

เกมเซตและปัญหาที่เกี่ยวข้อง
(Set game and related problems)

นายพีรพัฒน์ ใจกล้า
รหัส 620510519

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

เกมเซตและปัญหาที่เกี่ยวข้อง
(Set game and related problems)

พีรพัฒน์ ใจกล้า

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

.....เป็นหญิง ไโรจนกุล..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เป็นหญิง ไโรจนกุล)

.....ช ช..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ญ จันท)

วันที่ 3 เดือน เมษายน พ.ศ. 2566

เกมเซตและปัญหาที่เกี่ยวข้อง
(Set game and related problems)

นายพีรพัฒน์ ใจกล้า
รหัส 620510519

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษา เรื่อง เกมเซตและปัญหาที่เกี่ยวข้อง

ผู้ค้นคว้าขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เป็นหญิง โรจนกุล อาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระที่คอยช่วยเหลือให้คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และให้คำปรึกษาตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องพิจารณาแก้ไข จนทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสิ้นสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่าน ที่ได้อบรม สั่งสอน และให้ความรู้ทั้งในและนอกตำราเรียนให้แก่ผู้ค้นคว้า อันเป็นประโยชน์และสามารถนำมา ประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้ และขอขอบคุณเพื่อน ๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ และผู้เกี่ยวข้องที่ช่วยสนับสนุนให้คำปรึกษาและช่วยเหลือขณะที่ผู้ค้นคว้ากำลังศึกษาค้นคว้าอิสระขั้นนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณบิดา มารดา และครอบครัว รวมทั้งขอขอบคุณไปยังทุกท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับงานค้นคว้าอิสระ ฉบับนี้ซึ่งผู้ค้นคว้าไม่ได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ด้วย

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ผู้ค้นคว้าขอมอบคำชื่นชมและคุณความดีนั้นแก่ ครู อาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนในทางตรงกันข้ามหากผลงานค้นคว้าอิสระนี้เกิดข้อผิดพลาดประการใดผู้ค้นคว้าต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และขออน้อมรับความผิดพลาดไว้เพียงผู้เดียว

พีรพัฒน์ ใจกล้า

หัวข้อ (ภาษาไทย)	เกมเซตและปัญหาที่เกี่ยวข้อง
(ภาษาอังกฤษ)	Set game and related problems
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นายพีรพัฒน์ ใจกล้า รหัสนักศึกษา 620510519
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เป็นหญิง โรจนกุล
ชื่อกรรมการสอบ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ยุ จันทร

บทคัดย่อ

SET เป็นเกมไพ่ยอดนิยมที่ทำนายผู้เล่นโดยให้หาชุดไพ่ 3 ใบที่มีลักษณะเฉพาะหรือเรียกว่า "เซต" เนื่องจากมีคำถาม และข้อสงสัยที่น่าสนใจเกี่ยวกับเกมเซตหลายอย่าง และผู้ค้นคว้าต้องการที่จะหามาซึ่งคำตอบนั้น ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาขั้นตอนวิธีในการสร้างเกมเซตที่มีไพ่ 12 ใบและมีเซตเกิดขึ้น 6 เซตเท่านั้น โดยใช้แนวคิดจากตารางของเกม XO นอกจากนั้นยังมีการหาขั้นตอนวิธีในการหาผลเฉลยของเกมเซต และมีการเขียนโปรแกรมในภาษาไพทอน เพื่อหาเซตผลเฉลยทั้ง 6 เซตจากไพ่ 12 ใบอีกด้วย

Abstract

SET is a popular card game that challenges players to find sets of three cards with certain characteristics. Because there are many interesting problems and questions arising from the game, we wanted to find the answers. In this independent research, we studied the algorithm to create a SET game with 12 cards containing exactly 6 sets, using the concept of Tic-Tac-Toe board. We also found an algorithm to find the solution of SET game. Additionally, we wrote a program in Python to find the 6 sets from the 12 cards.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา	3
1.3 ขอบเขตของการศึกษา	3
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
1.5 โครงร่างของรายงาน	4
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	5
2.1 กติกาเกมเซตแบบดั้งเดิม (Traditional)	5
2.2 กติกาเกมเซตแบบปริศนา (Puzzle)	5
2.3 จำนวนเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมด	7
3 ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเกมเซต	11
3.1 ฟیلด์ (Field)	11
3.2 จำนวนไพต์สุดที่จะมีเซตเกิดขึ้นเสมอ	13
3.3 วิธีแปลงเซตให้อยู่ในรูปเรขาคณิต	13
3.4 การอยู่บนเส้นตรงเดียวกันของจุดสามจุดในฟیلด์	15
3.5 เซตย่อยที่ไม่ก่อให้เกิดเส้นตรงใน $\mathbb{F}_3^d$ (d-cap)	17
3.6 การเขียนแสดงแคปด้วยภาพ	19
4 ผลการศึกษา (Results)	22
4.1 จำนวนเซตที่เป็นไปได้ของไฟ 12 ใบ	22
4.2 วิธีการสร้างเกมเซตแบบ puzzle โดยที่มีไฟกึ่งกลาง 12 ใบ และมีเซตเกิดขึ้น 6 เซตเท่านั้น	25
4.3 ขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบปริศนาเกมเซต	28
5 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	31
บรรณานุกรม	32

A	โปสเตอร์	33
B	โปรแกรม	34

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

1.1 ที่มาและความสำคัญ

เกมเซต เป็นเกมที่สนุกและใช้เวลาในการเล่นต่อรอบน้อยจึงได้กลายเป็นเกมยอดนิยมทั่วโลก ถึงแม้ว่าเป็นเกมที่เด็ก ๆ มักจะเล่นชนะผู้ใหญ่ แต่เกมนี้มีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่สามารถเชื่อมโยงกับคณิตศาสตร์เชิงการจัดของสัมพรรคจำกัด และปริภูมิภาพฉาย และทฤษฎีของรหัสแก้ไขข้อผิดพลาด ในปี 2001 มีการค้นพบความเชื่อมโยงที่ไม่คาดคิดกับการวิเคราะห์ฟูเรียร์ ซึ่งมีความเชื่อมโยงกับปัญหาพื้นฐานที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับเกมเซต และยังมีคำถามที่เกี่ยวข้องอื่น ๆ ที่ยังไม่พบคำตอบ

เกมเซตถูกประดิษฐ์โดยนักพันธุศาสตร์ประชากร มาร์ชา จิน ฟอลโก (Marsha Jean Falco) เมื่อปี 1974 ซึ่งในขณะนั้นเธอกำลังศึกษาโรคลมชักในสุนัขพันธุ์เยอรมันเชพเพิร์ด และจดบันทึกแทนข้อมูลทางพันธุกรรมของสุนัขโดยใช้การวาดสัญลักษณ์รูปแบบต่าง ๆ บนบัตรแล้วค้นหารูปแบบของข้อมูล หลังจากมาร์ชาตระหนักถึงศักยภาพของการสร้างเกมปริศนาที่ทำหาย ประกอบกับได้รับการส่งเสริมจากเพื่อนและครอบครัว เธอจึงตัดสินใจพัฒนาเกมไพ่นี้ และปล่อยออกสู่ตลาดตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา เกมเซตได้รับความนิยมอย่างมากทั้งภายในและภายนอกวงการคณิตศาสตร์ เซตเป็นเกมที่เล่นโดยใช้ไพ่จากสำรับไพ่พิเศษ แต่ละเซตประกอบไปด้วย 4 คุณสมบัติ ได้แก่ จำนวน แรเงา สี และรูปร่าง และแต่ละคุณสมบัติจะมาจากหนึ่งในสามค่าที่เป็นไปได้ ซึ่งกำหนดในตารางด้านล่าง

จำนวน : {1, 2, 3}

การแรเงา : {ทึบ, แฉบ, โปร่ง}

สี : {แดง, เขียว, ม่วง}

รูปร่าง : {ไข่, หยุกหยิก, เพชร}



หนึ่งสำรับมีไพ่ 81 ใบ โดยจะมีเพียงหนึ่งใบสำหรับแต่ละส่วนผสมของคุณสมบัติที่เป็นไปได้ เป้าหมายของเกมคือการหาชุดไพ่ที่เป็นไปตามกฎต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 ไฟสามใบเรียกว่า **เซต** ก็ต่อเมื่อ คุณสมบัติทั้ง 4 เหมือนกันทั้งหมดหรือต่างกันทั้งหมด ยกตัวอย่างได้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 ชุดไฟสามใบต่อไปนี้ เป็นเซต

1.



ไฟสามใบนี้เป็นเซต เนื่องจากมี 3 คุณสมบัติเหมือนกันทั้งหมดคือ รูปร่าง (รูปไข่), สี (เขียว), การแรเงา (ทึบ) และมี 1 คุณสมบัติที่ต่างกันทั้งหมดคือ จำนวนของรูปร่าง

2.



ไฟสามใบนี้เป็นเซต เนื่องจากมี 2 คุณสมบัติเหมือนกันทั้งหมดคือ สี (เขียว), การแรเงา (ทึบ) และมี 2 คุณสมบัติที่ต่างกันทั้งหมดคือ รูปร่าง, จำนวนของรูปร่าง

3.



ไฟสามใบนี้เป็นเซต เนื่องจากมี 1 คุณสมบัติเหมือนกันทั้งหมดคือ รูปร่าง (รูปไข่) และมี 3 คุณสมบัติที่ต่างกันทั้งหมดคือ สี, การแรเงา, จำนวนของรูปร่าง

4.



ไฟสามใบนี้เป็นเซต เนื่องจากมี 4 คุณสมบัติที่ต่างกันทั้งหมดคือ รูปร่าง, สี, การแรเงา, จำนวนของรูปร่าง

ตัวอย่าง 1.2 ชุดไฟสามใบต่อไปนี้ ไม่เป็นเซต

1.



ไฟสามใบนี้ไม่เป็นเซต เนื่องจากคุณสมบัติ รูปร่างไม่เหมือนหรือต่างกันทั้งหมด เพราะมีไฟรูปไข่ 2 ใบ และไฟรูปหยุ่หยิก 1 ใบ

2.



ไฟสามใบนี้ไม่เป็นเซต เนื่องจากคุณสมบัติ สีไม่เหมือนหรือต่างกันทั้งหมด เพราะมีไฟสีเขียว 2 ใบ และไฟสีแดง 1 ใบ

3.



ไฟสามใบนี้ไม่เป็นเซต เนื่องจากคุณสมบัติ การแรเงาไม่เหมือนหรือต่างกันทั้งหมด เพราะมีไฟทึบ 2 ใบ และไฟแฉก 1 ใบ

4.



ไฟสามใบนี้ไม่เป็นเซต เนื่องจากคุณสมบัติ จำนวนรูปร่างไม่เหมือนหรือต่างกันทั้งหมด เพราะมีไฟจำนวนรูปร่าง 1 รูปร่าง 1 ใบ และไฟจำนวนรูปร่าง 2 รูปร่าง 2 ใบ

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อหารูปแบบการวางไฟ 12 ใบที่ทำให้เกิดเพียง 6 เซตเท่านั้น
2. เพื่อเขียนโปรแกรมหาคำตอบของเกมเซตแบบ puzzle

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1. ศึกษาเกมเซตแบบ puzzle
2. ศึกษาการเขียนโปรแกรมเพื่อหาคำตอบของเกมเซตแบบ puzzle ในภาษา python

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รูปแบบการวางไฟ 12 ใบที่ทำให้เกิดเพียง 6 เซตเท่านั้น
2. ได้โปรแกรมหาคำตอบของเกมเซตแบบ puzzle

1.5 โครงร่างของรายงาน

เนื้อหาในรายงานฉบับนี้จะแบ่งตาม เรื่องที่ศึกษาและผลของการศึกษาแบ่งเป็นบทย่อย ๆ ดังนี้

บทที่ 2 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเกมเซต ซึ่งความรู้พื้นฐานที่ใช้เป็นความรู้เรื่อง กติกาของเกมเซตแบบดั้งเดิม กติกาของเกมเซตแบบปริศนา และจำนวนเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมด พร้อมตัวอย่างประกอบ

บทที่ 3 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นความรู้เรื่อง ฟังก์ชัน จำนวนไพต์สุดท้ายที่มีเซตเกิดขึ้นเสมอ วิธีแปลงเซตให้อยู่ในรูปเรขาคณิต การอยู่บนเส้นตรงเดียวกันของจุดสามจุดในฟิลด์ เซตย่อยที่ไม่ก่อให้เกิดเส้นตรงใน $\mathbb{F}_3^d (d - cap)$ และการเขียนแสดงแคปด้วยภาพ พร้อมตัวอย่างประกอบ เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้น

บทที่ 4 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับผลการศึกษา ซึ่งเป็นเรื่อง จำนวนเซตที่เป็นไปได้มากที่สุดของไพต์ 12 ใบ วิธีการสร้างเกมเซตแบบ puzzle โดยที่มีไพต์กองกลาง 12 ใบ และมีเซตเกิดขึ้นทั้งหมด 6 เซต และขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบของปริศนาเกมเซต พร้อมตัวอย่างประกอบ เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้น

บทที่ 5 เป็นบทสรุปของรายงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ในบทนี้จะกล่าวถึงกติกาที่ใช้ในการเล่นเกมเซต โดยจะแบ่งได้เป็น 2 แบบ ได้แก่ กติกาเกมเซตแบบดั้งเดิม (Traditional) และกติกาเกมเซตแบบปริศนา (Puzzle) และยังมีการกล่าวถึงจำนวนเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเกมเซต

