

ฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถีไปยังวัฏจักร
(Locally Strong Homomorphisms from Paths to Cycles)

นางสาวณณนันทน์ มาธิ
รหัสนักศึกษา 620510491

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

ฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถีไปยังวัฏจักร
(Locally Strong Homomorphisms from Paths to Cycles)

นางสาวญาณันท์ มาธิ

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

..... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุยัญ ปันมา)

..... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลีรัตนาวลี)

วันที่...31...เดือน...มกราคม...ปี...2566...

ฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถีไปยังวัฏจักร
(Locally Strong Homomorphisms from Paths to Cycles)

นางสาวณณนันทน์ มาธิ
รหัสนักศึกษา 620510491

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขา
คณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 (Independent study) โดย
มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการ
ทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษา เรื่อง ฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเข้มข้นเฉพาะส่วนจากวิธีไปยังวัฏจักร

ผู้ค้นคว้าขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สาธิต ปันมา อาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระที่คอย
ช่วยเหลือ ให้คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ การนำเสนอ การจัดทำรูปเล่ม
รายงาน และให้คำปรึกษาตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องพิจารณาแก้ไข จนทำให้การค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสิ้น
สมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่าน ที่ได้อบรม
สั่งสอน และให้ความรู้ทั้งในและนอกตำราเรียนให้แก่ผู้ค้นคว้า อันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้
ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ และขอขอบคุณเพื่อน ๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และผู้เกี่ยวข้องที่ช่วยสนับสนุนให้คำปรึกษาและช่วยเหลือขณะที่ผู้ค้นคว้ากำลัง ศึกษา
ค้นคว้าอิสระชิ้นนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณบิดา มารดา ครอบครัว เพื่อน รุ่นพี่ รวมทั้งขอขอบคุณไปยังทุกท่านที่มีส่วน
เกี่ยวข้องกับงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ที่ได้ให้การช่วยเหลือ และกำลังใจ ซึ่งผู้ค้นคว้าไม่ได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ด้วย

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ผู้ค้นคว้าขอมอบ
คำชื่นชมและคุณความดีนั้นแก่ บิดา มารดา คณะครู และอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอน ในทางตรงกันข้าม
หากผลงานค้นคว้าอิสระนี้เกิดข้อผิดพลาดประการใด ผู้ค้นคว้าขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และขออนุญาตรับความผิดพลาด
ไว้เพียงผู้เดียว

ญาณนันท์ มาธิ

หัวข้อ (ภาษาไทย) ฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถีไปยังวัฏจักร

(ภาษาอังกฤษ) Locally Strong Homomorphisms from Paths to Cycles

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวณนันท มาธิ รหัสนักศึกษา 620510491

ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา

ชื่อกรรมการสอบ ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลิ้ตนาวลี

บทคัดย่อ

ฟังก์ชันสัทิสฐาน (homomorphism) จากกราฟ G ไปยังกราฟ G' เป็นฟังก์ชัน f จาก $V(G)$ ไป $V(G')$ ที่ซึ่งคงสภาพเส้นเชื่อม นั่นคือถ้า $\{x, y\} \in E(G)$ แล้ว $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$ และจะเรียกฟังก์ชันสัทิสฐาน f ว่าเป็น ฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน (locally strong homomorphism) ถ้า $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$ แล้วสำหรับทุก ๆ $x' \in f^{-1}(f(x))$ จะมี $y' \in f^{-1}(f(y))$ โดยที่ $\{x', y'\} \in E(G)$ และสำหรับทุก ๆ $y' \in f^{-1}(f(y))$ จะมี $x' \in f^{-1}(f(x))$ โดยที่ $\{x', y'\} \in E(G)$ ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราศึกษาจำนวนฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถีไปยังวัฏจักร

Abstract

A homomorphism from a graph G to a graph G' is a mapping f from $V(G)$ to $V(G')$ which preserves edges, i.e., if $\{x, y\} \in E(G)$ implies $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$. A homomorphism f is called *locally strong* if $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$ implies that for all $x' \in f^{-1}(f(x))$ there exists $y' \in f^{-1}(f(y))$ such that $\{x', y'\} \in E(G)$, and for all $y' \in f^{-1}(f(y))$ there exists $x' \in f^{-1}(f(x))$ such that $\{x', y'\} \in E(G)$. In this independent study, we determine the number of locally strong homomorphisms from paths to cycles.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1. บทนำ	1
2. ความรู้พื้นฐาน	2
3. ผลการศึกษา	5
4. สรุปผลการศึกษา	22
บรรณานุกรม	23
ภาคผนวก	24
A. โปสเตอร์	25

บทที่ 1

บทนำ

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาหาจำนวนฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไปยังวัฏจักร C_n ซึ่งอ้างอิงความรู้จากการศึกษาเรื่อง Locally strong endomorphism of paths ของ Sr. Arworn, U. Knauer, S. Leeratanavalee

วัตถุประสงค์

เพื่อหาจำนวนฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไปยังวัฏจักร C_n สำหรับแต่ละจำนวนนับ m ใด ๆ และ $n \geq 3$

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้จำนวนฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไปยังวัฏจักร C_n สำหรับแต่ละจำนวนนับ m ใด ๆ และ $n \geq 3$

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้ เราจะให้นิยามพื้นฐานที่ใช้ในการค้นคว้าอิสระ

1. ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

บทนิยาม 1.1 กราฟ (graphs) G ประกอบด้วยเซต 2 เซตคือ

1. $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียกสมาชิกของ $V(G)$ ว่า จุดยอด (vertices)
2. $E(G)$ เป็นเซตของคู่อันดับของสมาชิกใน $V(G)$ เรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่า เส้นเชื่อม (edges)

บทนิยาม 1.2 ถ้า $\{a, b\} \in E(G)$ แล้ว เราจะกล่าวว่า a ~~ประชิดกับ~~ (adjacent point) กับ b
หรือ a และ b ~~กระทบ~~ (incident) กับ $\{a, b\}$
หรือ $\{a, b\}$ กระทบกับ a และ b

บทนิยาม 1.3 แนวเดิน (walks) คือ ลำดับสลับระหว่างจุดยอดและเส้นเชื่อมที่เริ่มต้นและสิ้นสุดด้วยจุดยอด โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมกระทบจุดยอดก่อนหน้าและจุดยอดตามหลังที่อยู่ติดกันในลำดับ

บทนิยาม 1.4 รอยเดิน (trails) คือ แนวเดินที่เส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกัน และ วิถี (paths) คือแนวเดินที่จุดยอดทุกจุดแตกต่างกัน

บทนิยาม 1.5 วงจร (circuits) คือ แนวเดินที่เส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกัน โดยมีจุดยอดเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นจุดยอดเดียวกัน และ วัฏจักร (cycles) คือ วงจรที่ไม่มีจุดยอดใดปรากฏมากกว่า 1 ครั้ง ยกเว้นจุดยอดเริ่มต้นและจุดยอดสิ้นสุด

บทนิยาม 1.6 กำหนด P_n เป็นกราฟที่ $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$
และ $E(P_n) = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-2, n-1\}\}$
เรียก P_n ว่า วิถีที่มี n จุดยอด



ภาพที่ 1.1 กราฟวิถีที่มี n จุดยอด (P_n)

บทนิยาม 1.7 กำหนด C_n เป็นกราฟที่ $V(C_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$
และ $E(C_n) = \{\{i, i+1\} \mid i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ และ } + \text{ เป็นการดำเนินการการบวกภายใต้มอดุโล } n\}$ เมื่อ $n \geq 3$
เรียก C_n ว่า วัฏจักรที่มี n จุดยอด



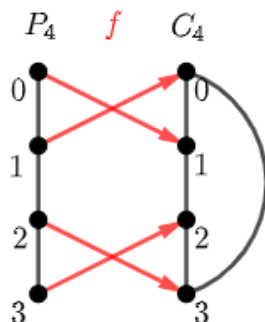
ภาพที่ 1.2 กราฟวัฏจักรที่มี n จุดยอด (C_n)

