและข้อมูลจากการทำนายมีทิศทางสวนทางกัน และมีค่าต่างกันมาก และตั้งแต่วันที่ 3 เป็นต้นไป กราฟทั้ง 2 มีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน และข้อมูลจริงกับข้อมูลทำนายมีค่าใกล้เคียงกัน โดยกราฟนี้มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 12,999 และมีเปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 0.7818% โดยการทำนายนี้เหมาะที่จะนำไปทำนายจำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ เพราะทั้งแนวโน้มของกราฟและค่าของข้อมูลจริงและข้อมูลทำนายไปในทิศทางเดียวกัน

บทที่ 4

ผลการศึกษา

4.1 สรุปผลการศึกษา

จากการศึกษาหลักการทำ Dynamic mode decomposition (DMD) เพื่อการทำนายผ่าน MATLAB โดยใช้ข้อมูลตัวอย่าง 3 ชุดในการทำนาย ได้แก่ ข้อมูลชุดที่ 1 ข้อมูลผู้ป่วย COVID-19 ในประเทศไทย จำนวน 549 ข้อมูล ซึ่งใช้ข้อมูลจำนวน 470 ข้อมูลในการหา A ที่ทำนายให้ได้ผลดี ข้อมูลชุดที่ 2 ข้อมูล PM 2.5 ในจังหวัดเชียงใหม่ จำนวน 120 ข้อมูล ซึ่งใช้ข้อมูลจำนวน 70 ข้อมูลในการหา A ที่ทำนายให้ได้ผลดี และข้อมูลชุดที่ 3 ข้อมูลประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ จำนวน 204 ข้อมูล ซึ่งใช้ข้อมูลจำนวน 53 ข้อมูลในการหา A ที่ทำนายให้ได้ผลดี ซึ่งข้อมูลทั้ง 3 ชุด ทำนายได้ดีไปอีก 15 ข้อมูล และได้ทำการศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อการทำนายร่วมด้วย คือ จำนวนข้อมูล จำนวนหลักของเมทริกซ์ จำนวนแถวของเมทริกซ์ และแรงค์ของเมทริกซ์ในขั้นตอนการทำ Singular value decomposition (SVD)

เมื่อใช้ DMD ในการทำนายข้อมูลทั้ง 3 ชุด ได้ผลดังต่อไปนี้

ข้อมูลชุดที่ 1 ข้อมูล COVID-19 ในประเทศไทย มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 253.2144 คิดเป็นเปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 12.6178% ซึ่งการทำนายนี้ไม่เหมาะที่จะนำไปทำนายต่อ ถึงแม้จะมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่มาก แต่แนวโน้มของกราฟจากการทำนายยังไม่เหมือนกับกราฟข้อมูลจริง

ข้อมูลชุดที่ 2 ข้อมูล PM 2.5 ในจังหวัดเชียงใหม่ มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 21.0840 คิดเป็นเปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 83.6667% ซึ่งการทำนายนี้ไม่เหมาะที่จะนำไปทำนายต่อ เพราะข้อมูลจริงและข้อมูลทำนายมีค่าห่างกัน ทำให้มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนมาก ถึงแม้แนวโน้มของกราฟจะไปในทิศทางเดียวกัน

ข้อมูลชุดที่ 3 ข้อมูลประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 12,999 คิดเป็นเปอร์เซ็นต์ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เท่ากับ 0.7818% โดยการทำนายนี้เหมาะที่จะนำไปทำนาย เพราะทั้งแนวโน้มของกราฟและค่าของข้อมูลจริงและข้อมูลทำนายไปในทิศทางเดียวกัน

4.2 อภิปรายผล

จากการศึกษาข้อมูลที่นำมาใช้ในการทำนายอาจมีปัจจัยอื่นร่วมด้วยที่ทำให้ค่าการทำนายคลาดเคลื่อนดังนี้