2.1 กติกาเกมเซตแบบดั้งเดิม (Traditional)

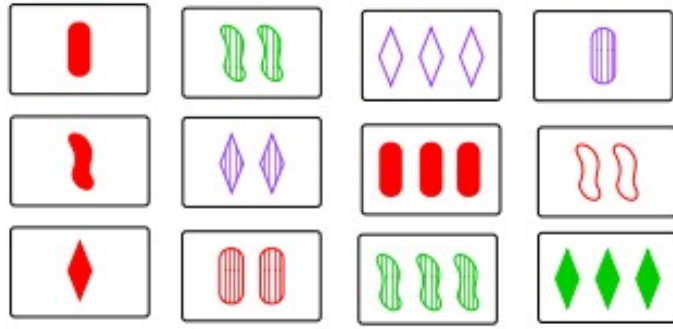
เป็นกติกาที่ใช้เล่นกันในตอนที่ยุคแรกเริ่มมาสู่ตลาดในยุคแรกและนิยมใช้ในการแข่งขันทั่วไป ซึ่งวิธีการเล่นนั้นจะมีผู้เล่น 2 คนและ กรรมการที่เป็นคนแจกไพ่ 1 คน โดยมีวิธีเล่นดังนี้

1. กรรมการจะใช้สำหรับพิเศษสำหรับเกมเซตซึ่งมีไพ่ทั้งหมด 81 ใบ
2. กรรมการจะสับไพ่ชุดนี้ และเปิดไพ่ 12 ใบพร้อมหงายหน้าไพ่เรียงกันไว้บนโต๊ะระหว่างผู้เล่น 2 คน เรียกไพ่ 12 ใบนี้ว่า ไพ่กองกลาง
3. ผู้เล่นแต่ละคนจะต้องแข่งกันหาเซตจากไพ่กองกลาง เมื่อผู้เล่นที่พบเซตจะตะโกนว่าเซตก่อนจะหยิบไพ่เหล่านั้นออกจากโต๊ะ
4. เมื่อผู้เล่นมีการหยิบไพ่ออกจากโต๊ะ กรรมการจะเปิดไพ่ใหม่อีก 3 ใบเติมเข้ากองกลางทันที
5. จะเล่นแบบนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าไพ่จะหมดสำหรับ
6. เมื่อไพ่หมดสำหรับผู้เล่นที่มีเซตมากที่สุดจะเป็นผู้ชนะ

ในบางกรณีไพ่กองกลาง 12 ใบที่วางอยู่บนโต๊ะนั้นอาจไม่มีเซตอยู่ในนั้น ในกรณีนี้กรรมการจะเปิดไพ่กองกลางเพิ่มอีก 3 ใบเพื่อแก้ไขสถานการณ์นี้ และจะเปิดไพ่เพิ่มทีละ 3 ใบเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีเซตปรากฏขึ้น

2.2 กติกาเกมเซตแบบปริศนา (Puzzle)

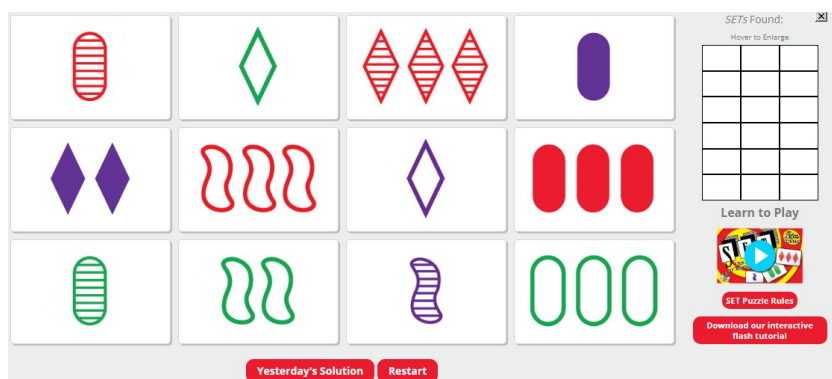
เป็นวิธีการเล่นที่สะดวกและเป็นที่ยอมรับในปัจจุบัน เพราะผู้เล่นสามารถเล่นแข่งกับตัวเองหรือผู้อื่นได้ โดยที่ไม่ต้องมีกรรมการ แต่จะเล่นบนเว็บไซต์ของเกมเซตโดยตรงแทน ซึ่งมีวิธีเล่นดังนี้



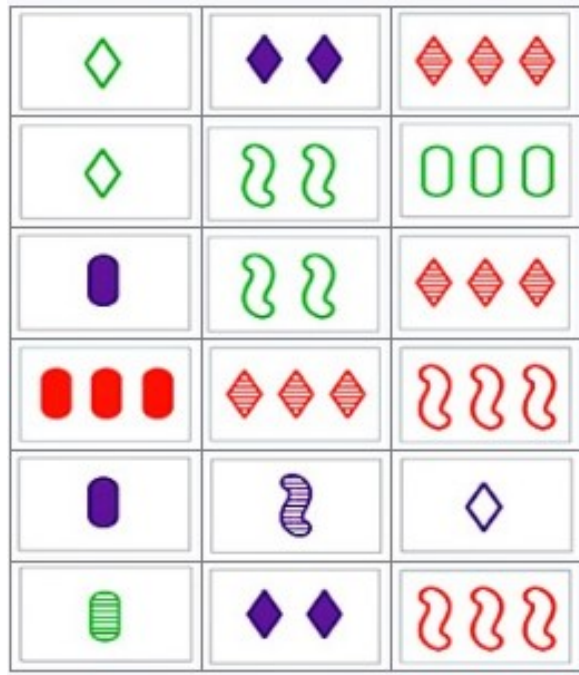
รูปที่ 2.1: ตัวอย่างไพ่กองกลางของเกมเซตแบบดั้งเดิม

1. ในหน้าเว็บจะมีไพ่เปิดขึ้นมาทั้งหมดเพียง 12 ใบเท่านั้น
2. ในไพ่ 12 ใบนั้นจะมีเซตที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมดเพียง 6 เซตเท่านั้น
3. จะมีการจับเวลาทันทีเมื่อผู้เล่นเข้าสู่หน้าเว็บไซต์
4. ผู้เล่นจะต้องหาเซตทั้ง 6 เซตนั้นให้เจอ เมื่อเลือกเซตใดแล้วไพ่สามใบนั้นจะปรากฏในตารางขนาด 6×3 ทางด้านขวาของหน้าจอ
5. โดยไพ่แต่ละใบนั้นผู้เล่นสามารถเลือกใช้ซ้ำได้
6. เมื่อผู้เล่นหาเซตครบทั้ง 6 เซต
7. เกมจะจบทันทีและบอกเวลาที่ผู้เล่นใช้ในการหาเซตทั้ง 6 เซต
8. เวลาเปรียบเสมือนคะแนนที่เราได้จากการเล่นเกม ผู้เล่นที่ใช้เวลาในการหาเซตทั้ง 6 เซตน้อยที่สุดจะเป็นผู้ชนะ

เว็บที่ใช้ในการเล่นเกมนเซต คือ <https://www.setgame.com/set/puzzle>



รูปที่ 2.2: ตัวอย่างหน้าเว็บเกมเซตก่อนเล่น



รูปที่ 2.3: แสดงเซตทั้ง 6 เซตที่หาได้จากเกมเซต

CONGRATULATIONS!

You completed today's puzzle in 0 hours 02 minutes and 02.287 seconds

Note: Your time is provided for your information only. It has no bearing on the contest.

Win a FREE game!

รูปที่ 2.4: ตัวอย่างหน้าเว็บเกมเซตเมื่อเล่นจบ

2.3 จำนวนเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมด

โดยทั่วไปเมื่อกำหนดไฟมา 2 ใบ เราจะสามารถหาไฟใบที่สามที่สามารถนำมารวมกลุ่มกับไฟสองใบแรก แล้วทำให้เกิดเซตได้เสมอ และมีไฟเพียงใบเดียวเท่านั้น ที่ทำให้เกิดเซตกับไฟ 2 ใบแรก ทั้งนี้เนื่องมาจากความเหมือน และความต่างของแต่ละคุณสมบัติย่อยเดียวกันนั้น หากคุณสมบัติใดต่างกันไฟใบที่สามจะต้องมีสมบัตีย่อยที่ต่างจากไฟ 2 ใบแรก ซึ่งเป็นไปได้แค่เพียงวิธีเดียว สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ไฟ 2 ใบใด ๆ ที่แตกต่างกันจะมีไฟใบที่สามที่ก่อให้เกิดเซตกับไฟสองใบแรก และจะมีเพียงใบเดียวเสมอ

จะได้ว่า $x+y+z = (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) + (-x_1 - y_1, -x_2 - y_2, -x_3 - y_3, -x_4 - y_4)$ จะเห็นได้ว่าจำนวนวิธีการเลือกไฟ 2 ใบจากไฟ 81 ใบ คือ $\binom{81}{2}$ แต่เนื่องจากลำดับของไฟในเซตไม่สำคัญ ดังนั้นจึงมีเซตที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด $\frac{\binom{81}{2}}{3!} = 1080$ แบบ ต่อจากนี้เราจะแจงวิธีนับจำนวนเซตโดยแบ่งกรณีตามจำนวนคุณสมบัติที่

ไฟทั้งเซตแตกต่างกัน ซึ่งแบ่งได้ทั้งหมด 4 กรณี ดังนี้

กรณี 1: คุณสมบัติแตกต่างกันทั้ง 4 คุณสมบัติ

1. ไฟใบแรก: สามารถหยิบได้ 81 วิธี
2. ไฟใบที่สอง: สามารถหยิบได้โดย
 - คุณสมบัติจำนวน ต้องต่างจากไฟใบแรกทำให้เลือกได้ 2 วิธี
 - คุณสมบัติรูปร่าง ต้องต่างจากไฟใบแรกทำให้เลือกได้ 2 วิธี
 - คุณสมบัติสี ต้องต่างจากไฟใบแรกทำให้เลือกได้ 2 วิธี
 - คุณสมบัติการแรงา ต้องต่างจากไฟใบแรกทำให้เลือกได้ 2 วิธีดังนั้นไฟใบที่สองจะหยิบได้ $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ วิธี
3. ไฟใบที่สาม: ต้องหยิบไฟที่จะทำให้เกิดเซตกับไฟ 2 ใบแรก ซึ่งจากทฤษฎีบท 2.1 สามารถหยิบได้ 1 วิธี
4. จากขั้นที่ 1 ถึง 3 ได้ว่าเซตที่เป็นไปได้คือ (81×16) วิธี แต่เนื่องจากเราไม่สนใจลำดับของไฟ 3 ใบในเซตจึงต้องหารออกด้วย 3! ดังนั้นจำนวนเซตที่เป็นได้ทั้งหมดของกรณีนี้คือ $\frac{(81 \times 16)}{3!} = 216$ วิธี

กรณี 2: คุณสมบัติแตกต่างกัน 3 คุณสมบัติ และเหมือนกัน 1 คุณสมบัติ

จะคำนวณโดยการเลือกคุณสมบัติให้เหมือนกัน 1 คุณสมบัติมีวิธีการเลือก 4 วิธี

และแต่ละคุณสมบัติสามารถเลือกรูปแบบได้อีก 3 วิธี

1. ไฟใบแรก: จะหยิบโดยไม่คำนึงถึงคุณสมบัติที่เลือกให้เป็นคุณสมบัติที่ไฟสามใบเหมือนกันทำให้เหลือเพียง 3 คุณสมบัติที่ต้องเลือก
 - คุณสมบัติที่ 1 เลือกได้ 3 วิธี
 - คุณสมบัติที่ 2 เลือกได้ 3 วิธี
 - คุณสมบัติที่ 3 เลือกได้ 3 วิธีดังนั้นไฟใบที่แรกจะหยิบได้ $3 \times 3 \times 3 = 27$ วิธี
2. ไฟใบที่สอง: จะหยิบโดยคุณสมบัติทั้ง 3 คุณสมบัติจะเหมือนไฟใบแรกแต่ต่างกันที่รูปแบบย่อยของแต่ละคุณสมบัติดังนี้
 - คุณสมบัติที่ 1 ต้องเลือกรูปแบบที่ต่างจากไฟใบแรก จะเลือกได้ 2 วิธี
 - คุณสมบัติที่ 2 ต้องเลือกรูปแบบที่ต่างจากไฟใบแรก จะเลือกได้ 2 วิธี
 - คุณสมบัติที่ 3 ต้องเลือกรูปแบบที่ต่างจากไฟใบแรก จะเลือกได้ 2 วิธีดังนั้นไฟใบที่สองจะหยิบได้ $2 \times 2 \times 2 = 8$ วิธี

3. ไฟโบรสาม: ต้องหยิบไฟที่จะทำให้เกิดเซตกับไฟ 2 ใบแรก ซึ่งจากทฤษฎีบท 2.1 สามารถหยิบได้ **1 วิธี**
4. จากขั้นที่ 1 ถึง 3 ได้ว่าเซตที่เป็นไปได้คือ $(4 \times 3 \times 27 \times 8)$ วิธี แต่เนื่องจากเราไม่สนใจลำดับของไฟ 3 ใบในเซต จึงต้องหารออกด้วย $3!$ ดังนั้นจำนวนเซตที่เป็นได้ทั้งหมดของกรณีนี้คือ $\frac{(4 \times 3 \times 27 \times 8)}{3!} = 432$ วิธี