2. ฟังก์ชันสัทิสฐาน

บทนิยาม 2.1

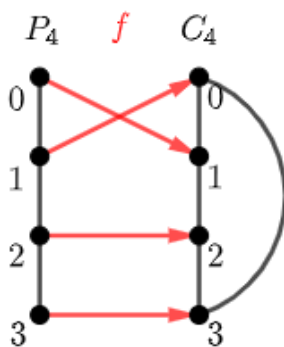
ให้ G และ G' เป็นกราฟ จะกล่าวว่า $f: V(G) \rightarrow V(G')$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน (homomorphism) จาก G ไป G' ถ้า $\{x, y\} \in E(G)$ แล้ว $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$ หรือ กล่าวว่า f คงสภาพเส้นเชื่อม (preserves edges)

ตัวอย่าง 2.1 กำหนด P_4 และ C_4 และให้ $f: V(P_4) \rightarrow V(C_4)$ ดังรูป



จะเห็นว่า $\{0, 1\} \in E(P_4)$ และ $\{f(0), f(1)\} = \{1, 0\} \in E(C_4)$
 $\{1, 2\} \in E(P_4)$ และ $\{f(1), f(2)\} = \{0, 3\} \in E(C_4)$
 $\{2, 3\} \in E(P_4)$ และ $\{f(2), f(3)\} = \{3, 2\} \in E(C_4)$
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานจาก P_4 ไปยัง C_4

ตัวอย่าง 2.2 กำหนด P_4 และ C_4 และให้ $f: V(P_4) \rightarrow V(C_4)$ ดังรูป



เนื่องจากมี $\{1, 2\} \in E(P_4)$ แต่ $\{f(1), f(2)\} = \{0, 2\} \notin E(C_4)$
ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานจาก P_4 ไปยัง C_4

บทนิยาม 2.2

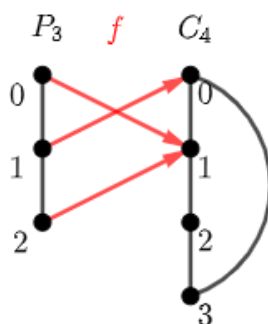
ให้ G และ G' เป็นกราฟ และ $f: V(G) \rightarrow V(G')$ เป็นฟังก์ชันสาคาสสัณฐาน จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันสาคาสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน (locally strong homomorphism) จาก G ไป G'

ถ้า $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$ แล้วทุก $x' \in f^{-1}(f(x))$ จะมี $y' \in f^{-1}(f(y))$ ซึ่ง $\{x', y'\} \in E(G)$

และทุก $y' \in f^{-1}(f(y))$ จะมี $x' \in f^{-1}(f(x))$ ซึ่ง $\{x', y'\} \in E(G)$

กำหนด $LSH(G, G')$ คือ เซตของฟังก์ชันสาคาสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก G ไป G'

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด P_3 และ C_4 และให้ $f: V(P_3) \rightarrow V(C_4)$ ดังรูป



จะเห็นว่า $\{f(0), f(1)\} = \{1, 0\} \in E(C_4)$

และ $f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(1) = \{0, 2\}$

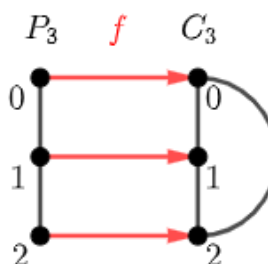
และ $f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(0) = \{1\}$

ซึ่งสำหรับทุก $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0, 2\}$ จะมี $y' \in f^{-1}(f(1)) = \{1\}$ ที่ทำให้ $\{x', y'\} \in E(P_3)$

และสำหรับทุก $y' \in f^{-1}(f(1)) = \{1\}$ จะมี $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0, 2\}$ ที่ทำให้ $\{x', y'\} \in E(P_3)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันสาคาสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_3 ไป C_4

ตัวอย่าง 2.4 กำหนด P_3 และ C_3 และให้ $f: V(P_3) \rightarrow V(C_3)$ ดังรูป



จะเห็นว่า $\{f(0), f(2)\} = \{0, 2\} \in E(C_3)$

ซึ่ง $f^{-1}(f(0)) = \{0\}$

และ $f^{-1}(f(2)) = \{2\}$

แต่ $\{0, 2\} \notin E(P_3)$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันสาคาสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_3 ไป C_3

บทที่ 3

ผลการศึกษา

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาหาจำนวนฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไปยังวัฏจักร C_n ซึ่งอ้างอิงความรู้จากการศึกษาเรื่อง Locally strong endomorphism of paths ของ Sr. Arworn, U. Knauer, S. Leeratanavalee

ขั้นแรก เราจะหาจำนวนฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_1 ไปยัง C_n โดยที่ $n \geq 3$

บทตั้ง 1 ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 3$ จะได้ว่า $|LSH(P_1, C_n)| = n$

พิสูจน์ ให้ $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

จะเห็นว่า $f_i: V(P_1) \rightarrow V(C_n)$ โดยที่ $f_i(0) = i$ เป็นฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_1 ไปยังวัฏจักร C_n

ดังนั้น $|LSH(P_1, C_n)| = |V(C_n)| = n$

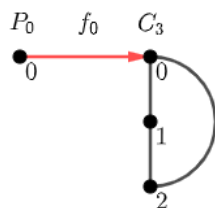
#

ตัวอย่าง 3.1 จำนวนฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_1 ไปยังวัฏจักร C_3

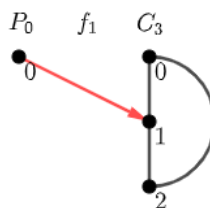
กำหนดให้ $f_i: V(P_1) \rightarrow V(C_3)$ เป็นฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_1 ไปยัง C_3

จะเห็นว่า f_i สามารถส่งจุดยอดใน P_1 ไปยังจุดยอดใน C_3 ได้ดังนี้

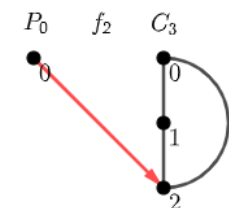
กรณี 1 $f_0(0) = 0$



กรณี 2 $f_1(0) = 1$



กรณี 3 $f_2(0) = 2$



นั่นคือ f_i สามารถส่งจุดยอดใน P_1 ไปยังจุดยอดใน C_3 ได้ทั้งหมด 3 รูปแบบ

ดังนั้น จำนวนฟังก์ชันสัทฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_1 ไปยัง C_3 มีทั้งหมด 3 ฟังก์ชัน

หรือ $|LSH(P_1, C_3)| = |V(C_3)| = 3$

ต่อไป จะหาจำนวนฟังก์ชันสัทสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_m ไปยัง C_n โดยที่ $m > 1$ และ $n \geq 3$

บทนิยาม 2 ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $m > 1$ และ $n \geq 3$

กำหนด $L = \{l \in \mathbb{N} \mid l < n-1, l \mid (m-1)\}$ โดยที่ $l \mid (m-1)$ หมายถึง $m-1$ หารด้วย l ลงตัว

และ สำหรับแต่ละ $l \in L$

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่ กำหนดให้

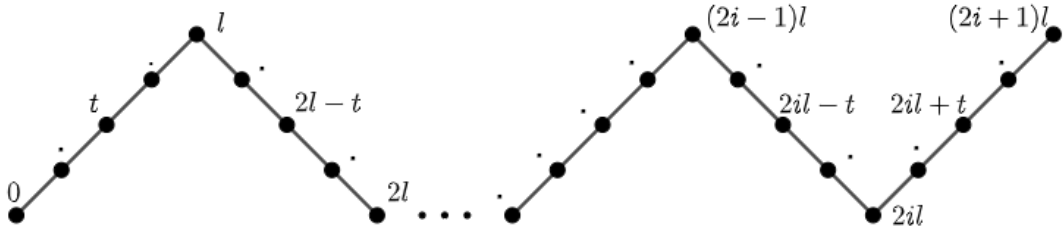
$$\bar{0} = \{2il \mid i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor\}$$

$\vdots$

$$\bar{t} = \{2il + t \mid i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor\} \cup \{2il - t \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor\} \text{ สำหรับ } 0 < t < l$$

$\vdots$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l \mid i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor\}$$



ภาพที่ 2.1 การแบ่งจุดใน $V(P_m)$ ออกเป็น $l+1$ เซต ในกรณีที่ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่
จะเห็นว่า $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{l}$ เป็นผลแบ่งกันของ $V(P_m)$