ข้อมูลชุดที่ 1 ข้อมูล COVID-19 ในประเทศไทย ในบางช่วงจะเห็นว่าข้อมูลมีค่าสูงหรือต่ำกว่าปกติอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งอาจมีปัจจัยอื่นที่ส่งต่อการติดเชื้อ COVID-19 เช่น หากอยู่ในช่วงล็อกดาวน์ ก็อาจทำให้จำนวนผู้ป่วย

COVID-19 น้อยลงกว่าปกติ หรือหากมีงานเทศกาล เช่น งานขึ้นปีใหม่ทำให้เกิดการรวมตัวของผู้คนจำนวนมากก็อาจส่งผลให้จำนวนของผู้ติดเชื้อเพิ่มขึ้นมากกว่าปกติ

ข้อมูลชุดที่ 2 ข้อมูล PM 2.5 ในจังหวัดเชียงใหม่ ในช่วงวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2564 ถึงวันที่ 30 เมษายน พ.ศ. 2564 จะเห็นว่าค่าข้อมูลจริงและข้อมูลจากการทำนายมีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนมาก ซึ่งอาจมีปัจจัยอื่น ๆ ที่ส่งผลต่อค่า PM 2.5 โดยตรงที่ควรนำมาคำนวณด้วยเพื่อลดค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน เช่น ปริมาณความชื้น เป็นต้น

ข้อมูลชุดที่ 3 ข้อมูลประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ ในบางช่วงจะเห็นว่าข้อมูลมีค่าสูงหรือต่ำกว่าปกติอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งอาจมีปัจจัยอื่นที่ส่งต่อจำนวนประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ เช่น หากมีอัตราการเกิดสูงกว่าปกติก็จะทำให้จำนวนประชากรเพิ่มขึ้นสูงกว่าปกติ หรือหากมีอัตราการตายสูงกว่าปกติหรืออัตราการเกิดต่ำก็จะทำให้จำนวนประชากรเพิ่มขึ้นน้อยหรือต่ำกว่าปกติ

4.3 ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

หากทำนายในระยะยาวค่าความคลาดเคลื่อนอาจเพิ่มสูงขึ้น จึงควรนำข้อมูลของปัจจัยที่ส่งผลต่อข้อมูลตัวอย่างมาศึกษาร่วมด้วย อาจทำให้ได้ค่าการทำนายที่แม่นยำมากขึ้น และหากข้อมูลไม่มีความต่อเนื่องหรือมีความสูงต่ำของข้อมูลมากกว่าปกติมากเกินไปก็จะทำให้กราฟข้อมูลจริงและข้อมูลทำนายไม่ไปในทิศทางเดียวกัน

บรรณานุกรม

[1] Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz, Machine Learning Dynamical Systems and Control, Data-driven science and engineering, 2019, 229-241.

[2] World Health Organization, WHO Coronavirus (COVID-19) Dashboard, สืบค้น 30 พฤษภาคม 2566, จาก https://covid19.who.int/data

[3] กองจัดการคุณภาพอากาศและเสียง กรมควบคุมมลพิษ, ข้อมูลคุณภาพอากาศ, สืบค้น 15 มิถุนายน 2566, จาก http://air4thai.pcd.go.th/

[4] สำนักบริหารการทะเบียน กรมการปกครอง, สถิติประชากรทางการทะเบียนราษฎร(รายเดือน), สืบค้น 15 มิถุนายน 2566, จาก https://stat.bora.dopa.go.th

[5] ยศนันต์ มีมาก, พีชคณิตเชิงเส้น 1, ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555

[6] ระบบคลังข้อมูลทางวิชาการ BRU, เมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ, สืบค้น 15 สิงหาคม 2566, จาก https://dspace.bru.ac.th

[7] เอกสารการสอนกระบวนวิชา 201110 เรื่อง Inverse Matrix, ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[8] ผศ.ดร.นวภัทรา หนูนาค, error/ความคลาดเคลื่อน, สืบค้น 20 สิงหาคม 2566, จาก https://www.foodnetworksolution.com