กรณี 3: คุณสมบัติแตกต่างกันทั้ง 2 คุณสมบัติ และเหมือนกัน 2 คุณสมบัติ

จะคำนวณโดยการเลือกคุณสมบัติให้เหมือนกัน 2 คุณสมบัติมีวิธีการเลือก $\frac{4 \times 3}{2!} = 6$ วิธี (เนื่องจากเราไม่สนใจลำดับในการเลือกคุณสมบัติ 2 คุณสมบัติจึงต้องหารออกด้วย $2!$)

และแต่ละคุณสมบัติสามารถเลือกรูปแบบได้อีก 3 วิธี ซึ่งมี 2 คุณสมบัติดังนั้นจะเลือกได้ $3 \times 3 = 9$ วิธี

1. ไฟโบรแรก: จะหยิบโดยไม่คำนึงถึง 2 คุณสมบัติที่เลือกให้เป็นสองคุณสมบัติที่ไฟสามใบเหมือนกันทำให้เหลือเพียง 2 คุณสมบัติที่ต้องเลือก

- คุณสมบัติที่ 1 เลือกได้ **3 วิธี**

- คุณสมบัติที่ 2 เลือกได้ **3 วิธี**

ดังนั้นไฟโบรแรกจะหยิบได้ $3 \times 3 = 9$ วิธี

2. ไฟโบรที่สอง: จะหยิบโดยคุณสมบัติทั้ง 2 คุณสมบัติจะเหมือนไฟโบรแรกแต่ต่างกันที่รูปแบบย่อยของแต่ละคุณสมบัติดังนี้

- คุณสมบัติที่ 1 ต้องเลือกรูปแบบที่ต่างจากไฟโบรแรก จะเลือกได้ **2 วิธี**

- คุณสมบัติที่ 2 ต้องเลือกรูปแบบที่ต่างจากไฟโบรแรก จะเลือกได้ **2 วิธี**

ดังนั้นไฟโบรที่สองจะหยิบได้ $2 \times 2 = 4$ วิธี

3. ไฟโบรสาม: ต้องหยิบไฟที่จะทำให้เกิดเซตกับไฟ 2 ใบแรก ซึ่งจากทฤษฎีบท 2.1 สามารถหยิบได้ **1 วิธี**

4. จากขั้นที่ 1 ถึง 3 ได้ว่าเซตที่เป็นไปได้คือ $(6 \times 9 \times 9 \times 4)$ วิธี แต่เนื่องจากเราไม่สนใจลำดับของไฟ 3 ใบในเซต จึงต้องหารออกด้วย $3!$ ดังนั้นจำนวนเซตที่เป็นได้ทั้งหมดของกรณีนี้คือ $\frac{(6 \times 9 \times 9 \times 4)}{3!} = 324$ วิธี

กรณี 4: คุณสมบัติแตกต่างกันทั้ง 1 คุณสมบัติ และเหมือนกัน 3 คุณสมบัติ

จะคำนวณโดยการเลือกคุณสมบัติให้เหมือนกัน 3 คุณสมบัติมีวิธีการเลือก $\frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4$ วิธี (เนื่องจากเราไม่สนใจลำดับในการเลือกคุณสมบัติ 3 คุณสมบัติจึงต้องหารออกด้วย $3!$)

และแต่ละคุณสมบัติสามารถเลือกรูปแบบได้อีก 3 วิธี ซึ่งมี 3 คุณสมบัติดังนั้นจะเลือกได้ $3 \times 3 \times 3 = 27$ วิธี

1. ไฟโบรแรก: จะหยิบโดยไม่คำนึงถึง 3 คุณสมบัติที่เลือกให้เป็นสามคุณสมบัติที่ไฟสามใบเหมือนกันทำให้เหลือเพียง 1 คุณสมบัติที่ต้องเลือก

- คุณสมบัติที่ 1 เลือกได้ **3 วิธี**

ดังนั้นไฟโบรแรกจะหยิบได้ **3 วิธี**

2. ไพใบที่สอง: จะหยิบโดยคุณสมบัติจะเหมือนไพ่ใบแรกแต่ต่างกันที่รูปแบบย่อยของแต่ละคุณสมบัติดังนี้

- คุณสมบัติที่ 1 ต้องเลือกรูปแบบที่ต่างจากไพ่ใบแรก จะเลือกได้ 2 วิธี

ดังนั้นไพ่ใบที่สองจะหยิบได้ 2 วิธี

3. ไพใบที่สาม: ต้องหยิบไพ่ที่จะทำให้เกิดเซตกับไพ่ 2 ใบแรก ซึ่งจากทฤษฎีบท 2.1 สามารถหยิบได้ 1 วิธี

4. จากขั้นที่ 1 ถึง 3 ได้ว่าเซตที่เป็นไปได้คือ $(4 \times 27 \times 3 \times 2)$ วิธี แต่เนื่องจากเราไม่สนใจลำดับของไพ่ 3 ใบในเซต จึงต้องหารออกด้วย $3!$ ดังนั้นจำนวนเซตที่เป็นได้ทั้งหมดของกรณีนี้คือ $\frac{(4 \times 27 \times 3 \times 2)}{3!} = 108$ วิธี

ดังนั้นจำนวนเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเกมเซต คือ $216 + 432 + 324 + 108 = 1080$ วิธี

บทที่ 3

ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเกมเซต

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์เกี่ยวกับเซต ลำดับของเนื้อหา คือ ฟังก์ชัน จำนวนไพต์สุดที่จะมีเซตเกิดขึ้นเสมอ วิธีแปลงเซตให้อยู่ในรูปเรขาคณิต การอยู่บนเส้นตรงเดียวกันของจุดสามจุดในฟังก์ชัน เซตย่อยที่ไม่ก่อให้เกิดเส้นตรงใน $\mathbb{F}_3^d$ ($d - \text{cap}$)

3.1 ฟังก์ชัน (Field)

บทนิยาม 3.1 ให้ $\mathbb{F}$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง พร้อมด้วยการดำเนินการทวิภาค 2 ชนิด คือ การบวก $+$ และการคูณ $\times$ จะเรียก $\mathbb{F}$ ว่า **ฟังก์ชัน (field)** $(\mathbb{F}, +, \times)$ เมื่อมีสมบัติต่อไปนี้

1. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associativity) ภายใต้การบวก
นั่นคือ $(a + b) + c = a + (b + c)$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in \mathbb{F}$
2. การมีสมาชิกเอกลักษณ์ (identity element) ภายใต้การบวก $0 \in \mathbb{F}$
นั่นคือ $a + 0 = a = 0 + a$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{F}$
3. การมีตัวผกผัน (inverse) ภายใต้การบวก
นั่นคือ สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{F}$ มี $b \in \mathbb{F}$ ที่ทำให้ $a + b = 0 = b + a$
เรียก b ว่าตัวผกผันการบวกของ a นิยมเขียนแทนด้วย $-a$
4. สมบัติการสลับที่ (commutativity) ภายใต้การบวก
นั่นคือ $a + b = b + a$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in \mathbb{F}$
5. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ภายใต้การคูณ
นั่นคือ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in \mathbb{F}$
6. การมีสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การคูณ $1 \in \mathbb{F}$
นั่นคือ $a \times 1 = a = 1 \times a$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{F}$

7. การมีตัวผกผันภายใต้การคูณ

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{F} - \{0\}$ มี $b \in \mathbb{F}$ ที่ทำให้ $a \times b = 1 = b \times a$

เรียก b ว่าตัวผกผันการคูณของ a นิยมเขียนแทนด้วย a^{-1}

8. การมีสมบัติการสลับที่ภายใต้การคูณ

นั่นคือ $a \times b = b \times a$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in \mathbb{F}$

9. การมีสมบัติการแจกแจง (distribution)

นั่นคือ $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ และ $c \times (a + b) = (c \times a) + (c \times b)$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in \mathbb{F}$

ตัวอย่าง 3.1 เซตของจำนวนจริงทั้งหมด พร้อมด้วยการบวกและการคูณ $(\mathbb{R}, +, \times)$

ตัวอย่าง 3.2 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะและ $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

สำหรับ a และ b ใด ๆ ใน $\mathbb{F}_p$ เรากำหนด

$$a + b = \text{เศษจากการหาร } a + b \text{ ด้วย } p$$

$$a \times b = \text{เศษจากการหาร } ab \text{ ด้วย } p$$

ได้ว่า $(\mathbb{F}_p, +, \times)$ เป็นฟีลด์ที่มีสมาชิกจำนวนจำกัด

หมายเหตุ โดยทั่วไป ให้ $\mathbb{F}_q$ แทนฟีลด์จำกัดที่มีสมาชิก q ตัว และนิยมเรียก $\mathbb{F}_q^n$ ว่าปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $\mathbb{F}_3$ เป็นฟีลด์ที่มีสมาชิก 3 ตัว ซึ่งนิยามการบวกและการคูณของสมาชิกใน $\mathbb{F}_3$ ดังนี้

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

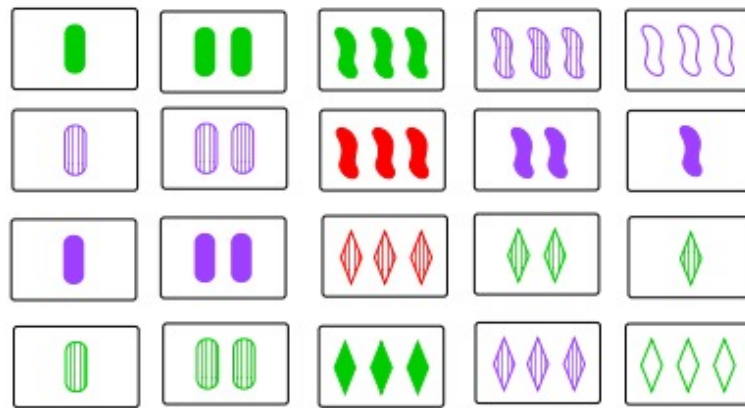
รูปที่ 3.1: ตารางการบวกของ $\mathbb{F}_3$

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

รูปที่ 3.2: ตารางการคูณของ $\mathbb{F}_3$

3.2 จำนวนไฟต่ำสุดที่จะมีเซตเกิดขึ้นเสมอ

ในส่วนนี้เราจะกล่าวถึงจำนวนไฟต่ำสุดที่จะมีเซตเกิดขึ้นเสมอ เพิ่มเติม



ในปี ค.ศ.1971 Giuseppe Pellegrino [3] ได้ทำการค้นหาทุกกรณีบนคอมพิวเตอร์ค้นพบว่าไฟ 20 ใบ ข้างต้นเป็นจำนวนไฟสูงสุดที่เป็นไปได้ที่ไม่มีเซตอยู่ในนั้น เนื่องจากการเลือกจัดชุดไฟ 21 ใบจาก 81 ใบทั้ง $\binom{81}{21}$ จะพบว่ามีเซตในนั้นเสมอ

3.3 วิธีแปลงเซตให้อยู่ในรูปเรขาคณิต

สามารถแปลงเซตให้อยู่ในรูปเรขาคณิตได้ดังนี้ ให้ $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ และพิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{F}_3^4$ จุดของ $\mathbb{F}_3^4$ เป็น สี่อันดับในรูป (x_1, x_2, x_3, x_4) โดยที่แต่ละพิกัดมีค่าอยู่ในสามค่าที่เป็นไปได้ เมื่ออ้างอิงกับตารางแสดงลักษณะของเซต จะได้ไฟที่ตรงกับจุดของ $\mathbb{F}_3^4$ และในทางกลับกัน หากมีไฟก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปจุดใน $\mathbb{F}_3^4$ ได้ เช่น

โดยกำหนดให้ตัวเลขแทนแต่ละคุณสมบัติดังนี้

จำนวน : $\{1, 2, 3\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$

การเรียง : $\{\text{ทึบ, แฉบ, โปรง}\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$

สี : $\{\text{แดง, เขียว, ม่วง}\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$

รูปร่าง : $\{\text{ไข่, หยูกหยิก, เพชร}\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$

ตัวอย่าง

$(1, 0, 2, 1) \longleftrightarrow 2 \text{ ทึบ สีม่วง หยูกหยิก} \longleftrightarrow$ 

ดังนั้นโพเซตทั้ง 81 ใบ สามารถเขียนในรูปสมาชิกทั้งหมดของ $\mathbb{F}_3^4$ ได้ดังนี้ โดยให้โพในรูปที่ 3.3 แทนด้วยสีสิ่งอันดับในตำแหน่งเดียวกันของรูปที่ 3.4

◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇
◇	◇◇	◇◇◇	◇	◇◇	◇◇◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇