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่ และกำหนดให้

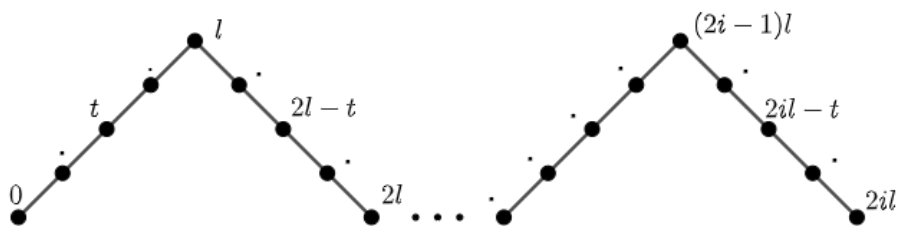
$$\bar{0} = \{2il \mid i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor\}$$

$\vdots$

$$\bar{t} = \{2il + t \mid i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor - 1\} \cup \{2il - t \mid i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor\} \text{ สำหรับ } 0 < t < l$$

$\vdots$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l \mid i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor - 1\}$$



ภาพที่ 2.2 การแบ่งจุดใน $V(P_m)$ ออกเป็น $l+1$ เซต ในกรณีที่ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่
จะเห็นว่า $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{l}$ เป็นผลแบ่งกันของ $V(P_m)$

ตัวอย่าง 3.2 ฟังก์ชันสถิติพื้นฐานแบบเข้มข้นเฉพาะส่วนจากวิถี P_5 ไปยังวัฏจักร C_6

ให้ $m=5$ และ $n=6$

จะได้ $L = \{l \in \mathbb{N} \mid l < n-1, l \mid (m-1)\} = \{l \in \mathbb{N} \mid l < 5, l \mid 4\} = \{1, 2, 4\}$

กรณี 1 $l=1$

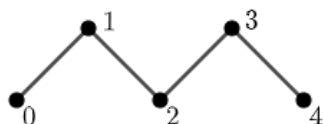
$$\text{พิจารณา } \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2$$

จะเห็นว่า $\frac{4}{1} = 4$ เป็นจำนวนคู่

เราแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 2 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{2i \mid i = 0, 1, 2\} = \{0, 2, 4\}$$

$$\bar{1} = \{2i+1 \mid i = 0, 1\} \cup \{2i-1 \mid i = 1, 2\} = \{1, 3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$$



กรณี 1 $l=2$

$$\text{พิจารณา } \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor = 1$$

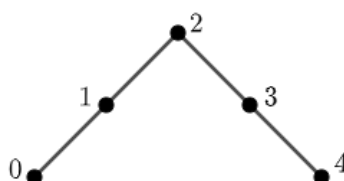
จะเห็นว่า $\frac{4}{2} = 2$ เป็นจำนวนคู่

เราแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 3 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{4i \mid i = 0, 1\} = \{0, 4\}$$

$$\bar{1} = \{4i+1 \mid i = 0\} \cup \{4i-1 \mid i = 1\} = \{1, 3\}$$

$$\bar{2} = \{4i+2 \mid i = 0\} = \{2\}$$



กรณี 1 $l = 4$

$$\text{พิจารณา } \left\lfloor \frac{m-1}{2l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{8} \right\rfloor = 0$$

จะเห็นว่า $\frac{4}{4} = 1$ เป็นจำนวนคี่

เราแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 5 เซต ดังนี้

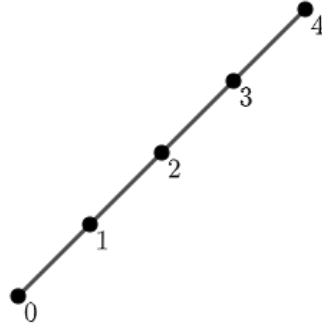
$$\bar{0} = \{8i \mid i = 0\} = \{0\}$$

$$\bar{1} = \{8i + 1 \mid i = 0\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{8i + 2 \mid i = 0\} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{8i + 3 \mid i = 0\} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{8i + 4 \mid i = 0\} = \{4\}$$



บทตั้ง 3 ให้ $l \in L$ และ $r \in V(C_n)$

กำหนด $f_{lr} : V(P_m) \rightarrow V(C_n)$ โดยที่

$$f_{lr}(x) = r + t \text{ ถ้า } x \in \bar{t}$$

และ $g_{lr} : V(P_m) \rightarrow V(C_n)$ โดยที่

$$g_{lr}(x) = r + (l - t) \text{ ถ้า } x \in \bar{t}$$

และกำหนด $F = \{f_{lr} : l \in L, r \in V(C_n)\}$ และ $G = \{g_{lr} : l \in L, r \in V(C_n)\}$

จะได้ $F \cup G \subseteq LSH(P_m, C_n)$ และ $|F| = |G| = n|L|$ และ $2n|L| \leq |LSH(P_m, C_n)|$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $F \subseteq LSH(P_m, C_n)$

ให้ $f_{lr} \in F$ ขั้นแรกจะแสดงว่า f_{lr} เป็นฟังก์ชันสําคัญ

ให้ $\{x, y\} \in E(P_m)$

สมมติให้ $x \in \bar{t}$ จากบทนิยาม 4 จะได้ว่า $y \in \overline{t+1}$ หรือ $y \in \overline{t-1}$

จากการกำหนด f_{lr} จะได้ว่า $f_{lr}(x) = r + t$ และ $f_{lr}(y) = r + (t+1)$ หรือ $f_{lr}(y) = r + (t-1)$

กรณี 1 ถ้า $f_{lr}(y) = r + (t+1)$

จากบทนิยาม 2 ได้ว่า $\{r + t, r + (t+1)\} \in E(C_n)$

นั่นคือ $\{f_{lr}(x), f_{lr}(y)\} \in E(C_n)$

กรณี 2 ถ้า $f_{lr}(y) = r + (t-1)$

จากบทนิยาม 2 ได้ว่า $\{r+t, r+(t-1)\} \in E(C_n)$

นั่นคือ $\{f_{lr}(x), f_{lr}(y)\} \in E(C_n)$

ดังนั้น f_{lr} เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน

ต่อไปจะแสดงว่า $f_{lr} \in LSH(P_m, C_n)$ โดยจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

และ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

ให้ $\{f_{lr}(x), f_{lr}(y)\} \in E(C_n)$

ได้ว่า $f_{lr}(x) = r+t$ และ $f_{lr}(y) = r+(t+1)$ สำหรับบาง $t \in \{0, 1, \dots, l-1\}$

หรือ $f_{lr}(y) = r+t$ และ $f_{lr}(x) = r+(t+1)$ สำหรับบาง $t \in \{0, 1, \dots, l-1\}$

กรณี 1 ถ้า $f_{lr}(x) = r+t$ และ $f_{lr}(y) = r+(t+1)$

จะได้ว่า $f_{lr}^{-1}(f_{lr}(x)) = \bar{t}$ และ $f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y)) = \overline{t+1}$

ให้ $p \in f_{lr}^{-1}(f_{lr}(x)) = \bar{t}$

กรณี 1.1 ถ้า $t = 0$

แล้ว $f_{lr}^{-1}(f_{lr}(x)) = \bar{0}$ และ $f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y)) = \bar{1}$

เห็นได้ชัดว่า ทุกสมาชิกใน $\bar{0}$ จะมีบางสมาชิกใน $\bar{1}$ ที่ประชิดกันเสมอ

และ ทุกสมาชิกใน $\bar{1}$ จะมีบางสมาชิกใน $\bar{0}$ ที่ประชิดกันเสมอ

กรณี 1.2 ถ้า $t > 0$

จะได้ว่า $p \in \bar{t} = \{2il+t \mid i=0, 1, \dots, k\} \cup \{2il-t \mid i=1, 2, \dots, k\}$

กรณี 1.2.1 ถ้า $p \in \{2il+t \mid i=0, 1, \dots, k\}$

จะได้ว่า $p = 2ul+t$ สำหรับบาง $u \in \{0, \dots, k\}$

จะเห็นว่า

$$s = p+1$$

$$= 2ul+(t+1)$$

$$\in \{2il+(t+1) \mid i=0, \dots, k\}$$

$$\subseteq \{2il+(t+1) \mid i=0, \dots, k\} \cup \{2il-(t+1) \mid i=1, \dots, k\}$$

$$= \overline{t+1}$$

$$= f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y))$$

ที่ซึ่ง $\{p, s\} \in E(P_m)$

กรณี 1.2.2 ถ้า $p \in \{2il-t \mid i=0, 1, \dots, k\}$

จะได้ว่า $p = 2ul-t$ สำหรับบาง $u \in \{0, \dots, k\}$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
s &= p-1 \\
&= 2ul - (t+1) \\
&\in \{2il - (t+1) \mid i = 0, \dots, k\} \\
&\subseteq \{2il + (t+1) \mid i = 0, \dots, k\} \cup \{2il - (t+1) \mid i = 1, \dots, k\} \\
&= \overline{t+1} \\
&= f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y))
\end{aligned}$$