[9] วิษณุ สมรัตน์, MATHPAPER.NET, สืบค้น 20 สิงหาคม 2566, จาก www.mathpaper.net

[10] เอกสารการสอนกระบวนวิชา 321211 Linear Algebra 1, KKU Web Hosting มหาวิทยาลัยขอนแก่น, สืบค้น 20 สิงหาคม 2566, จาก https://home.kku.ac.th

[11] เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุค, วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี, สืบค้น 20 สิงหาคม 2566, จาก https://th.wikipedia.org

[12] Robert van de Geijn, Foundations to Frontiers, Margaret Myers, Advanced Linear Algebra, สืบค้น 20 สิงหาคม 2566, จาก https://www.cs.utexas.edu

ภาคผนวก

โปรแกรม MATLAB สำหรับการทำ DMD

```
function [Phi, Lambda, b] = DMD(X,Xprime,r)
[U,Sigma,V] = svd(X,'econ'); % Step 1
Ur = U(:,1:r);
Sigmar = Sigma(1:r,1:r);
Vr = V(:,1:r);

Atilde = Ur'*Xprime*Vr/Sigmar; % Step 2

[W,Lambda] = eig(Atilde); % Step 3

Phi = Xprime*(Vr/Sigmar)*W; % Step 4
alpha1 = Sigmar*Vr(1,:)';
b = (W*Lambda)\alpha1;

```

ใช้ DMD ในการทำนายข้อมูลชุดที่ 1 ข้อมูล COVID-19 ในประเทศไทยผ่านโปรแกรม MATLAB

```

load('cv19.mat') % new cases (daily) 4/1/2021 - 10/1/2022
% https://covid19.who.int/data
data= cv19;

% create matrix
T = 549;  %number of data
K = 470; % number of segments (number of columns)
L = 25; % length of matrix ( number of rows )
r = 20; % rank of matrix  SVD
max_predict = 15;


matX0=[];
for i = 1:L
   matX0 = [matX0; data(i:K+i-1)'];
end

Xprime =[];
for i = 2:L+1
   Xprime = [Xprime; data(i:K+i-1)'];
end

```

```
24
25 - for j1 = 1: max_predict
26     % number of data used k+L-1
27 -   [Phi, Lambda, b] = DMD(matX0,Xprime,r);
28     % last row of x predict day K+L
29 -    x=Phi*Lambda *b ;
30 -    xplot(j1) = real(x(L));
31
32
33 -  matX0= Xprime;
34 -  Xprime(:,K+1 )=[ Xprime(2:L,K );x(L)];
35 -  Xprime(:,1)=[];
36
37 - end
38
39
40 -  t1 = [1: max_predict]';
41 -  plot(t1, xplot ,'blue');
42 -  hold on
43    % K+L  to max_predict-1
44 -  plot(t1,real(data(K+L : K+L+max_predict-1 )) ,'red');
45
46 -  error_predict  = abs(xplot'- data(K+L : K+L+max_predict-1 ));
47 -  sum_error = sum(error_predict);
48 -  mean_error = mean(error_predict);
49
```

ใช้ DMD ในการทำนายข้อมูลชุดที่ 2 ข้อมูล PM 2.5 ในจังหวัดเชียงใหม่ผ่านโปรแกรม MATLAB

```
1
2 -  load('pm2_5.mat')
3
4 -  data= pm2_5;
5
6    % create matrix
7 -  T = 610;  %number of data
8 -  K = 200 ; % number of segments (number of columns)
9 -  L = 10 ; % length of matrix ( number of rows )
10 - r = 2 ; % rank of matrix  SVD
11 - max_predict = 15;
12
13
14 - matX0=[];
15 - for i = 1:L
16 -    matX0 = [matX0; data(i:K+i-1)'];
17 - end
18
19 - Xprime =[];
20 - for i = 2:L+1
21 -    Xprime = [Xprime; data(i:K+i-1)'];
22 - end
23
```

```
24
25 -  for j1 = 1: max_predict
26        % number of data used k+L-1
27 -      [Phi, Lambda, b] = DMD(matX0,Xprime,r);
28        % last row of x predict day K+L
29 -       x=Phi*Lambda *b ;
30 -       xplot(j1) = real(x(L));
31
32
33 -    matX0= Xprime;
34 -    Xprime(:,K+1 )=[ Xprime(2:L,K );x(L)];
35 -    Xprime(:,1)=[];
36
37 -    end
38
39
40 -    t1 = [1: max_predict]';
41 -    plot(t1, xplot ,'blue');
42 -    hold on
43      % K+L  to max_predict-1
44 -    plot(t1,real(data(K+L : K+L+max_predict-1 )) ,'red');
45
46 -    error_predict  = abs(xplot'- data(K+L : K+L+max_predict-1 ));
47 -    sum_error = sum(error_predict );
48 -    mean_error = mean(error_predict);
49
```