รูปที่ 3.3: โพเซตทั้งหมด

(0, 2, 0, 2)	(1, 2, 0, 2)	(2, 2, 0, 2)	(0, 2, 0, 0)	(1, 2, 0, 0)	(2, 2, 0, 0)	(0, 2, 0, 1)	(1, 2, 0, 1)	(2, 2, 0, 1)
(0, 1, 0, 2)	(1, 1, 0, 2)	(2, 1, 0, 2)	(0, 1, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)	(2, 1, 0, 0)	(0, 1, 0, 1)	(1, 1, 0, 1)	(2, 1, 0, 1)
(0, 0, 0, 2)	(1, 0, 0, 2)	(2, 0, 0, 2)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, 1)	(2, 0, 0, 1)
(0, 2, 1, 2)	(1, 2, 1, 2)	(2, 2, 1, 2)	(0, 2, 1, 0)	(1, 2, 1, 0)	(2, 2, 1, 0)	(0, 2, 1, 1)	(1, 2, 1, 1)	(2, 2, 1, 1)
(0, 1, 1, 2)	(1, 1, 1, 2)	(2, 1, 1, 2)	(0, 1, 1, 0)	(1, 1, 1, 0)	(2, 1, 1, 0)	(0, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1)	(2, 1, 1, 1)
(0, 0, 1, 2)	(1, 0, 1, 2)	(2, 0, 1, 2)	(0, 0, 1, 0)	(1, 0, 1, 0)	(2, 0, 1, 0)	(0, 0, 1, 1)	(1, 0, 1, 1)	(2, 0, 1, 1)
(0, 2, 2, 2)	(1, 2, 2, 2)	(2, 2, 2, 2)	(0, 2, 2, 0)	(1, 2, 2, 0)	(2, 2, 2, 0)	(0, 2, 2, 1)	(1, 2, 2, 1)	(2, 2, 2, 1)
(0, 1, 2, 2)	(1, 1, 2, 2)	(2, 1, 2, 2)	(0, 1, 2, 0)	(1, 1, 2, 0)	(2, 1, 2, 0)	(0, 1, 2, 1)	(1, 1, 2, 1)	(2, 1, 2, 1)
(0, 0, 2, 2)	(1, 0, 2, 2)	(2, 0, 2, 2)	(0, 0, 2, 0)	(1, 0, 2, 0)	(2, 0, 2, 0)	(0, 0, 2, 1)	(1, 0, 2, 1)	(2, 0, 2, 1)

รูปที่ 3.4: สิ่งอันดับแทนโพเซตทั้งหมด

3.4 การอยู่บนเส้นตรงเดียวกันของจุดสามจุดในฟิลด์

บทนิยาม 3.2 กำหนดจุดสามจุด P_1, P_2, P_3 ในฟิลด์ n มิติใด ๆ จะกล่าวว่า อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear) ก็ต่อเมื่ออัตราส่วนของระยะทางในแต่ละพิกัดสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$y_1 - x_1 : y_2 - x_2 : \cdots : y_n - x_n = z_1 - x_1 : z_2 - x_2 : \cdots : z_n - x_n$$

โดยที่ $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n), P_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ และ $P_3 = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น ถ้าให้ α, β, γ เป็นสมาชิกสามตัวใด ๆ ใน $\mathbb{F}_3$ แล้วจะได้ว่า $\alpha + \beta + \gamma = \vec{0}$ ก็ต่อเมื่อ ข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\alpha = \beta = \gamma$

2. $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{0, 1, 2\}$

พิจารณาจุด $a, b, c \in \mathbb{F}_3^4$ ซึ่ง $a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4), c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ เป็นจุดที่สอดคล้องกับไพสามใบที่เป็นเซต จะได้ว่าในแต่ละพิกัดของ a, b และ c จะเหมือนกันหมด หรือต่างกันหมดเท่านั้น ทำให้ได้ว่า $a + b + c = \vec{0}$

ดังนั้น

$$a + b + c = \vec{0}$$

$$-2a + b + c = \vec{0}$$

$$b - a = c - a$$

นั่นคือ

$$b_1 - a_1 : b_2 - a_2 : b_3 - a_3 : b_4 - a_4 = c_1 - a_1 : c_2 - a_2 : c_3 - a_3 : c_4 - a_4$$

ดังนั้น a, b และ c อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จากการเชื่อมโยงไปเข้ากับสมาชิกของ $\mathbb{F}_3^4$ ซึ่งเป็นสี่อันดับฐานสามในลักษณะดังกล่าว จะได้ว่าไพ 3 ใบใด ๆ จะเป็นเซตก็ต่อเมื่อสามจุดที่สอดคล้องกับไพสามใบนั้นอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



หมายเหตุ ในที่นี้ $\vec{0}$ แทน $(0, 0, 0, 0)$ แน่นอนว่าแนวทางการพิสูจน์ดังกล่าว เป็นจริงสำหรับ $\mathbb{F}_3^d$ ทุกค่า d ดังนั้นเราสามารถมองได้ว่าผู้เล่นของเกมเซต ได้พยายามหาเส้นตรงที่เกิดขึ้นจากเซตย่อยของ $\mathbb{F}_3^4$ นิยามเป็นกฎได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3 กฎการอยู่บนเส้นตรงเดียวกันเชิงสัมพรรค (The Affine Collinearity Rule) : จุด $a, b, c \in \mathbb{F}_3^d$ จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อ $a + b + c = \vec{0}$

ตัวอย่าง 3.4 พิจารณา จุด $a, b, c \in \mathbb{F}_3^4$ ซึ่ง $a = (1, 2, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1, 2)$, $c = (2, 0, 2, 0)$ ซึ่งเป็นจุดที่สอดคล้องกับไฟ 3 ใบ ดังรูป



รูปที่ 3.5: ไฟที่สอดคล้องกับจุด a, b, c

ได้ว่า

$$\begin{aligned} a + b + c &= (1, 2, 0, 1) + (0, 1, 1, 2) + (2, 0, 2, 0) \\ &= (0, 0, 0, 0) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

ดังนั้น a, b และ c อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ในที่นี้สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1 อีกครั้งในรูปสมาชิกของ $\mathbb{F}_3^4$

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า x และ y เป็นไฟใด ๆ ในรูปสมาชิกของ $\mathbb{F}_3^4$ แล้วจะมีไฟ z เพียงใบเดียวที่ทำให้ x, y, z เป็นเซต

พิสูจน์ ให้ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}_3^4$
เลือก $z = (-x_1 - y_1, -x_2 - y_2, -x_3 - y_3, -x_4 - y_4)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } x + y + z &= (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) + (-x_1 - y_1, -x_2 - y_2, -x_3 - y_3, -x_4 - y_4) \\ &= (x_1 + y_1 - x_1 - y_1, x_2 + y_2 - x_2 - y_2, x_3 + y_3 - x_3 - y_3, x_4 + y_4 - x_4 - y_4) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

ดังนั้น x, y, z เป็นเซต

สมมติมี $z' \in \mathbb{F}_3^4$ ซึ่ง x, y, z เป็นเซต

จะแสดงว่า $z' = z$

จาก x, y, z และ x, y, z' เป็นเซต

จะได้ว่า $x + y + z = \vec{0} = x + y + z'$

$$x + y + z - x - y = x + y + z' - x - y$$

ดังนั้น $z = z'$

ตัวอย่าง กำหนดไฟ  และ 
 จะได้ว่ามีเพียงไฟ  ที่ทำให้ไฟทั้งสามใบเป็นเซต
 จะเห็นได้ว่า  = (0, 2, 0, 2)  = (0, 2, 1, 0)
 และ  = $-(0, 2, 0, 2) - (0, 2, 1, 0) = (0, 2, 1, 0)$

3.5 เซตย่อยที่ไม่ก่อให้เกิดเส้นตรงใน $\mathbb{F}_3^d$ (d-cap)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวัตถุในทางคณิตศาสตร์ที่สามารถนำไปสู่จำนวนไฟต่ำสุดที่จะมีเซตเกิดขึ้นเสมอ

บทนิยาม 3.5 เซตย่อยใด ๆ ของ $\mathbb{F}_3^d$ ที่สมาชิกไม่ก่อให้เกิดเส้นตรงจะเรียกว่า d -แคป (d -cap)

ตัวอย่าง 3.5 กำหนด $S_1 = \{(0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{F}_3^4$ จะได้ว่า S_1 เป็น 4-แคป
 เนื่องจากสามารถพิจารณา 3 จุดใด ๆ ดังนี้



รูปที่ 3.6: สมาชิกของ S_1

กรณีที่ 1 : พิจารณา $(0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 0) \in S_1$

ได้ว่า

$$(0, 2, 1, 1) + (1, 2, 1, 1) + (0, 1, 2, 0) = (0, 2, 1, 2) \neq \vec{0}$$

ดังนั้น $(0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 0)$ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กรณีที่ 2 : พิจารณา $(0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 0, 0) \in S_1$

ได้ว่า

$$(0, 2, 1, 1) + (1, 2, 1, 1) + (1, 2, 0, 0) = (2, 0, 2, 2) \neq \vec{0}$$

ดังนั้น $(0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 0, 0)$ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กรณีที่ 3 : พิจารณา $(0, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0) \in S_1$

ได้ว่า

$$(0, 2, 1, 1) + (0, 1, 2, 0) + (1, 2, 0, 0) = (1, 2, 0, 1) \\ \neq \vec{0}$$

ดังนั้น $(0, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0)$ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กรณีที่ 4 : พิจารณา $(1, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0) \in S_1$

ได้ว่า

$$(1, 2, 1, 1) + (0, 1, 2, 0) + (1, 2, 0, 0) = (2, 2, 0, 1) \\ \neq \vec{0}$$

ดังนั้น $(0, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0)$ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จากทั้ง 4 กรณี จึงสรุปได้ว่า S_1 เป็น 4-แคป ตัวอย่าง 3.6 กำหนด

$S_2 = \{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 2, 0), (2, 2, 2, 0), (1, 2, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{F}_3^4$ จะได้ว่า S_2 ไม่เป็น 4-แคป

เนื่องจาก พิจารณา $(1, 0, 2, 0), (0, 1, 2, 0), (2, 2, 2, 0) \in S_2$

ได้ว่า

$$(1, 0, 2, 0) + (0, 1, 2, 0) + (2, 2, 2, 0) = (0, 0, 0, 0) \\ = \vec{0}$$

ดังนั้น $(1, 0, 2, 0), (0, 1, 2, 0), (2, 2, 2, 0)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ทำให้ S_2 ไม่เป็น 4-แคป



รูปที่ 3.7: สมาชิกของ S_2

ดังนั้นปัญหาของการหาจำนวนไฟที่มากที่สุดที่ไม่ทำให้เกิดเซต จึงเทียบเท่ากับการหาขนาดที่ใหญ่ที่สุดของ d -แคปเมื่อ d มีค่าเท่ากับ 4

จำนวนจุดที่มากที่สุดของแคปใน $\mathbb{F}_3^4$ ได้มีผู้ค้นพบตั้งแต่ปี ค.ศ. 1971 โดยไม่ได้ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณแต่อย่างใด ถือว่า Giuseppe Pellegrino [3] ได้ค้นพบคำตอบก่อนที่เกมเซตจะเกิดขึ้นถึงสามปีด้วยกัน เขาได้หาคำตอบในรูปทั่วไป โดยเป็นการศึกษาเกี่ยวกับเซตภาพฉาย (projective set) ดังที่เราได้กล่าวถึง d -แคปไปก่อนหน้านี้

บทนิยาม 3.6 สำหรับแคปใน $\mathbb{F}_3^d$ หรือ d -แคป จะกล่าวว่าแคปนั้นเป็นแคปใหญ่ที่สุด (maximal cap) ก็ต่อเมื่อแคปนั้นเป็นแคปที่มีจำนวนจุดมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

กำหนดสัญลักษณ์ a_d แทนขนาดของแคปใหญ่ที่สุดใน $\mathbb{F}_3^d$ ค่าของ a_d สามารถแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

d	1	2	3	4	5	6	7
a_d	2	4	9	20	45	$112 \leq a_6 \leq 114$	?