ที่ซึ่ง $\{p, s\} \in E(P_m)$

ดังนั้นสำหรับทุกสมาชิก $p \in f_{lr}^{-1}(f_{lr}(x))$ จะมี $s \in f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y))$

ที่ทำให้ $\{p, s\} \in E(P_m)$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่าสำหรับทุก $s \in f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y))$

จะมี $p \in f_{lr}^{-1}(f_{lr}(x))$ ที่ทำให้ $\{p, s\} \in E(P_m)$

กรณี 2 ถ้า $f_{lr}(y) = r+t$ และ $f_{lr}(x) = r+(t+1)$

แล้วสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1

ดังนั้น f_{lr} เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

ได้ว่า f_{lr} เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า $f_{lr} \in LSH(P_m, C_n)$

ดังนั้น $F \subseteq LSH(P_m, C_n)$

ต่อไปจะแสดงว่า $G \subseteq LSH(P_m, C_n)$

ให้ $g_{lr} \in G$ ในทำนองเดียวกันกับ f_{lr} จะได้ว่า g_{lr} เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน

ต่อไปจะแสดงว่า $g_{lr} \in LSH(P_m, C_n)$ โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

และ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

ให้ $\{g_{lr}(x), g_{lr}(y)\} \in E(C_n)$

ได้ว่า $g_{lr}(x) = r+(l-t)$ และ $g_{lr}(y) = r+(l-(t+1))$ สำหรับบาง $t \in \{0, 1, \dots, l-1\}$

หรือ $g_{lr}(y) = r+(l-t)$ และ $g_{lr}(x) = r+(l-(t+1))$ สำหรับบาง $t \in \{0, 1, \dots, l-1\}$

กรณี 1 ถ้า $g_{lr}(x) = r+(l-t)$ และ $g_{lr}(y) = r+(l-(t+1))$

จะได้ว่า $g_{lr}^{-1}(g_{lr}(x)) = \bar{t}$ และ $g_{lr}^{-1}(g_{lr}(y)) = \overline{t+1}$

ให้ $p \in g_{lr}^{-1}(g_{lr}(x)) = \bar{t}$

กรณี 1.1 ถ้า $t = 0$

แล้ว $g_{lr}^{-1}(g_{lr}(x)) = \bar{0}$ และ $g_{lr}^{-1}(g_{lr}(y)) = \bar{1}$

เห็นได้ชัดว่า ทุกสมาชิกใน $\bar{0}$ จะมีบางสมาชิกใน $\bar{1}$ ที่ประชิดกันเสมอ

และ ทุกสมาชิกใน $\bar{1}$ จะมีบางสมาชิกใน $\bar{0}$ ที่ประชิดกันเสมอ

กรณี 1.2 ถ้า $t > 0$

จะได้ว่า $p \in \bar{t} = \{2il + t \mid i = 0, 1, \dots, k\} \cup \{2il - t \mid i = 1, 2, \dots, k\}$

กรณี 1.2.1 ถ้า $p \in \{2il + t \mid i = 0, 1, \dots, k\}$

จะได้ว่า $p = 2ul + t$ สำหรับบาง $u \in \{0, \dots, k\}$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} s &= p + 1 \\ &= 2ul + (t + 1) \\ &\in \{2il + (t + 1) \mid i = 0, \dots, k\} \\ &\subseteq \{2il + (t + 1) \mid i = 0, \dots, k\} \cup \{2il - (t + 1) \mid i = 1, \dots, k\} \\ &= \overline{t + 1} \\ &= f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y)) \end{aligned}$$

ที่ซึ่ง $\{p, s\} \in E(P_m)$

กรณี 1.2.2 ถ้า $p \in \{2il - t \mid i = 0, 1, \dots, k\}$

จะได้ว่า $p = 2ul - t$ สำหรับบาง $u \in \{0, \dots, k\}$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} s &= p - 1 \\ &= 2ul - (t + 1) \\ &\in \{2il - (t + 1) \mid i = 0, \dots, k\} \\ &\subseteq \{2il + (t + 1) \mid i = 0, \dots, k\} \cup \{2il - (t + 1) \mid i = 1, \dots, k\} \\ &= \overline{t + 1} \\ &= f_{lr}^{-1}(f_{lr}(y)) \end{aligned}$$

ที่ซึ่ง $\{p, s\} \in E(P_m)$

ดังนั้นสำหรับทุกสมาชิก $p \in g_{lr}^{-1}(g_{lr}(x))$ จะมี $s \in g_{lr}^{-1}(g_{lr}(y))$

ที่ทำให้ $\{p, s\} \in E(P_m)$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่าสำหรับทุก $s \in g_{lr}^{-1}(g_{lr}(y))$

จะมี $p \in g_{lr}^{-1}(g_{lr}(x))$ ที่ทำให้ $\{p, s\} \in E(P_m)$

กรณี 2 ถ้า $g_{lr}(y) = r + (l - t)$ และ $g_{lr}(x) = r + (l - (t + 1))$

แล้วสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1

ดังนั้น g_{lr} เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

ได้ว่า g_{lr} เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า $g_{lr} \in LSH(P_m, C_n)$

ทำให้ $G \subseteq LSH(P_m, C_n)$

ดังนั้น $F \cup G \subseteq LSH(P_m, C_n)$

จากการกำหนด F และ G จะได้ว่า $F \cap G = \emptyset$ และ $|F| = |G| = |V(C_n)| = n|L|$

ดังนั้น $|F \cup G| = |F| + |G| = n|L| \leq LSH(P_m, C_n)$

#

ตัวอย่าง 3.3 ฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_5 ไปยังวัฏจักร C_6

ให้ $m=5$ และ $n=6$

จะได้ $L = \{l \in \mathbb{N} \mid l < n-1, l \mid (m-1)\} = \{l \in \mathbb{N} \mid l < 5, l \mid 4\} = \{1, 2, 4\}$

พิจารณาฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_5 ไปยังวัฏจักร C_6 จาก f_{lr} ดังนี้

กรณี 1 $l=1$

เราแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 2 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{0, 2, 4\}$$

$$\bar{1} = \{1, 3\}$$

ได้ว่า $f_{1r}(0) = f_{1r}(2) = f_{1r}(4) = r$ และ $f_{1r}(1) = f_{1r}(3) = r+1$

หรือ $f_{1r}(\bar{0}) = \{r\}$ และ $f_{1r}(\bar{1}) = \{r+1\}$

หากพิจารณาแต่ละ $r \in V(C_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน f_{1r} ที่กำหนดดังนี้

$$f_{10}(\bar{0}) = \{0\}, f_{10}(\bar{1}) = \{1\}$$

$$f_{11}(\bar{0}) = \{1\}, f_{11}(\bar{1}) = \{2\}$$

$$f_{12}(\bar{0}) = \{2\}, f_{12}(\bar{1}) = \{3\}$$

$$f_{13}(\bar{0}) = \{3\}, f_{13}(\bar{1}) = \{4\}$$

$$f_{14}(\bar{0}) = \{4\}, f_{14}(\bar{1}) = \{5\}$$

$$f_{15}(\bar{0}) = \{5\}, f_{15}(\bar{1}) = \{0\}$$

ได้ว่า มีฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน f_{1r} ทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน

กรณี 2 $l=2$

เราสามารถแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 3 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{0, 4\}$$

$$\bar{1} = \{1, 3\}$$

$$\bar{2} = \{2\}$$

ได้ว่า $f_{2r}(0) = f_{2r}(4) = r$ และ $f_{2r}(1) = f_{2r}(3) = r+1$ และ $f_{2r}(2) = r+2$

หรือ $f_{2r}(\bar{0}) = \{r\}, f_{2r}(\bar{1}) = \{r+1\}, f_{2r}(\bar{2}) = \{r+2\}$