ใช้ DMD ในการทำนายข้อมูลชุดที่ 3 ข้อมูลประชากรในจังหวัดเชียงใหม่ผ่านโปรแกรม MATLAB

```
1 -    load('people.mat')
2
3 -    data = people;
4
5      % create matrix
6 -    T = 204;  %number of data
7 -    K = 53 ; % number of segments (number of columns)
8 -    L = 30 ; % length of matrix ( number of rows )
9 -    r = 2 ; % rank of matrix  SVD
10 -   max_predict = 15;
11
12
13 -   matX0=[];
14 -   for i = 1:L
15 -       matX0 = [matX0; data(i:K+i-1)'];
16 -   end
17
18 -   Xprime =[];
19 -   for i = 2:L+1
20 -       Xprime = [Xprime; data(i:K+i-1)'];
21 -   end
22
```

```
23
24 -  for j1 = 1: max_predict
25        % number of data used k+L-1
26 -      [Phi, Lambda, b] = DMD(matX0,Xprime,r);
27        % last row of x predict day K+L
28 -       x=Phi*Lambda *b ;
29 -       xplot(j1) = real(x(L));
30
31
32 -    matX0= Xprime;
33 -    Xprime(:,K+1 )=[ Xprime(2:L,K );x(L)];
34 -    Xprime(:,1)=[];
35
36 -    end
37
38
39 -    t1 = [1: max_predict]';
40 -    plot(t1, xplot ,'blue');
41 -    hold on
42      % K+L  to max_predict-1
43 -    plot(t1,real(data(K+L : K+L+max_predict-1 )) ,'red');
44
45 -    error_predict  = abs(xplot'- data(K+L : K+L+max_predict-1 ));
46 -    sum_error = sum(error_predict );
47 -    mean_error = mean(error_predict);
48
```

DYNAMIC MODE DECOMPOSITION FOR PREDICTION

MISS. PANFON YUENTHAM

ADVISOR: ASST. PROF. DR. DHIRANUCH BUNNAG

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, CHIANG MAI UNIVERSITY

ABSTRACT

The objective of this independent study is to investigate the performance of Dynamic mode decomposition (DMD) in terms of prediction. Three sets of sample data are used in the study. The DMD is unsuccessful in determining the number of COVID-19 patients in Thailand. It was either significantly underestimated or overestimated. For the PM 2.5 data in Chiang Mai, DMD is successful in some intervals and ultimately fails in others. In the final set, the DMD predicted data for Chiang Mai's population accurately reflects the actual data, with a deviation of just 0.7818%, and the predicted data's trend is in line with the actual data.

INTRODUCTTION

Prediction is based on historical data analysis. Current information and experience can be used to predict the future trend of changing situations. Statistical data is used in statistical prediction. which is data from many years ago, is a tool There are numerous statistical prediction methods, such as the moving average method. Exponential approach Jenkins Boxing Techniques Methods for simple linear regression models, etc. The researcher is interested in studying Dynamic mode decomposition (DMD), a method that has never been studied. This independent research study will investigate the principles and applications of MATLAB. The results will then be analyzed, debated, and criticized in order to improve and achieve good results. the majority Then decide whether or not this prediction is suitable for further prediction. which indicates suitability based on the average error and trend of the predicted data graph and the actual data graph.