หมายเหตุ 1 ค่าของ a_d เมื่อ $d \leq 4$ สามารถหาได้โดยการใช้คอมพิวเตอร์ค้นหาแบบทั่วทั้งหมด [3] (exhaustive search)

เราสามารถขยายเกมเซตไปได้อีกหลากหลายแบบ เช่นเราสามารถเพิ่มอีกสีหนึ่ง เพิ่มรูปทรง เพิ่มการแรเงา และจำนวนลงบนไฟ และทำให้เกิดไฟที่สอดคล้องกับจุดใน $\mathbb{F}_4^4$ อย่างไรก็ตามการเพิ่มจำนวนในแต่ละคุณลักษณะนี้จะทำให้เกิดตัวเลือกที่มากขึ้นในการนิยามคำว่าเซต เช่น เราจะให้เซตเป็นไฟสามใบที่แต่ละคุณลักษณะเหมือนหรือแตกต่างกัน หรือ เราจะให้เซตเป็นจุดสามจุดบนเส้นตรงเดียวกัน แต่เนื่องจากแต่ละเส้นตรงบน $\mathbb{F}_4^4$ มีสี่จุด เราจะเลือกให้ไฟสามใบเป็นเซตหรือ ไฟสี่ใบเป็นเซต ด้วยความซับซ้อนที่เพิ่มขึ้นมานี้ เราจึงจำกัดปัญหาของเราลงไปที่เพียงแค่นับ $\mathbb{F}_3^4$ เท่านั้น

3.6 การเขียนแสดงแคปด้วยภาพ

เราสามารถเขียนแสดงแคปด้วยภาพโดยใช้วิธีดังต่อไปนี้ ตัวอย่างเช่น $d = 2$ คือสนใจเพียงแค่ว่า 2 คุณลักษณะเรากำหนดให้คุณลักษณะรูปร่าง และสีเหลือแบบเดียว คือ รูปไข่ และสีแดง ส่วนคุณลักษณะจำนวน และการแรเงามี 3 แบบเหมือนเดิม ฟังก์ชัน $\mathbb{F}_3^2$ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปกระดาน XO

รูปที่ 3.8: ตารางแสดงสมาชิกของ $\mathbb{F}_3^2$

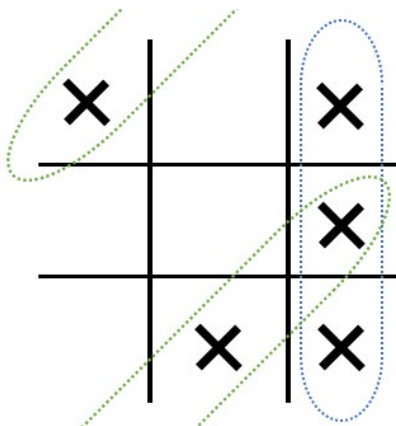
กำหนดให้ S เป็นเซตที่ประกอบด้วยไฟ ดังรูป



รูปที่ 3.9: สมาชิกของ S

ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดใน $\mathbb{F}_3^4$ ได้ดังนี้ $S = \{(0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (2, 2, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\}$ เนื่องจากไฟทุกใบเป็นรูปไข่สีแดง จึงทำให้ พิกัดที่ 3 และพิกัดที่ 4 เป็นค่าเดียวกันทุกจุด จึงสามารถพิจารณาเพียง

คุณลักษณะที่เหลือ และลดรูปเป็น $S' = \{(0,0), (0,2), (1,2), (2,2), (2,1)\} \subseteq \mathbb{F}_3^2$ เราจะเขียนแทนสมาชิกแต่ละตัว ซึ่งเป็นสับเซตของ $\mathbb{F}_3^2$ ด้วยเครื่องหมาย “X” ลงบนกระดานในช่องที่สอดคล้องกันได้ดังนี้



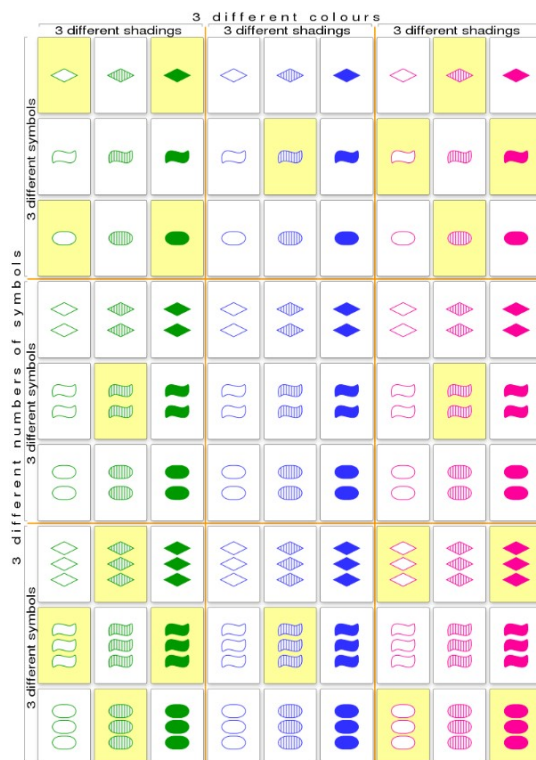
รูปที่ 3.10: ตารางแสดงตัวอย่างของการเกิดเส้นตรง $\mathbb{F}_3^2$

จะเห็นว่าเส้นตรง S สามารถสังเกตได้ง่าย ส่วนใหญ่จะเป็นเส้นตรงที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันกับแนวที่ทำให้ชนะเกม XO นั่นก็คือ เส้นประสีฟ้า นอกจากนั้นจะเป็นเส้นที่ทะลุผ่านขอบของกระดานนั่นก็คือ เส้นประสีเขียว ดังรูปที่ 3.8 รูปต่อไปนี้แสดงให้เห็นแคปใหญ่ที่สุดใน d มิติ เมื่อ d มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 5

1-cap	5-cap
2-cap	
3-cap	
4-cap	

สังเกตได้ว่าเมื่อ d มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 4 แผนภาพจะสมมาตร และภาพของแคปจะไปเป็นส่วนหนึ่งของมิติที่ใหญ่ขึ้น แต่สมบัตินี้ไม่เป็นจริงเมื่อ $d = 5$

ตัวอย่าง ภาพต่อไปนี้แสดง 4-แคป ด้วยไฟที่เราแรงเงาสีเหลือง



รูปที่ 3.11: [https://en.wikipedia.org/wiki/Set_\(card_game\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Set_(card_game))

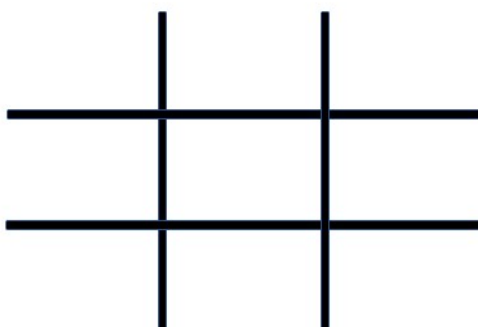
บทที่ 4

ผลการศึกษา (Results)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการศึกษา จำนวนเซตที่เป็นไปได้ของไฟ 12 ใบ และวิธีการสร้างเกมเซตแบบ puzzle โดยมีไฟกองกลาง 12 ใบ และมีเซตเกิดขึ้น 6 เซตเท่านั้น นอกจากนั้นยังมีการแสดงขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบปริศนาเกมเซตอีกด้วย

4.1 จำนวนเซตที่เป็นไปได้ของไฟ 12 ใบ

ในการหาคำตอบนี้มีแนวคิดมาจากการเล่นเกม XO ซึ่งจะมีการตารางไว้ 9 ช่องมาช่วยในการหาคำตอบ



โดยจะมีการเลือกไฟ 3 ใบมาวางไว้ที่มุมซ้ายบนของตารางและไฟ 3 ใบนั้นต้องไม่เป็นเซต ซึ่งวิธีในการเลือกไฟ 3 ใบคือ

1. ไฟใบแรกสามารถเลือกได้ทั้งหมด 81 วิธี
2. ไฟใบที่สองสามารถเลือกได้ทั้งหมด 80 วิธี
3. ไฟใบที่สามสามารถเลือกได้ทั้งหมด $79 - 1 = 78$ (ทฤษฎีบท 2.1)

ให้ A_1 แทนเซตไฟ 3 ใบนี้

$$A_1 = \{0010, 1021, 1200\}$$

จากนั้นเลือกไฟที่จะทำให้เกิดเซตกับไฟ 3 ใบแรกในตารางให้ครบทั้ง 9 ช่อง โดยให้ A_2 แทนเซตของไฟ 6 ใบที่เพิ่มมา

$$A_2 = \{2120, 2211, 0101, 2002, 0222, 1112\}$$

$$\text{ให้ } A = A_1 \cup A_2$$

$$A = \{0010, 1021, 1200, 2120, 2211, 0101, 2002, 0222, 1112\}$$

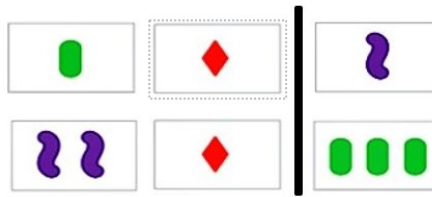
และเลือกไฟ 1 ใบโดยต้องไม่ซ้ำกับไฟใน A ซึ่ง A มีจำนวนสมาชิก 9 ตัว จากไฟทั้งหมด 81 ใบ

ดังนั้นจะเลือกได้ $81 - 9 = 72$ วิธี โดยให้ B แทนเซตของไฟใบนั้น

$$B = \{0002\}$$

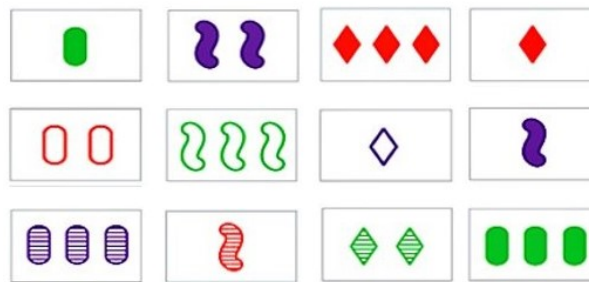
		

จากนั้นเลือกไฟ 2 ใบใน A มาจับคู่กับไฟใน B แล้วเลือกไฟที่ทำให้เกิดเซตมาเติม

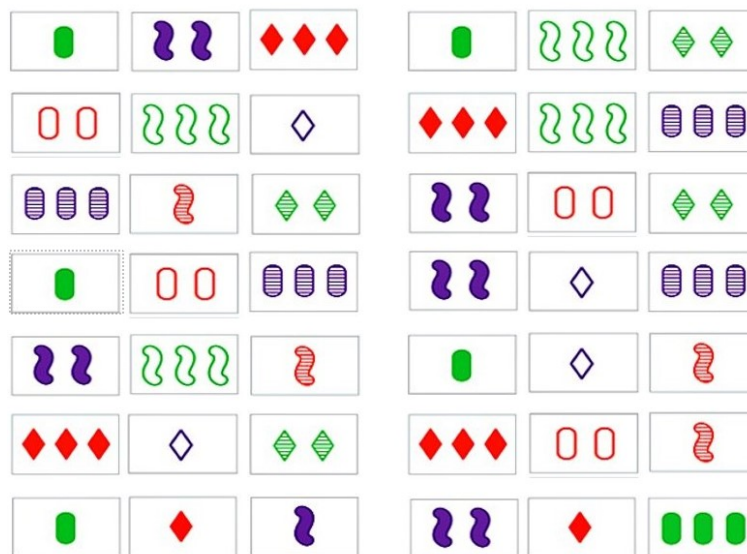


รูปที่ 4.1: แสดงการจับคู่ไพ่ของ A และ B

จากนั้นนำไพ่มารเรียงกันให้ครบ 12 ใบ



รูปที่ 4.2: ไพ่ 12 ใบที่สร้างได้

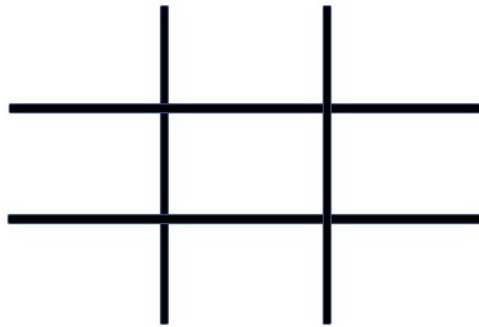


รูปที่ 4.3: แสดงเซตทั้งหมดที่เกิดขึ้น

จะเห็นว่าจำนวนเซตที่เป็นไปได้ของไพ่ 12 ใบ คือ มีทั้งหมด 14 เซต

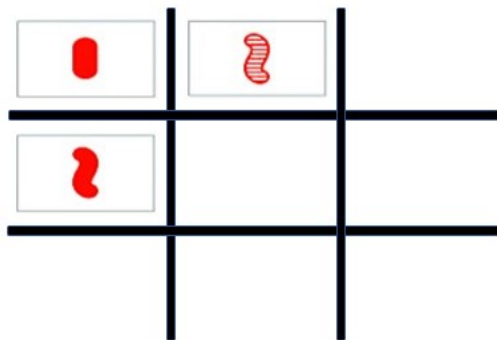
4.2 วิธีการสร้างเกมเซตแบบ puzzle โดยที่มีไฟ่กองกลาง 12 ใบ และมีเซตเกิดขึ้น 6 เซตเท่านั้น

วิธีการสร้างเกมเซตแบบ puzzle มีแนวคิดเดียวกันกับที่หัวข้อ 4.1 ซึ่งก็คือ มีการนำตาราง XO เข้ามาช่วยในการสร้างเกม ในที่นี้เราจะสร้างเกมเซตที่มีไฟ่ 12 ใบ และมีเซตเกิดขึ้น 6 เซตเท่านั้น โดยจะใช้วิธีแบ่งไฟ่เป็นสองชุด ซึ่งแต่ละชุดจะมีไฟ่ 6 ใบ และมี 3 เซตในนั้น



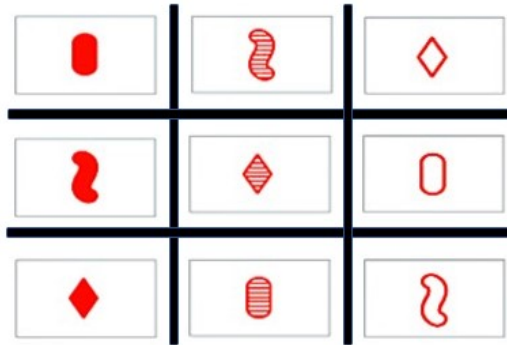
โดยจะมีการเลือกไฟ่ 3 ใบมาวางไว้ที่มุมซ้ายบนของตารางและไฟ่ 3 ใบนั้นต้องไม่เป็นเซต ซึ่งวิธีในการเลือกไฟ่ 3 ใบคือ

1. ไฟ่ใบแรกสามารถเลือกได้ทั้งหมด 81 วิธี
2. ไฟ่ใบที่สองสามารถเลือกได้ทั้งหมด 80 วิธี
3. ไฟ่ใบที่สามสามารถเลือกได้ทั้งหมด $79 - 1 = 78$ (ทฤษฎีบท 2.1)