หากพิจารณาแต่ละ $r \in V(C_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน f_{2r} ที่กำหนดดังนี้

$$f_{20}(\bar{0}) = \{0\}, f_{20}(\bar{1}) = \{1\}, f_{20}(\bar{2}) = \{2\}$$

$$f_{21}(\bar{0}) = \{1\}, f_{21}(\bar{1}) = \{2\}, f_{21}(\bar{2}) = \{3\}$$

$$f_{22}(\bar{0}) = \{2\}, f_{22}(\bar{1}) = \{3\}, f_{22}(\bar{2}) = \{4\}$$

$$f_{23}(\bar{0}) = \{3\}, f_{23}(\bar{1}) = \{4\}, f_{23}(\bar{2}) = \{5\}$$

$$f_{24}(\bar{0}) = \{4\}, f_{24}(\bar{1}) = \{5\}, f_{24}(\bar{2}) = \{0\}$$

$$f_{25}(\bar{0}) = \{5\}, f_{25}(\bar{1}) = \{0\}, f_{25}(\bar{2}) = \{1\}$$

ได้ว่า มีฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน f_{2r} ทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน

กรณี 3 $l=4$

เราสามารถแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 5 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{0\}$$

$$\bar{1} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{4\}$$

ได้ว่า $f_{4r}(0) = r, f_{4r}(1) = r+1, f_{4r}(2) = r+2, f_{4r}(3) = r+3$ และ $f_{4r}(4) = r+4$

หรือ $f_{4r}(\bar{0}) = \{r\}, f_{4r}(\bar{1}) = \{r+1\}, f_{4r}(\bar{2}) = \{r+2\}, f_{4r}(\bar{3}) = \{r+3\}$ และ

$$f_{4r}(\bar{4}) = \{r+4\}$$

หากพิจารณาแต่ละ $r \in V(C_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน f_{4r} ที่กำหนดดังนี้

$$f_{40}(\bar{0}) = \{0\}, f_{40}(\bar{1}) = \{1\}, f_{40}(\bar{2}) = \{2\}, f_{40}(\bar{3}) = \{3\}, f_{40}(\bar{4}) = \{4\}$$

$$f_{41}(\bar{0}) = \{1\}, f_{41}(\bar{1}) = \{2\}, f_{41}(\bar{2}) = \{3\}, f_{41}(\bar{3}) = \{4\}, f_{41}(\bar{4}) = \{5\}$$

$$f_{42}(\bar{0}) = \{2\}, f_{42}(\bar{1}) = \{3\}, f_{42}(\bar{2}) = \{4\}, f_{42}(\bar{3}) = \{5\}, f_{42}(\bar{4}) = \{0\}$$

$$f_{43}(\bar{0}) = \{3\}, f_{43}(\bar{1}) = \{4\}, f_{43}(\bar{2}) = \{5\}, f_{43}(\bar{3}) = \{0\}, f_{43}(\bar{4}) = \{1\}$$

$$f_{44}(\bar{0}) = \{4\}, f_{44}(\bar{1}) = \{5\}, f_{44}(\bar{2}) = \{0\}, f_{44}(\bar{3}) = \{1\}, f_{44}(\bar{4}) = \{2\}$$

$$f_{45}(\bar{0}) = \{5\}, f_{45}(\bar{1}) = \{0\}, f_{45}(\bar{2}) = \{1\}, f_{45}(\bar{3}) = \{2\}, f_{45}(\bar{4}) = \{3\}$$

ได้ว่า มีฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน f_{4r} ทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน

จากทั้งสามกรณีข้างต้น จะได้ $F \subseteq LSH(P_5, C_6)$ และได้ว่า $|F| = 18 = 6 \times 3 = n|L|$

ต่อไปพิจารณาฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_5 ไปยังวัฏจักร C_6 จาก g_r ดังนี้

กรณี 1 $l=1$

สามารถแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 2 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{0, 2, 4\}$$

$$\bar{1} = \{1, 3\}$$

ได้ว่า $g_{1r}(0) = g_{1r}(2) = g_{1r}(4) = r+1$ และ $g_{1r}(1) = g_{1r}(3) = r$

หรือ $g_{1r}(\bar{0}) = \{r+1\}, g_{1r}(\bar{1}) = \{r\}$

หากพิจารณาแต่ละ $r \in V(C_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน g_{1r} ที่กำหนดดังนี้

$$g_{10}(\bar{0}) = \{1\}, g_{10}(\bar{1}) = \{0\}$$

$$g_{11}(\bar{0}) = \{2\}, g_{11}(\bar{1}) = \{1\}$$

$$g_{12}(\bar{0}) = \{3\}, g_{12}(\bar{1}) = \{2\}$$

$$g_{13}(\bar{0}) = \{4\}, g_{13}(\bar{1}) = \{3\}$$

$$g_{14}(\bar{0}) = \{5\}, g_{14}(\bar{1}) = \{4\}$$

$$g_{15}(\bar{0}) = \{0\}, g_{15}(\bar{1}) = \{5\}$$

ได้ว่า มีฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน g_{1r} ทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน

กรณี 2 $l=2$

สามารถแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 3 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{0, 4\}$$

$$\bar{1} = \{1, 3\}$$

$$\bar{2} = \{2\}$$

ได้ว่า $g_{2r}(0) = g_{2r}(4) = r+2$ และ $g_{2r}(1) = g_{2r}(3) = r+1$ และ $g_{2r}(2) = r+2$

หรือ $g_{2r}(\bar{0}) = \{r+2\}, g_{2r}(\bar{1}) = \{r+1\}, g_{2r}(\bar{2}) = \{r\}$

หากพิจารณาแต่ละ $r \in V(C_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน g_{2r} ที่กำหนดดังนี้

$$g_{20}(\bar{0}) = \{2\}, g_{20}(\bar{1}) = \{1\}, g_{20}(\bar{2}) = \{0\}$$

$$g_{21}(\bar{0}) = \{3\}, g_{21}(\bar{1}) = \{2\}, g_{21}(\bar{2}) = \{1\}$$

$$g_{22}(\bar{0}) = \{4\}, g_{22}(\bar{1}) = \{3\}, g_{22}(\bar{2}) = \{2\}$$

$$g_{23}(\bar{0}) = \{5\}, g_{23}(\bar{1}) = \{4\}, g_{23}(\bar{2}) = \{3\}$$

$$g_{24}(\bar{0}) = \{0\}, g_{24}(\bar{1}) = \{5\}, g_{24}(\bar{2}) = \{4\}$$

$$g_{25}(\bar{0}) = \{1\}, g_{25}(\bar{1}) = \{0\}, g_{25}(\bar{2}) = \{5\}$$

ได้ว่า มีฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน g_{2r} ทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน

กรณี 3 $l = 4$

สามารถแบ่งจุดยอดใน P_5 ออกเป็น 5 เซต ดังนี้

$$\bar{0} = \{0\}$$

$$\bar{1} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{4\}$$

ได้ว่า $g_{4r}(0) = r + 4, g_{4r}(1) = r + 3, g_{4r}(2) = r + 2, g_{4r}(3) = r + 1$ และ $g_{4r}(4) = r$

หรือ $g_{4r}(\bar{0}) = \{r + 4\}, g_{4r}(\bar{1}) = \{r + 3\}, g_{4r}(\bar{2}) = \{r + 2\}, g_{4r}(\bar{3}) = \{r + 1\}$ และ

$$g_{4r}(\bar{4}) = \{r\}$$

หากพิจารณาแต่ละ $r \in V(C_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน g_{4r} ที่กำหนดดังนี้

$$g_{40}(\bar{0}) = \{4\}, g_{40}(\bar{1}) = \{3\}, g_{40}(\bar{2}) = \{2\}, g_{40}(\bar{3}) = \{1\}, g_{40}(\bar{4}) = \{0\}$$

$$g_{41}(\bar{0}) = \{5\}, g_{41}(\bar{1}) = \{4\}, g_{41}(\bar{2}) = \{3\}, g_{41}(\bar{3}) = \{2\}, g_{41}(\bar{4}) = \{1\}$$

$$g_{42}(\bar{0}) = \{0\}, g_{42}(\bar{1}) = \{5\}, g_{42}(\bar{2}) = \{4\}, g_{42}(\bar{3}) = \{3\}, g_{42}(\bar{4}) = \{2\}$$

$$g_{43}(\bar{0}) = \{1\}, g_{43}(\bar{1}) = \{0\}, g_{43}(\bar{2}) = \{5\}, g_{43}(\bar{3}) = \{4\}, g_{43}(\bar{4}) = \{3\}$$

$$g_{44}(\bar{0}) = \{2\}, g_{44}(\bar{1}) = \{1\}, g_{44}(\bar{2}) = \{0\}, g_{44}(\bar{3}) = \{5\}, g_{44}(\bar{4}) = \{4\}$$

$$g_{45}(\bar{0}) = \{3\}, g_{45}(\bar{1}) = \{2\}, g_{45}(\bar{2}) = \{1\}, g_{45}(\bar{3}) = \{0\}, g_{45}(\bar{4}) = \{5\}$$