OBJECTIVES

1. To study DMD concepts
2. To study the use of DMD for prediction using MATLAB.
3. To examine, debate, and evaluate the outcomes of employing DMD for prediction.

CONCLUSION

From studying the principles of DMD for prediction using three sets of sample data in MATLAB: The first set of data consists of 549 records on Thai patients with COVID-19. 253.2144 is the average error, or 12.6178%. Further forecasting is not appropriate for this prediction. Even though the tolerance is not very high, the two graphs' trends are not identical. The second set of data is PM 2.5 data from Chiang Mai, which totals 120 records and has a mean error of 21.0840 or 83.6667%, indicating that this prediction is not suitable for further prediction. Because of the high mean error. And the third set of data is population data from Chiang Mai Province, which totals 204 records and has a mean error of 12,999 or 0.7818%. This prediction is appropriate for prediction. Because the graph's trend, as well as the values of the actual and predicted data, all point in the same direction. All three sets of data were able to predict 15 data points accurately, and they also investigated the factors that influence prediction, such as the amount of data and the number of digits in the matrix. The number of rows in the matrix and rank in the SVD process.

SUGGESTIONS

Long-term predictions may result in an increase in error. As a result, the study should contain information on the variables that influenced the sample data. Possibly lead to better prediction values. Additionally, the real data and predicted graphs won't move in the same direction if the data is not continuous or if the highs and lows are too much higher than usual.

RESULTS

The DMD Algorithm

STEP1: Create matrix X, X'

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_{m-1}]$$
$$X' = [\vec{x}_2 \quad \vec{x}_3 \quad \cdots \quad \vec{x}_m]$$
$$X' = AX$$
$$A = \underset{A}{\operatorname{argmin}} \|X' - AX\|_F = X'X^{\dagger}$$

STEP2: Compute SVD of X

$$X = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$$

where $\tilde{U} \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $\tilde{V} \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $r \leq m \ll n$

STEP3: Find A by computing the pseudo-inverse of X

$$A = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^*$$
$$\tilde{A} = \tilde{U}^* A \tilde{U} = \tilde{U}^* X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1}$$

STEP4: The spectral decomposition of A is computed

$$\tilde{A}W = W\Lambda$$

STEP5: Create matrix

$$\Phi = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W$$

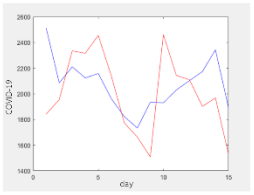
Where Φ is called a DMD modes

so

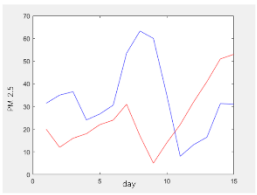
$$\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{r} \vec{\phi}_j \lambda_j^{k-1} b_j = \Phi\Lambda^{k-1}\vec{b}$$

where $\vec{\phi}_j$ is the eigenvector of A. (DMD modes)
λ_j is the eigenvalue of A. (DMD eigenvalues)
b_j is mode amplitude.
Λ is a matrix in which the diagonal members of It is the eigenvalue of DMD.

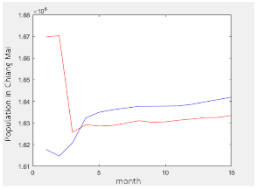
Analyzed with MATLAB



Data set 1: COVID-19 data collected on a daily basis in Thailand. Making predictions is not appropriate.



Data set 2: PM 2.5 in Chiang Mai province. Gather data on a daily basis. Making predictions is not appropriate.



Data set 3: Chiang Mai province population data. Gather data on a monthly basis. Making predictions is appropriate.

REFERENCES

[1] Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz, Machine Learning Dynamical Systems and Control, Data-driven science and engineering, 2019, 229-241.

[2] ยศนันต์ มีมาก, พีชคณิตเชิงเส้น 1, ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555

[3] ระบบคลังข้อมูลทางวิชาการ BRU, เมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ, จาก https://dspace.bru.ac.th