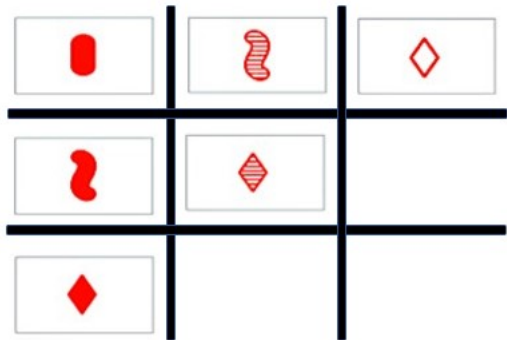
จากนั้นเลือกไฟ่ที่จะทำให้เกิดเซตกับไฟ่ 3 ใบแรกในตารางให้ครบทั้ง 9 ช่อง โดยให้ A แทนเซตของไฟ่ทั้ง 9 ใบ

$$A = \{0000, 0101, 0202, 0001, 0102, 0200, 0002, 0100, 0201\}$$



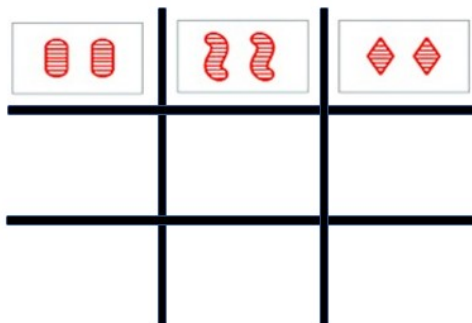
ซึ่งตอนนี้ใน A มีเซตทั้งหมด 12 เซต

เมื่อใส่ครบทั้ง 9 ช่องแล้วให้นำไฟ 3 ไบมุมขวาล่างออก ทำให้เหลือไฟ 6 ไบ โดยให้ A' แทนเซตของไฟ 6 ไบนี้
 $A' = \{0000, 0101, 0202, 0001, 0102, 0002\}$



ตอนนี้จะเห็นว่าไฟทั้งหมด 6 ไบและมีเซตเกิดขึ้นทั้งหมด 3 เซต ซึ่งเกมที่จะสร้างนั้นต้องมีไฟทั้งหมด 12 ไบและมีเซตเกิดขึ้นทั้งหมด 6 เซต ดังนั้นต้องเลือกไฟมาอีก 6 ไบและเกิดเซตเพียง 3 เซต โดยวิธีการเลือกไฟ 6 ไบนั้นเป็นดังต่อไปนี้
 ขั้นแรก ให้เลือกไฟ 3 ไบที่เป็นเซตและต้องไม่ซ้ำกับไฟใน A ดังนี้

1. ไฟไบแรกเลือกได้ทั้งหมด $81 - 9 = 72$ วิธี (A มีสมาชิกทั้งหมด 9 ตัว)
2. ไฟไบที่สองเลือกได้ทั้งหมด 71 วิธี
3. ไฟไบที่สามเลือกได้ทั้งหมด 1 วิธี (เพราะต้องเป็นไฟที่เกิดเซตกับไฟ 2 ไบแรก)



$B = \{1100, 1101, 1102\}$

การเลือกไฟไบที่ 4

1. เมื่อหยิบไพ่ใด ๆ $a_1, a_2 \in A'$ จะไม่เกิดเซตกับไพ่ใบที่ 4 แน่นนอน
2. เมื่อหยิบไพ่ใด ๆ $b_1, b_2 \in B$ จะไม่เกิดเซตกับไพ่ใบที่ 4 แน่นนอน
3. เมื่อหยิบไพ่ใด ๆ $a \in A'$ และ $b \in B$
 - 3.1 ถ้า A' เป็นเซตของไพ่ทั้ง 6 ใบที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน 2 คุณสมบัติ
 - 3.1.1 B เป็นเซตของไพ่ 3 ใบที่มีคุณสมบัติเหมือน A' ทั้ง 2 คุณสมบัติ
จะเลือกไพ่ใบที่ 4 ได้ทั้งหมด $69 - 9 = 60$ วิธี (นำไพ่ที่ทำให้เกิดเซตกับไพ่ใน A และ B ออก)
 - 3.1.2 B เป็นเซตของไพ่ 3 ใบที่มีคุณสมบัติเหมือน A' เพียง 1 คุณสมบัติ หรือ ไม่เหมือนเลย
จะเลือกไพ่ใบที่ 4 ได้ทั้งหมด $69 - 18 = 51$ วิธี (นำไพ่ที่ทำให้เกิดเซตกับไพ่ใน A และ B ออก)
 - 3.2 ถ้า A' เป็นเซตของไพ่ทั้ง 6 ใบที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน 1 คุณสมบัติ
 - 3.2.1 B เป็นเซตของไพ่ 3 ใบที่มีคุณสมบัติเหมือน A' เพียง 1 คุณสมบัติ
จะเลือกไพ่ใบที่ 4 ได้ทั้งหมด $69 - 9 = 60$ วิธี (นำไพ่ที่ทำให้เกิดเซตกับไพ่ใน A และ B ออก)
 - 3.2.2 B เป็นเซตของไพ่ 3 ใบที่มีคุณสมบัติไม่เหมือน A' เลย
จะเลือกไพ่ใบที่ 4 ได้ทั้งหมด $69 - 18 = 51$ วิธี (นำไพ่ที่ทำให้เกิดเซตกับไพ่ใน A และ B ออก)

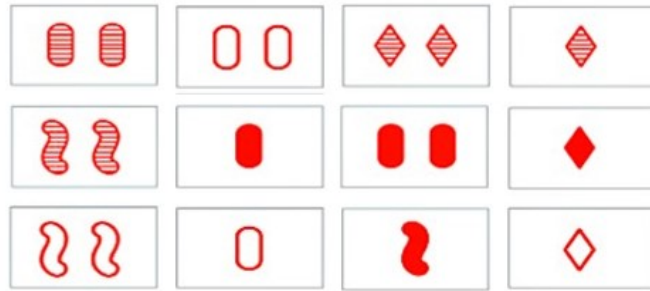
เช่น

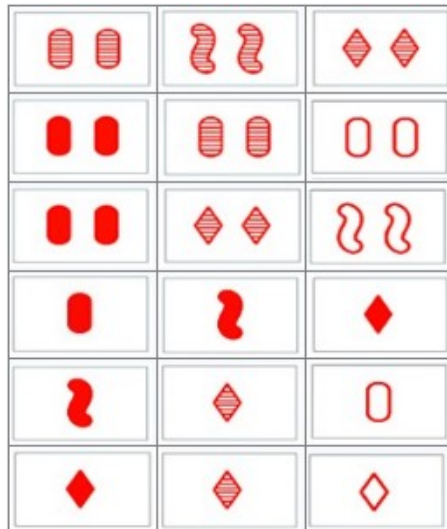
จากนั้นเลือกไพ่ใบที่ 5 และ ไพ่ใบที่ 6 ที่ทำให้เกิดเซตกับไพ่ 4 ใบแรก

จะเห็นว่าตอนนี้ได้ไพ่ครบ 12 ใบและเกิดเซต 6 เซตแล้วดังรูป 4.4



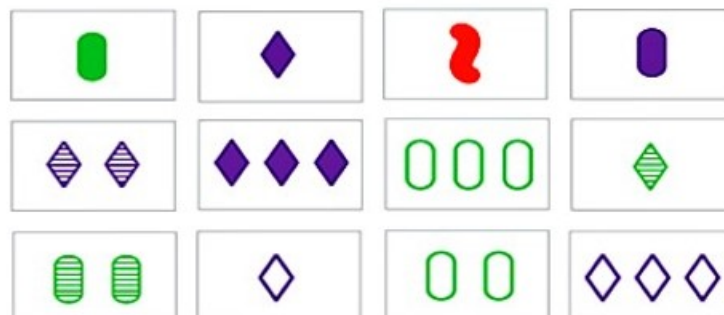
รูปที่ 4.4: ไฟ 12 ใบที่มีเซตเพียง 6 เซต



รูปที่ 4.5: แสดงเซตที่เกิดขึ้นทั้ง 6 เซต

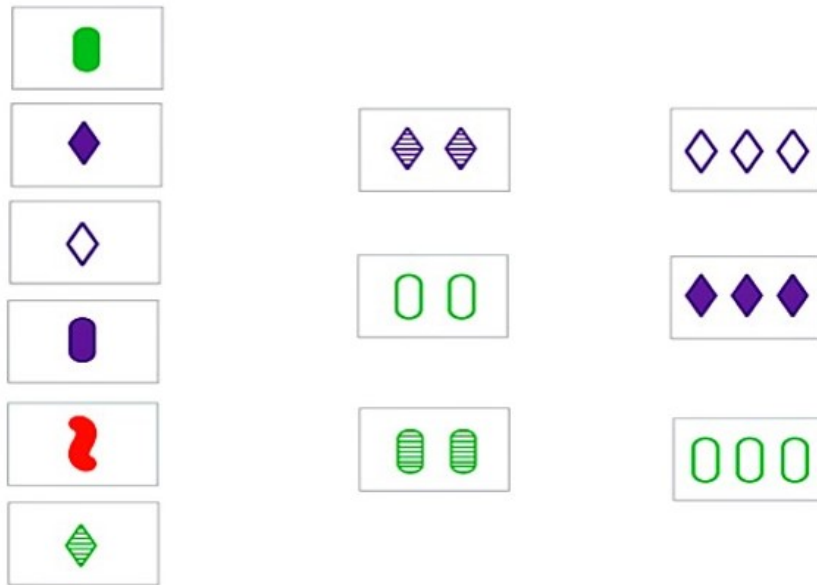
4.3 ขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบปริศนาเกมเซต

วิธีที่สามารถทำให้เจอเซตครบ 6 เซตแน่นอนคือ วิธีการเรียงสับเปลี่ยนไฟให้ครบทุกกรณีแล้วหาว่ากรณีใดบ้างที่เป็นเซต ซึ่งวิธีนี้จะใช้เวลาในการหาเซตนาน จึงได้มีการหาวิธีเล่นเกมเซตที่ดีกว่าวิธีการเรียงสับเปลี่ยน โดยวิธีนี้ใช้กับการเล่นแบบปริศนา คือ การหาเซต 6 เซตจากไฟกองกลาง 12 ใบ จากตัวอย่าง



ในขั้นแรกจะเริ่มจากการพิจารณาคุณสมบัติที่เหมือนกันก่อน ซึ่งเราจะเลือกดูที่จำนวนก่อนเพราะว่าเป็นคุณสมบัติที่มองได้ง่ายที่สุด วิธีการคือ

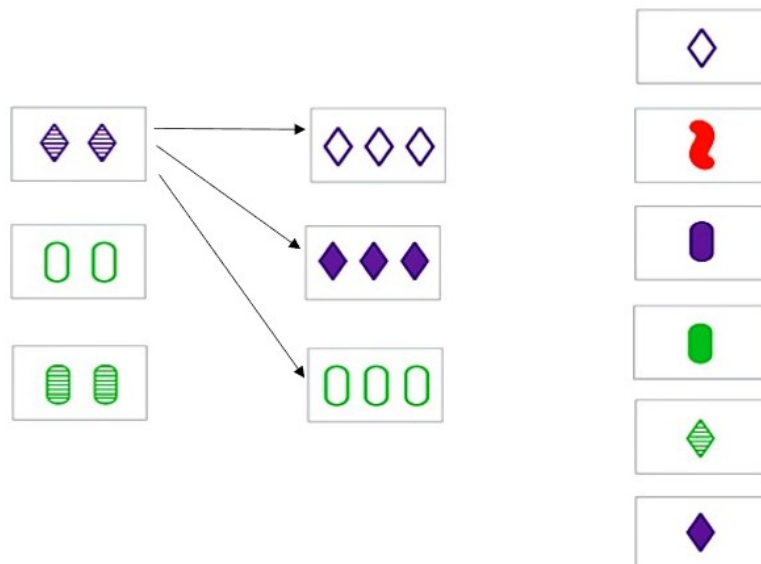
1. ให้เรียงไฟโดยแบ่งเป็นกลุ่มของจำนวน ดังรูป



จากนั้นให้หาว่าในจำนวนที่เท่ากันนั้นมีเซตเกิดขึ้นกี่เซต โดยการเลือก 3 ไฟแบบเรียงสับเปลี่ยนภายในกลุ่มของจำนวนที่เท่ากัน ซึ่งจะได้ว่ามีเซตเกิดขึ้นเพียง 1 เซต



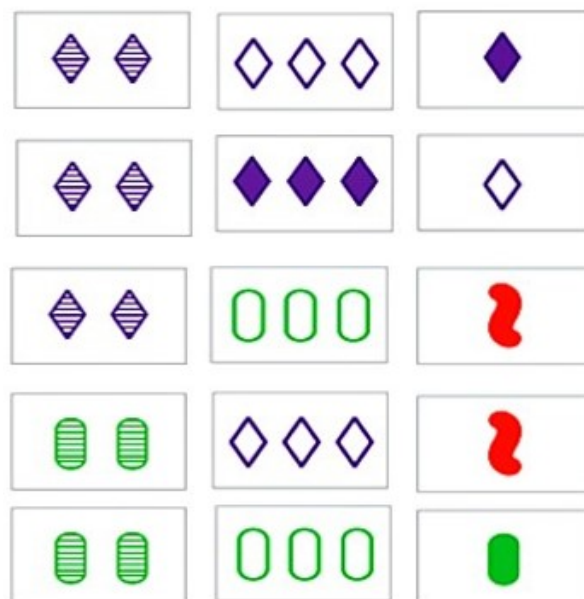
ต่อไปจะหาว่าถ้าจำนวนไม่เท่ากันจะมีเซตเกิดขึ้นกี่เซต โดยเริ่มจากการเรียงจำนวนไฟในแต่ละกลุ่มจากน้อยไปมาก ดังรูป