ได้ว่า มีฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน g_{4r} ทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน

จากทั้งสามกรณีข้างต้น จะได้ $G \subseteq LSH(P_5, C_6)$ และได้ว่า $|G| = 18 = 6 \times 3 = n|L|$

บทตั้ง 4 ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $m > 1$ และ $n \geq 3$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและเป็นฟังก์ชันสาคีสสณฐานจากวิธี P_m ไปยังวัฏจักร C_n แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและเป็นฟังก์ชันสาคีสสณฐานจากวิธี P_m ไปยังวัฏจักร C_n

$$\text{กำหนด } V(P_m) = \{0, 1, \dots, m-1\} \text{ และ } V(C_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\text{ได้ว่า } f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+(n-1)\} \text{ สำหรับบาง } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\text{จะได้ว่า } f(0) = i+t \text{ สำหรับบาง } t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\text{ทำให้ } f(1) = i+(t+1) \text{ หรือ } f(1) = i+(t-1)$$

กรณี 1 ถ้า $f(1) = i+(t+1)$

$$\text{แล้วจะได้ว่า } 1 \in f^{-1}(i+(t+1)) \text{ ดังนั้น } 1 \notin f^{-1}(i+(t-1))$$

$$\text{เนื่องจาก } \{i+t, i+(t-1)\} \in E(P_n) \text{ และ } 1 \notin f^{-1}(i+(t-1))$$

จะได้ว่า ไม่มีสมาชิกใดใน $f^{-1}(i + (t-1))$ ที่ประชิดกับ $0 \in f^{-1}(i+t)$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

กรณี 2 ถ้า $f(1) = i + (t-1)$

แล้วสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1 ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและเป็นฟังก์ชันสาคีสฐานจากวิถี P_m ไปยังวัฏจักร C_n แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

#

ข้อสังเกต ให้ f เป็นฟังก์ชันสาคีสฐาน f จะเป็นฟังก์ชันทั่วถึง เมื่อมีการส่งจุดยอดจาก P_m ไปยังจุดยอดทุกจุดใน C_n หรือ $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ สำหรับทุก $x \in V(C_n)$ ซึ่งถ้าหากพิจารณาฟังก์ชันจากบทตั้ง 2 ได้ว่า เมื่อ $l = n-1$ จะทำให้ f_{lr} และ g_{lr} เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจากวิถี P_m ไปยังวัฏจักร C_n นั่นคือ f_{lr} และ g_{lr} จะไม่เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไปยังวัฏจักร C_n

ตัวอย่าง 3.4 ฟังก์ชันทั่วถึงที่เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานจากวิถี P_3 ไปยังวัฏจักร C_3

ให้ $m=3$ และ $n=3$ และ $r \in V(C_3)$

จะได้ $l = n-1 = 3-1 = 2$

เราแบ่งจุดยอดใน P_3 ออกเป็น 3 ชั้น ดังนี้

$$\bar{0} = \{0\}$$

$$\bar{1} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{2\}$$

ได้ว่า $f_{2r}(0) = r$ และ $f_{2r}(1) = r+1$ และ $f_{2r}(2) = r+2$

เนื่องจาก $\{f_{2r}(0), f_{2r}(2)\} = \{r, r+2\} \in E(C_3)$ แต่ $\{0, 2\} \notin E(P_3)$

ดังนั้น f_{2r} เป็นฟังก์ชันทั่วถึงที่เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานจากวิถี P_3 ไปยังวัฏจักร C_3

ทฤษฎีบท 5 ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $m > 1$ และ $n \geq 3$ ได้ว่า $F \cup G = LSH(P_m, C_n)$ และ

$$|LSH(P_m, C_n)| = 2n|L|$$

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2 ได้ว่า $F \cup G \subseteq LSH(P_m, C_n)$

ดังนั้น $|LSH(P_m, C_n)| \geq 2n|L|$

ต่อไปจะแสดงว่า $LSH(P_m, C_n) \subseteq F \cup G$

ให้ $f \in LSH(P_m, C_n)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันสาคีสฐาน

จะได้ว่า $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$ สำหรับบาง $l \leq n-1$

โดยบทตั้ง 6 จะได้ว่า $l \neq n-1$ ดังนั้น $l < n-1$

เนื่องจาก $m > 1$ ดังนั้น $l > 1$

กำหนด $l = k-1$ ได้ว่า $l+1 < n$

ต่อไปจะแสดงว่า $l|(m-1)$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $f(0) = i$ หรือ $f(0) = i+l$

สมมติว่า $f(0) = i+t$ สำหรับบาง $t \in \{1, \dots, l-1\}$

ดังนั้น $f(1) = i+(t+1)$ หรือ $f(1) = i+(t-1)$

กรณี 1 ถ้า $f(1) = i+(t+1)$

แล้วได้ว่า $1 \in f^{-1}(i+(t+1))$ ดังนั้น $1 \notin f^{-1}(i+(t-1))$

เนื่องจาก $\{i+t, i+(t-1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $0 \in f^{-1}(i+t)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(t-1))$ ที่ประชิดกับ 0

ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

กรณี 2 ถ้า $f(1) = i+(t-1)$

แล้วได้ว่า $1 \in f^{-1}(i+(t-1))$ ดังนั้น $1 \notin f^{-1}(i+(t+1))$

เนื่องจาก $\{i+t, i+(t+1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $0 \in f^{-1}(i+t)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(t+1))$ ที่ประชิดกับ 0

ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ $f(0) \neq i+t$ สำหรับทุก $t \in \{1, \dots, l-1\}$

นั่นคือ $f(0) = i$ หรือ $f(0) = i+l$

ต่อไปจะแสดงว่า $f(m-1) = i$ หรือ $f(m-1) = i+l$

สมมติว่า $f(m-1) = i+t$ สำหรับบาง $t \in \{1, \dots, l-1\}$

ดังนั้น $f(m-2) = i+(t+1)$ หรือ $f(m-2) = i+(t-1)$

กรณี 1 ถ้า $f(m-2) = i+(t+1)$

แล้วจะได้ว่า $m-2 \in f^{-1}(i+(t+1))$ ดังนั้น $m-2 \notin f^{-1}(i+(t-1))$

เนื่องจาก $\{i+t, i+(t-1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $m-1 \in f^{-1}(i+t)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(t-1))$ ที่ประชิดกับ $m-1$

ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

กรณี 2 ถ้า $f(m-2) = i+(t-1)$

แล้วจะได้ว่า $m-2 \in f^{-1}(i+(t-1))$ ดังนั้น $m-2 \notin f^{-1}(i+(t+1))$

เนื่องจาก $\{i+t, i+(t+1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $m-1 \in f^{-1}(i+t)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(t+1))$ ที่ประชิดกับ $m-1$

ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ $f(m-1) \neq i+t$ สำหรับทุก $t \in \{1, \dots, l-1\}$

ดังนั้น $f(m-1)=i$ หรือ $f(m-1)=i+l$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $f(0)=i$ หรือ $f(0)=i+l$ และ $f(m-1)=i$ หรือ $f(m-1)=i+l$

ต่อไปจะแสดงว่า $l|(m-1)$ โดยแบ่งออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ถ้า $f(0)=i$ และ $f(m-1)=i$

ได้ว่า $f(1)=i+1$

จะแสดงว่า $f(j)=i+j$ สำหรับทุก $j \in \{2, \dots, l\}$

สมมติให้ $f(t)=i+t$ และ $f(t-1)=f(t+1)=i+(t-1)$ สำหรับบาง $1 < t < l$

ดังนั้น $t \in f^{-1}(i+t)$ และ $t-1, t+1 \in f^{-1}(i+(t-1))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

และ $\{i+t, i+(t+1)\} \in E(C_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(t+1))$ ที่ประชิดกับ t

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ f เป็นฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(2)=i+2$

$\vdots$

$f(l)=i+l$

จะแสดงว่า $f(j)=i+(l-j)$ สำหรับทุก $j \in \{2, \dots, l\}$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

ดังนั้น $f(l+1)=i+(l-1)$

สมมติให้ $f(l+k)=i+(l-k)$ และ $f(l+(k+1))=f(l+(k-1))=i+(l-(k-1))$

สำหรับบาง $1 < k < l$

ดังนั้น $l+k \in f^{-1}(i+(l-k))$ และ $l+(k+1), l+(k-1) \in f^{-1}(i+(l-(k-1)))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

และ $\{i+(l-k), i+(l-(k+1))\} \in E(C_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(l-(k+1)))$ ที่ประชิดกับ $l+k$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ f เป็นฟังก์ชันสาคีสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(l+2)=i+(l-2)$

$\vdots$

$f(l+l)=i+(l-l)$ นั่นคือ $f(2l)=i$

นอกจากนี้ยังสามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้างต้นได้ว่า

$f(2l+1)=i+1$

$\vdots$

$f(3l)=i+l$

$\vdots$

$$f(gl) = i \text{ สำหรับบาง } g \in \mathbb{N}$$

จะเห็นว่าถ้ากำหนด

$$\bar{0} = \{2il \mid i = 0, 1, \dots, k\}$$

$\vdots$

$$\bar{t} = \{2il + t \mid i = 0, 1, \dots, k\} \cup \{2il - t \mid i = 1, 2, \dots, k\}$$

$\vdots$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l \mid i = 0, 1, \dots, k\}$$

แล้ว $f(x) = i + t$ เมื่อ $x \in \bar{t}$

จะเห็นว่า $f(\bar{0}) = f(2il) = \{i\}$ และ $f(m-1) = i$

ดังนั้น $2jl = m-1$ สำหรับบาง $j \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l \mid (m-1)$

จาก $l < n-1$ และ $l \mid (m-1)$

ดังนั้น $l \in L$ และ $f = f_l \in F$

กรณี 2 $f(0) = i$ และ $f(m-1) = i + l$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

นั่นคือ $f(\bar{l}) = f((2i+1)l) = \{i+l\}$ และ $f(m-1) = i+l$

ดังนั้น $(2j+1)l = m-1$ สำหรับบาง $j \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l \mid (m-1)$

จาก $l < n-1$ และ $l \mid (m-1)$

ดังนั้น $l \in L$

ได้ว่า $f \in F$ และ $f = f_l \in F$

กรณี 3 $f(0) = i + l$ และ $f(m-1) = i$

ได้ว่า $f(1) = i + (l-1)$

จะแสดงว่า $f(j) = i + (l-j)$ สำหรับทุก $j \in \{2, \dots, l\}$

สมมติให้ $f(t) = i + (l-t)$ และ $f(t-1) = f(t+1) = i + (l-(t-1))$

สำหรับบาง $1 < t < l$

ดังนั้น $t \in f^{-1}(i + (l-t))$ และ $t-1, t+1 \in f^{-1}(i + (l-(t-1)))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

และ $\{i + (l-t), i + (l-(t+1))\} \in E(C_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i + (l-(t+1)))$ ที่ประชิดกับ t

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ f เป็นฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเชื่อมต่อเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(2) = i + (l-2)$

$\vdots$

$$f(l) = i + (l - l) \Rightarrow f(l) = i$$

จะแสดงว่า $f(j) = i + j$ สำหรับทุก $j \in \{2, \dots, l\}$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

ดังนั้น $f(l+1) = i+1$

สมมติให้ $f(l+k) = i+k$ และ $f(l+(k+1)) = f(l+(k-1)) = i+(k-1)$

สำหรับบาง $1 < k < l$

ดังนั้น $l+k \in f^{-1}(i+k)$ และ $l+(k+1), l+(k-1) \in f^{-1}(i+(k-1))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

และ $\{i+k, i+(k+1)\} \in E(C_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(k+1))$ ที่ประชิดกับ $l+k$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเชื่อมเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(l+2) = i+2$

$\vdots$

$$f(l+l) = i+l \text{ นั่นคือ } f(2l) = i+l$$

นอกจากนี้ยังสามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้างต้นได้ว่า

$$f(2l+1) = i+(l-1)$$

$\vdots$

$$f(3l) = i$$

$\vdots$

$$f(gl) = i \text{ สำหรับบาง } g \in \mathbb{N}$$

จะเห็นว่าถ้ากำหนด

$$\bar{0} = \{2il \mid i = 0, 1, \dots, k\}$$

$\vdots$

$$\bar{t} = \{2il + t \mid i = 0, 1, \dots, k\} \cup \{2il - t \mid i = 1, 2, \dots, k\}$$

$\vdots$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l \mid i = 0, 1, \dots, k\}$$

แล้ว $f(x) = i + (l - t)$ เมื่อ $x \in \bar{t}$

จะเห็นว่า $f(\bar{l}) = f((2i+1)l) = \{i + (l - l)\} = \{i\}$ และ $f(m-1) = i$

ดังนั้น $(2j+1)l = m-1$ สำหรับบาง $j \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l \mid (m-1)$

จาก $l < n-1$ และ $l \mid (m-1)$

ดังนั้น $l \in L$ และ $f = g_{li} \in G$

กรณี 4 $f(0) = i + l$ และ $f(m-1) = i + l$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 3

นั่นคือ $f(\bar{0}) = f(2il) = \{i + l\}$ และ $f(m-1) = i + l$

ดังนั้น $2jl = m-1$ สำหรับบาง $j \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l \mid (m-1)$

จาก $l < n-1$ และ $l \mid (m-1)$

ดังนั้น $l \in L$ และ $f = g_{ii} \in G$

จากทั้ง 4 กรณีข้างต้น ได้ว่า $f \in F \cup G$

ดังนั้น $LSH(P_m, C_n) \subseteq F \cup G$

ได้ว่า $|LSH(P_m, C_n)| \leq 2n|L|$

ดังนั้น $|LSH(P_m, C_n)| = 2n|L|$

#

ตัวอย่าง 3.5 จำนวนฟังก์ชันสัทสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_5 ไปยังวัฏจักร C_6

จากโจทย์ได้ว่า $n = 6$ และจากตัวอย่าง 2.2 ได้ว่า $L = \{1, 2, 4\}$

จากทฤษฎีบท 7 $|LSH(P_m, C_n)| = 2n|L|$

นั่นคือ $|LSH(P_5, C_6)| = 2n|L| = 2 \times 6 \times 3 = 36$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

จากการศึกษา จำนวนฟังก์ชันสมาชิกสัจฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_m ไปยังวัฏจักร C_n สำหรับจำนวนนับ m และ $n \geq 3$ ได้ผลการศึกษา ดังนี้

1. $|LSH(P_1, C_n)| = n$
2. ถ้า $m > 1$ ได้ว่า $|LSH(P_m, C_n)| = 2n|L|$ โดยที่ $L = \{l \in \mathbb{N} \mid l < n-1, l|(m-1)\}$

บรรณานุกรม

- [1] Sr. Arworn, U. Knauer, S. Leeratanavalee, Locally strong endomorphisms of paths, Discrete Mathematics, 2008, 2525-2532.
- [2] Douglas B. West. (2001). *Introduction to Graph Theory*: MATHEMATICS DEPARTMENT UNIVERSITY OF ILLINOIS.
- [3] นิยามและคุณสมบัติพื้นฐานของกราฟ (ม.ป.ป.). :
<http://maths.sci.ku.ac.th/suriya/Slide/Discrete/Slide6-1.pdf>.
สืบค้นข้อมูลเมื่อวันที่ 1 มีนาคม 2566
- [4] ทฤษฎีกราฟ (ม.ป.ป.). :
http://oservice.skru.ac.th/ebook/lessoncheck.asp?lesson_code=5703
สืบค้นข้อมูลเมื่อวันที่ 1 มีนาคม 2566
- [5] ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (ม.ป.ป.). :
<http://www.thaiscience.info/Journals/Article/TJKM/10973468.pdf>.
สืบค้นข้อมูลเมื่อวันที่ 1 มีนาคม 2566
- [6] ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (ม.ป.ป.). :
<http://www.mwit.ac.th/~noon/style/graph.pdf>.
สืบค้นข้อมูลเมื่อวันที่ 1 มีนาคม 2566

ภาคผนวก

LOCALLY STRONG HOMOMORPHISMS FROM PATHS TO CYCLES

Ms. Yananan Mati

Advisor: Assoc. Prof. Dr.Sayan Panma

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



Abstract

A homomorphism from a graph G to a graph G' is a mapping f from $V(G)$ to $V(G')$ which preserves edges, i.e., if $\{x, y\} \in E(G)$ implies $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$. A homomorphism is called **locally strong** if $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$ implies that for all $x' \in f^{-1}(f(x))$ there exists $y' \in f^{-1}(f(y))$ such that $\{x', y'\} \in E(G)$, and for all $y' \in f^{-1}(f(y))$ there exists $x' \in f^{-1}(f(x))$ such that $\{x', y'\} \in E(G)$. In this independent study, we determine the number of locally strong homomorphisms from paths to cycles.