จากนั้นจะเลือกหยิบไฟดังนี้

1. หยิบไฟแรกจากกลุ่มที่ 1 นั่นก็คือกลุ่มของจำนวน 2 รูปร่าง
2. หยิบไฟที่สองจากกลุ่มที่ 2 นั่นก็คือกลุ่มของจำนวน 3 รูปร่าง

3. เลือกหยิบไพ่ที่สามารถทำให้เกิดเซตกับ 2 ใบแรกจากกลุ่มที่ 3 นั่นก็คือกลุ่มของจำนวน 1 รูปร่าง
 ดังนั้นจะหาได้ทั้งหมด 5 เซตดังรูป

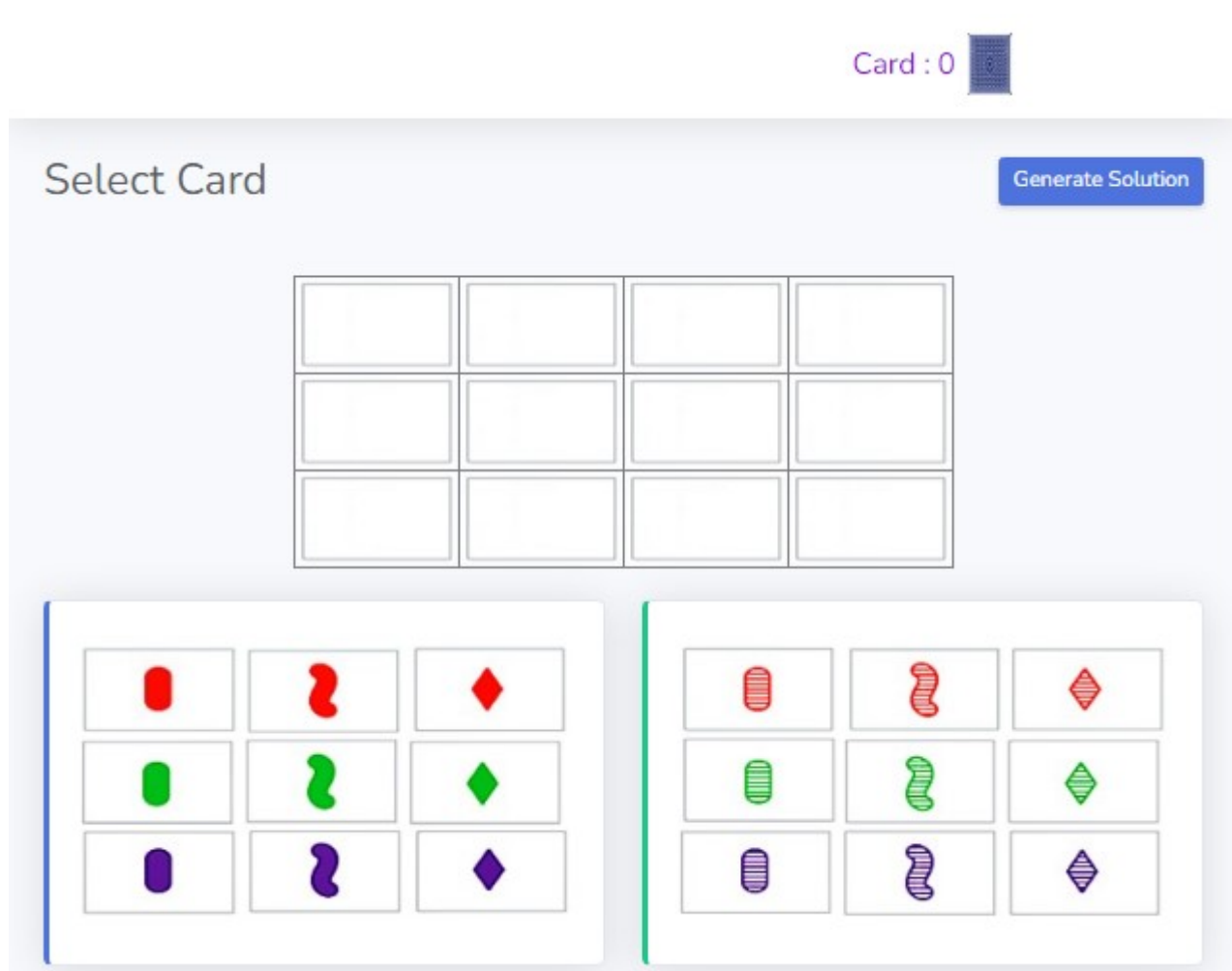


จะเห็นว่าสามารถหาได้ครบ 6 เซตแล้ว โดยการจะหาได้เร็วขึ้นขึ้นอยู่กับการฝึกฝน ประสบการณ์ และเทคนิคของแต่ละคน ซึ่งวิธีนี้เป็นเพียงวิธีหนึ่งที่สามารถใช้ได้และไม่ทำให้สับสนในการเล่น

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาวิธีการในสร้างเกมเซตแบบปริศนา และการเขียนโปรแกรมสำหรับหาคำตอบเกมเซตแบบปริศนา ได้แสดงให้เห็นว่าการสร้างเกมเซตที่มีไฟ 12 ใบและมีเซตเกิดขึ้น 6 เซตนั้น มีการใช้แนวคิดจากเกม Tic-Tac-Toe มาช่วยในการแก้ปัญหา และมีโปรแกรมสำหรับหาคำตอบเกมเซตแบบปริศนา ซึ่งสามารถใช้งานได้บนเว็บไซต์ http://myweb.cmu.ac.th/phiraphat_chaikla



บรรณานุกรม

- [1] B. L. Davis and D. Maclagan, "The cards game set," *The Mathematical Intelligencer*, June. 2003, doi: 10.1007/BF02984846
- [2] The daily set puzzle. (วันที่ 6 เดือน มีนาคม ปี พ.ศ. 2566)
- [3] G. Pellegrino. Sul massimo ordine delle calotte in $S_{4,3}$. *Matematiche (Catania)*, 25:149–157 (1971), 1970.

ภาคผนวก A

โปสเตอร์

Set game and related problems

Mr. Phiraphat Chaikla

Advisor: Asst. Prof. Dr. Penying Rochanakul

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



Abstract

SET is a popular card game that challenges players to find sets of three cards with certain characteristics. Because there are many interesting problems and questions arising from the game, we wanted to find the answers. In this independent research, we studied the algorithm to create a SET game with 12 cards containing exactly 6 sets, using the concept of Tic-Tac-Toe board. We also found an algorithm to find the solution of SET game. Additionally, we wrote a program in Python to find the 6 sets from the 12 cards.

Introduction

The game of SET was invented by population geneticist Marsha Jean Falco in 1974. She was studying epilepsy in German Shepherds and began representing genetic data on the dogs by drawing symbols on cards and then searching for patterns in the data. After realizing the potential as a challenging puzzle, with encouragement from friends and family she developed and marketed the card game. Since then, SET has become a huge hit both inside and outside the mathematical community. SET is played with a special deck of cards. Each SET card displays a design with four attributes — number, shading, color, and shape — and each attribute assumes one of three possible values, given in the table below.

Number: (One, Two, Three)
Shading: (Solid, Striped, Open)
Color: (Red, Green, Purple)
Shape: (Ovals, Squiggles, Diamonds)

A SET deck has eighty-one cards, one for each possible combination of attributes.

The goal of the game is to find collections of cards satisfying the following rule.

The SET rule : Three cards are called a **set** if, with respect to each of the four attributes, the cards are either all the same or all different.



FIGURE 1. Typical set cards

Standard Set Game

In the standard SET game the dealer lays out cards on the table until either twelve are laid down or someone sees a set and calls "Set!". The player who called "Set" takes the cards in the set, and the dealer continues to deal out cards until twelve are on the table. A player who sees a set among the twelve cards calls "Set" and takes the three cards, and the dealer lays three more cards on the table. (To call out "Set" and not pick one up quickly enough results in a penalty.) There may be no set among the twelve cards; in this case, the dealer deals out three more cards to make fifteen dealt cards, or eighteen or more, as necessary. This process of dealing by threes and finding sets continues until the deck is exhausted and there are no more sets on the table. At this point, whoever has collected the most sets wins.

Set Puzzle

The game object is to find all 6 sets in the 12 cards displayed. For each puzzle, you may reuse any of the 12 cards displayed as many times as needed to complete all 6 sets. The first player to find all 6 sets and use the least amount of time will be the winner.

Objectives

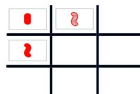
1. Create SET puzzle.
2. Find the solution to the SET puzzle.

Results

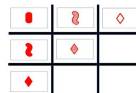
Method for creating a set game with a central deck of 12 cards and a total of 6 sets created.

In the first step, the idea is derived from playing the Tic-Tac-Toe game, which has 9 reserved spaces. The gameplay involves selecting three cards and placing them at the top-left corner of the table, and these three cards must not form a set. The methods for selecting the first three cards are:

1. The first card can be selected in 81 ways.
2. The second card can be selected in 80 ways.
3. The third card can be selected in 78 ways. (So that it does not form a set with the first two cards.)



Afterward, select the cards that would form a set with the first three cards and place them in the table to fill all 9 spaces. Then, remove the bottom-right three cards.



Now we can see that a total of 6 cards and 3 sets have been created. The game we want to create must have a total of 12 cards and 6 sets. Therefore, we need to select another 6 cards and create only 3 more sets. The method for selecting the additional 6 cards is as follows: First, select 3 cards that form a set and do not overlap with the initial 9 cards.

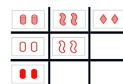
1. The first card can be selected in 72 ways.
2. The second card can be selected in 71 ways.
3. The third card can only be selected in 1 way because it must form a set with the first two cards.



To select the 4th card :

1. The initial 6 cards has 2 fixed attributes.
 - 1.1 The latest 3 cards has the same 2 fixed attributes as the 6 initial cards.
The 4th card can be selected in $69 - 9 = 60$ ways.
 - 1.2 The latest 3 cards has one fixed attribute that different from the 6 initial cards.
The 4th card can be selected in $69 - 21 = 48$ ways.
2. The initial 6 cards has 1 fixed attribute.
 - 2.1 The latest 3 cards has one fixed attribute as the 6 initial cards.
The 4th card can be selected in $69 - 9 = 60$ ways.
 - 2.2 The latest 3 cards has one fixed attribute that different from the 6 initial cards.
The 4th card can be selected in $69 - 21 = 48$ ways.

Then choose the 5th and 6th cards that form a set with the latest 4 cards.



You will see that all 12 cards have been chosen and 6 sets have been formed.

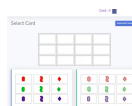


Method for solving Set puzzle

1. Find the set by consider the number of shapes first. That is, group 1 is the group that has 1 shape, group 2 is the group that has 2 shapes, and group 3 is the group that has 3 shapes.
2. Find the sets within each group, how many sets are formed within each group?
3. Consider the number of cards in each group, with the group that has the fewest cards placed first respectively.
4. Permutate by selecting one card from each group until all 6 sets are found.

Conclusion

In this independent study, we have studied the method of creating set games and writing programs to solve set game problems. It has been demonstrated that the creation of a set game with 12 cards and the occurrence of 6 sets utilizes concepts from the Tic-Tac-Toe game to aid in problem-solving, and a program has been developed to solve set game problems, which can be accessed online.



References

- [1] B. L. Davis and D. MacLagan, "The cards game set," The Mathematical Intelligencer, June, 2003, doi: 10.1007/BF02984846
- [2] The daily set puzzle. <https://www.setgame.com/set/puzzle> (accessed Mar. 6, 2023).