Preliminaries

In this section, we give some basic definitions and examples.

Definition 1

A graph G is a pair $G = (V(G), E(G))$ where $V(G)$ is a finite set whose elements are called *vertices*, and $E(G)$ is a set of un-order pairs of vertices, whose elements are called *edges*.

Example : Let $G = (V(G), E(G))$ where $V(G) = \{A, B, C, D\}$ and $E(G) = \{\{A, B\}, \{B, B\}, \{A, C\}, \{A, C\}, \{C, D\}\}$. Then G is a graph.

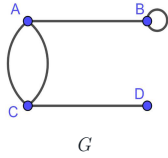


Figure 1: Graph G

Definition 2

Let P_n be a graph with $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ and $E(P_n) = \{\{i, i+1\} | i \in \{0, \dots, n-1\}\}$. We call P_n a *path* with n vertices.

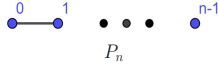


Figure 2: Path with n vertices

Definition 3

For $n \in \mathbb{N}$ and $n \geq 3$, let C_n be a graph with $V(C_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ and $E(C_n) = \{\{i, i+1\} | i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ where $+$ is the addition modulo n . We call C_n a *cycle* with n vertices.

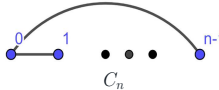


Figure 3: Cycle with n vertices

Definition 4

Let G and G' be graphs. A mapping $f : V(G) \rightarrow V(G')$ is called a *homomorphism* from G to G' if $\{x, y\} \in E(G)$ implies $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$.

Definition 5

Let G and G' be graphs and let f be a homomorphism from G to G' . The homomorphism f is called a *locally strong homomorphism* from G to G' if $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$ implies that for all $x' \in f^{-1}(f(x))$ there exists $y' \in f^{-1}(f(y))$ such that $\{x', y'\} \in E(G)$ and for all $y' \in f^{-1}(f(y))$ there exists $x' \in f^{-1}(f(x))$ such that $\{x', y'\} \in E(G)$.

Let $LSH(G, G')$ denote the set of all locally strong homomorphisms from G to G' .

Example : Consider P_3 and C_4 and $f : V(P_3) \rightarrow V(C_4)$ as in the picture below.

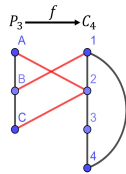


Figure 4: Locally strong homomorphism from P_3 to C_4

We get that: $\{A, B\} \in E(P_3) \rightarrow \{f(A), f(B)\} = \{1, 2\} \in E(C_4)$;
 $\{B, C\} \in E(P_3) \rightarrow \{f(B), f(C)\} = \{2, 3\} \in E(C_4)$.

Thus f is a homomorphism from P_3 to C_4 .

Consider $\{f(A), f(B)\} = \{1, 2\} \in E(C_4)$.

We see that for all $x' \in f^{-1}(f(A)) = \{A, C\}$,

there exists $y' \in f^{-1}(f(B)) = \{B\}$ such that $\{x', y'\} \in E(P_3)$,

and for all $y' \in f^{-1}(f(B)) = \{B\}$,

there exists $x' \in f^{-1}(f(A)) = \{A, C\}$ such that $\{x', y'\} \in E(P_3)$.

Thus f is a locally strong homomorphism from P_3 to C_4 .

Results

In this independent study, we find the number of locally strong homomorphisms from a path P_m to a cycle C_n , i.e., $|LSH(P_m, C_n)|$ for all integers m and $n \geq 3$. We first give the number of locally strong homomorphisms from P_1 to C_n for all $n \geq 3$.

Lemma 6

If $n \in \mathbb{N}$ where $n \geq 3$ then $|LSH(P_1, C_n)| = n$.

We now give partitions of $V(P_n)$ for defining locally strong homomorphisms from P_m to C_n for $m > 1$ and $n \geq 3$.

Definition 7

Let $m, n \in \mathbb{N}$ where $m > 1$, $n \geq 3$, and let $L = \{l \in \mathbb{N} | l < n-1, l|(m-1)\}$.

For $\frac{m-1}{l}$ is odd, let

$$\bar{0} = \{2il | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\},$$

$$\bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \text{ for } 0 < t < l,$$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}.$$

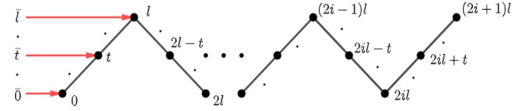


Figure 5: $l+1$ classes where $\frac{m-1}{l}$ is odd.

For $\frac{m-1}{l}$ is even, let

$$\bar{0} = \{2il | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\},$$

$$\bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\} \cup \{2il - t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \text{ for } 0 < t < l,$$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\}.$$

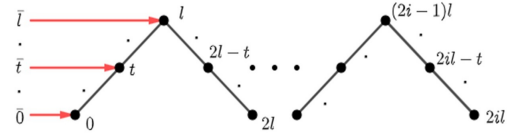


Figure 6: $l+1$ classes where $\frac{m-1}{l}$ is even.

By using above partitions, we get the following result.

Lemma 8

Let $m, n \in \mathbb{N}$ where $m > 1$ and $n \geq 3$. For $l \in L$ and $r \in V(C_n)$,

define $f_{lr} : V(P_m) \rightarrow V(C_n)$ by $f_{lr}(x) = r + t$ if $x \in \bar{t}$, and

define $g_{lr} : V(P_m) \rightarrow V(C_n)$ by $g_{lr}(x) = r + (l-t)$ if $x \in \bar{l}$.

Let $F = \{f_{lr} : l \in L, r \in V(C_n)\}$ and $G = \{g_{lr} : l \in L, r \in V(C_n)\}$.

Then $F \cup G \subseteq |LSH(P_m, C_n)|$ and $|F| = |G| = n|L|$.

Finally, the next theorem gives the number of locally strong homomorphisms from P_m to C_n for $m > 1$ and $n \geq 3$.

Theorem 9

Let $m, n \in \mathbb{N}$ where $m > 1$ and $n \geq 3$.

Then $F \cup G = LSH(P_m, C_n)$ and $|LSH(P_m, C_n)| = 2n|L|$.

Example : Consider the number of locally strong homomorphisms from P_5 to C_6 .

We see that $L = \{l \in \mathbb{N} | l < n-1, l|(m-1)\} = \{l \in \mathbb{N} | l < 5, l|4\} = \{1, 2, 4\}$.

From Theorem 9, $|LSH(P_5, C_6)| = 2n|L| = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$.

Therefore, the number of locally strong homomorphisms from P_5 to C_6 is 36.

Conclusion

In this independent study, we determined the number of locally strong homomorphisms from a path P_m to a cycle C_n for positive integers m and $n \geq 3$. We got the results as follows :

1. $|LSH(P_1, C_n)| = n$;
2. If $m > 1$ then $|LSH(P_m, C_n)| = 2n|L|$ where $L = \{l \in \mathbb{N} | l < n-1, l|(m-1)\}$.

Reference

Sr. Arworn^a, U. Knauer^b, S. Leeratanavalee^a, Locally strong endomorphisms of paths, Discrete Mathematics, 2008, 2525-2532.