ภาคผนวก B

โปรแกรม

```
1  <!DOCTYPE html>
2  <html lang="en">
3
4  <head>
5
6      <meta charset="utf-8">
7      <meta http-equiv="X-UA-Compatible" content="IE=edge">
8      <meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=1, shrink-to-fit=no">
9      <meta name="description" content="">
10     <meta name="author" content="">
11
12     <title>SetSolution</title>
13
14     <!-- Custom fonts for this template-->
15     <link href="vendor/fontawesome-free/css/all.min.css" rel="stylesheet" type="text/css">
16     <link
17         href="https://fonts.googleapis.com/css?family=Nunito:200,200i,300,300i,400,400i,600,600i,700,700i,800,800i,900,900i"
18         rel="stylesheet">
19
20     <!-- Custom styles for this template-->
21     <link href="css/sb-admin-2.min.css" rel="stylesheet">
22     <link href="css/custom.css" rel="stylesheet">
23
24 </head>
25
26 <body id="page-top">
27
28     <!-- Page Wrapper -->
29     <div id="wrapper">
30
31         <!-- Sidebar -->
32         <ul class="navbar-nav bg-gradient-primary sidebar sidebar-dark accordion" id="accordionSidebar">
33
34             <!-- Sidebar - Brand -->
35             <a class="sidebar-brand d-flex align-items-center justify-content-center" href="index.html">
36                 <!--<div class="sidebar-brand-icon rotate-n-15">
37                     <i class="fas fa-laugh-wink"></i>
38                 </div-->
39                 <div class="sidebar-brand-text mx-3">Set Solution </div>
40             </a>
41
42             <!-- Divider -->
43             <hr class="sidebar-divider my-0">
44
45             <!-- Nav Item - Dashboard -->
46
47
48             <!-- Divider -->
49             <hr class="sidebar-divider d-none d-md-block">
```

```

50
51 <!-- Sidebar Toggler (Sidebar) -->
52
53
54 <!-- Sidebar Message -->
55
56
57 </ul>
58 <!-- End of Sidebar -->
59
60 <!-- Content Wrapper -->
61 <div id="content-wrapper" class="d-flex flex-column">
62
63 <!-- Main Content -->
64 <div id="content">
65
66 <!-- Topbar -->
67 <nav class="navbar navbar-expand navbar-light bg-white topbar mb-4 static-top shadow">
68
69 <!-- Sidebar Toggler (Topbar) -->
70 <button id="sidebarToggleTop" class="btn btn-link d-md-none rounded-circle mr-3">
71 | <i class="fa fa-bars"></i>
72 </button>
73
74 <!-- Topbar Search -->
75
76
77 <!-- Topbar Navbar -->
78 <ul class="navbar-nav ml-auto">
79 | <li class="nav-item dropdown no-arrow">
80 | | <a class="nav-link dropdown-toggle" href="#" id="userDropdown" role="button"
81 | | data-toggle="dropdown" aria-haspopup="true" aria-expanded="false">
82 | | <span id="totalCard" class="mr-2 d-none d-lg-inline" style="color: █ #9406dd;font-size: 1.2rem;">Card : 0</span>
83 | | 
85 | | </a>
86 | | <!-- Dropdown - User Information -->
87 | </li>
88
89
90 </ul>
91
92 </nav>
93 <!-- End of Topbar -->
94
95 <!-- Begin Page Content -->
96 <div class="container-fluid">
97
98 <!-- Page Heading -->
99 <div class="d-sm-flex align-items-center justify-content-between mb-4">
100 | <h1 class="h3 mb-0 text-gray-800">Select Card</h1>
101 | <a href="#" onclick="generateSolution();" class="d-none d-sm-inline-block btn btn-sm btn-primary shadow-sm"> Generate Solution</a>
102 </div>
103
104 <!-- Content Row -->
105
106 <div class="row" style="display: block !important;">
107 | <center>
108 | <!-- Pending Requests Card Example -->
109 |
110 | <div class="card-body" >
111 | | <table border="1">
112 | | | <tr>
113 | | | | <td>
114 | | | | 
115 | | | | </td>
116 | | | | <td>
117 | | | | 
118 | | | | </td>
119 | | | | <td>
120 | | | | 
121 | | | </td>

```

```

121         </td>
122         <td>
123             
124         </td>
125     </tr>
126     <tr>
127         <td>
128             
129         </td>
130         <td>
131             
132         </td>
133         <td>
134             
135         </td>
136         <td>
137             
138         </td>
139     </tr>
140     <tr>
141         <td>
142             
143         </td>
144         <td>
145             
146         </td>
147         <td>
148             
149         </td>
150         <td>
151             
152         </td>
153     </tr>
154 </table>
155
156 </div>
157
158 <div id="answerDiv" class="card-body">
159     <table border="1">
160         <tr>
161             <td>
162                 
163             </td>
164             <td>
165                 
166             </td>
167             <td>
168                 
169             </td>
170         </tr>
171         <tr>
172             <td>
173                 
174             </td>
175             <td>
176                 
177             </td>
178             <td>
179                 
180             </td>
181         </tr>
182         <tr>
183             <td>
184                 
185             </td>
186             <td>
187                 
188             </td>
189             <td>
190                 
191             </td>
192         </tr>
193         <tr>
194             <td>
195                 
196             </td>
197             <td>
198                 

```

```

199         </td>
200     </td>
201     <td>
202         
203     </td>
204 </tr>
205 <tr>
206     <td>
207         
208     </td>
209     <td>
210         
211     </td>
212     <td>
213         
214     </td>
215 </tr>
216 <tr>
217     <td>
218         
219     </td>
220     <td>
221         
222     </td>
223     <td>
224         
225     </td>
226 </tr>
227 </table>
228 </div>
229
230 </center>
231 </div>
232
233 <div class="row">
234     <!-- Earnings (Monthly) Card Example -->
235     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
236         <div class="card border-left-primary shadow h-100 py-2">
237             <div class="card-body">
238                 
239                 
240                 
241                 
242                 
243                 
244                 
245                 
246                 
247             </div>
248         </div>
249     </div>
250
251     <!-- Earnings (Monthly) Card Example -->
252     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
253         <div class="card border-left-success shadow h-100 py-2">
254             <div class="card-body">
255                 
256                 
257                 
258                 
259                 
260                 
261                 
262                 
263                 
264             </div>
265         </div>
266     </div>
267
268     <!-- Earnings (Monthly) Card Example -->
269     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
270         <div class="card border-left-info shadow h-100 py-2">
271             <div class="card-body">
272                 
273                 
274                 
275                 
276                 

```

```

277         
278         
279         
280         
281     </div>
282 </div>
283 </div>
284
285 <!-- Pending Requests Card Example -->
286 <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
287     <div class="card border-left-warning shadow h-100 py-2">
288         <div class="card-body">
289             
290             
291             
292             
293             
294             
295             
296             
297             
298         </div>
299     </div>
300 </div>
301 </div>
302 <div class="row">
303
304     <!-- Earnings (Monthly) Card Example -->
305     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
306         <div class="card border-left-primary shadow h-100 py-2">
307             <div class="card-body">
308                 
309                 
310                 
311                 
312                 
313                 
314                 
315                 
316                 
317             </div>
318         </div>
319     </div>
320
321     <!-- Earnings (Monthly) Card Example -->
322     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
323         <div class="card border-left-success shadow h-100 py-2">
324             <div class="card-body">
325                 
326                 
327                 
328                 
329                 
330                 
331                 
332                 
333                 
334             </div>
335         </div>
336     </div>
337
338     <!-- Earnings (Monthly) Card Example -->
339     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
340         <div class="card border-left-info shadow h-100 py-2">
341             <div class="card-body">
342                 
343                 
344                 
345                 
346                 
347                 
348                 
349                 
350                 
351             </div>
352         </div>
353     </div>
354
355     <!-- Pending Requests Card Example -->

```

```

356     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
357         <div class="card border-left-warning shadow h-100 py-2">
358             <div class="card-body">
359                 
360                 
361                 
362                 
363                 
364                 
365                 
366                 
367                 
368             </div>
369         </div>
370     </div>
371 </div>
372 <div class="row">
373
374     <!-- Earnings (Monthly) Card Example -->
375     <div class="col-xl-3 col-md-6 mb-4">
376         <div class="card border-left-primary shadow h-100 py-2">
377             <div class="card-body">
378                 
379                 
380                 
381                 
382                 
383                 
384                 
385                 
386                 
387             </div>
388         </div>
389     </div>
390
391
392
393
394
395 </div>
396 <!-- /.container-fluid -->
397
398 </div>
399 <!-- End of Main Content -->
400
401 <!-- Footer -->
402 <footer class="sticky-footer bg-white">
403     <div class="container my-auto">
404         <div class="copyright text-center my-auto">
405             <span>Copyright &copy; Your Website 2021</span>
406         </div>
407     </div>
408 </footer>
409 <!-- End of Footer -->
410
411 </div>
412 <!-- End of Content Wrapper -->
413
414 </div>
415 <!-- End of Page Wrapper -->
416
417 <!-- Scroll to Top Button-->
418 <a class="scroll-to-top rounded" href="#page-top">
419     <i class="fas fa-angle-up"></i>
420 </a>
421
422 <!-- Logout Modal-->
423 <div class="modal fade" id="logoutModal" tabindex="-1" role="dialog" aria-labelledby="exampleModallabel">
424     <div class="modal-dialog" role="document">
425         <div class="modal-content">
426             <div class="modal-header">
427                 <h5 class="modal-title" id="exampleModallabel">Ready to Leave?</h5>
428                 <button class="close" type="button" data-dismiss="modal" aria-label="Close">
429                     <span aria-hidden="true"></span>
430                 </button>
431             </div>
432             <div class="modal-body">Select "Logout" below if you are ready to end your current session.</div>
433         </div>
434     </div>
435 </div>

```

```

434         <div class="modal-footer">
435             <button class="btn btn-secondary" type="button" data-dismiss="modal">Cancel</button>
436             <a class="btn btn-primary" href="login.html">Logout</a>
437         </div>
438     </div>
439 </div>
440 </div>
441
442 <!-- Bootstrap core JavaScript-->
443 <script src="vendor/jquery/jquery.min.js"></script>
444 <script src="vendor/bootstrap/js/bootstrap.bundle.min.js"></script>
445
446 <!-- Core plugin JavaScript-->
447 <script src="vendor/jquery-easing/jquery.easing.min.js"></script>
448
449 <!-- Custom scripts for all pages-->
450 <script src="js/sb-admin-2.min.js"></script>
451
452 <!-- Page level plugins -->
453
454
455 <!-- Page level custom scripts -->
456
457 <script>
458     const cardList = [];
459     $( document ).ready(function() {
460         console.log( "ready!" );
461         //generateSolution();
462         $("#answerDiv").hide();
463         //renderSelected();
464     });
465
466     function addCard(code){
467         if(cardList.length<12){
468             if(!cardList.includes(code)){
469                 cardList.push(code);
470                 $('#c'+code).css('filter', 'grayscale(100%)');
471                 $('#SelectedCard'+cardList.length).attr({ "src": "img/cards/"+code+".jpg" });
472                 $('#SelectedCard'+cardList.length).attr({ "onclick": "removeCard('"+code+"');" });
473                 //SelectedCard1
474             }
475         }
476         $('#totalCard').text("Card : "+cardList.length);
477         console.log(cardList);
478     }
479
480     function generateSolution(){
481         if(cardList.length != 12){
482             return;
483         }
484         console.log(cardList);
485         var permutations = permute(cardList);
486         //console.log(permutations);
487         var index=1;
488         for (var i = 0; i < permutations.length; i++) {
489             var subSet = permutations[i];
490             subSet=getValidSet(subSet);
491             if(subSet != false){
492                 console.log(subSet);
493                 $("#ShowCard"+(index++)).attr({ "src": "img/cards/"+subSet[0]+"jpg" });
494                 $("#ShowCard"+(index++)).attr({ "src": "img/cards/"+subSet[1]+"jpg" });
495                 $("#ShowCard"+(index++)).attr({ "src": "img/cards/"+subSet[2]+"jpg" });
496             }
497             $("#answerDiv").show();
498         }
499
500         function renderSelected(){
501             for (var i = 0; i < 12; i++) {
502                 if(i < cardList.length){
503                     var code = cardList[i];
504                     $('#c'+code).css('filter', 'grayscale(100%)');
505                     $("#SelectedCard"+(i+1)).attr({ "src": "img/cards/"+code+".jpg" });
506                     $("#SelectedCard"+(i+1)).attr({ "onclick": "removeCard('"+code+"');" });
507                 }
508                 else{
509                     $("#SelectedCard"+(i+1)).attr({ "src": "img/Default.jpg" });
510                 }
511             }
512         }
513     }

```

```

512     function permute(arr) {
513         const subarrays = [];
514         for (let i = 0; i < cardList.length; i++) {
515             for (let j = i + 1; j < cardList.length; j++) {
516                 for (let k = j + 1; k < cardList.length; k++) {
517                     const subarray = [cardList[i], cardList[j], cardList[k]].sort();
518                     let duplicateFound = false;
519                     for (let l = 0; l < subarrays.length; l++) {
520                         if (subarray[0] === subarrays[l][0] && subarray[1] === subarrays[l][1] && subarray[2] === subarrays[l][2]) {
521                             duplicateFound = true;
522                             break;
523                         }
524                     }
525                     if (!duplicateFound) {
526                         subarrays.push(subarray);
527                     }
528                 }
529             }
530         }
531         return subarrays;
532     }
533     function getValidSet(subSet){
534         //console.log(subSet);
535         var sum1=0,sum2=0,sum3=0,sum4=0;
536         for (var i = 0; i < subSet.length; i++) {
537             var set = subSet[i];
538             var arr = set.split('').map(digit => parseInt(digit));
539             //console.log(arr);
540             sum1 += arr[0];
541             sum2 += arr[1];
542             sum3 += arr[2];
543             sum4 += arr[3];
544         }
545         //console.log(sum1+" x "+sum2+" x "+sum3+" x "+sum4);
546         if(sum1 % 3 == 0 && sum2 % 3 == 0 && sum3 % 3 == 0 && sum4 % 3 == 0 ){
547             return subSet;
548         }
549         return false;
550     }
551
552     function removeCard(code){
553         cardList.splice(cardList.indexOf(code), 1);
554         $('#c'+code).css('filter', '');
555         $('#answerDiv').hide();
556         renderSelected();
557     }
558     </script>
559
560 </body>
561
562 </html>

```