การประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (เอกฐานที่ขอบเขตของปริพันธ์)

Numerical approximation of improper integral (singular at the limit of integration)

โดย

นางสาว อภิญญา แซ่ห่าน

รหัสประจำตัวนักศึกษา 620510583

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษา 2 ปีการศึกษา 2565

การประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (เอกฐานที่ขอบเขตของปริพันธ์)

Numerical approximation of improper integral (singular at the limit of integration)

อภิญญา แซ่ห่าน

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.มรกต เก็บเจริญ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.เอกชัย ทวินันท์)

วันที่ 23 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2566

การประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (เอกฐานที่ขอบเขตของปริพันธ์)

Numerical approximation of improper integral (singular at the limit of integration)

โดย

นางสาว อภิญญา แซ่ห่าน

รหัสประจำตัวนักศึกษา 620510583

งานการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษากระบวนวิชา 206499 (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาสาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้ศึกษาค้นคว้าอิสระในหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่องการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (เอกฐานที่ขอบเขตของปริพันธ์)

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.มรกต เก็บเจริญ ประธานกรรมการสอบในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระนี้ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ต่าง ๆ เกี่ยวกับการทำงานค้นคว้าอิสระ ติดตามความก้าวหน้าในการดำเนินการ รวมถึงการนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องของการค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.เอกชัย ทวินันท์ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำ รวมถึงตรวจสอบความถูกต้อง ในการค้นคว้าอิสระนี้ให้มีความสำเร็จให้ดียิ่งขึ้น

ทั้งนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้ความกรุณาอบรมสั่งสอนและมอบความรู้ทั้งใน และนอกตำราให้แก่ข้าพเจ้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้

และสุดท้ายนี้หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชม หรือเกิดประโยชน์ประการใด ข้าพเจ้าขอมอบคำชื่นชมและคุณความดีนั้นให้แก่ บิดา มารดา อาจารย์ที่ปรึกษา คณาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนข้าพระเจ้า หากมีข้อผิดพลาดประการใดที่อาจเกิดขึ้น ข้าพเจ้าขอน้อมรับแต่เพียงผู้เดียว และยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา และต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้

นางสาว อภิญญา แซ่ห่าน

หัวข้อ (ภาษาไทย) การประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (เอกฐานที่ขอบเขตของปริพันธ์)
(ภาษาอังกฤษ) Numerical approximation of improper integral (singular at the limit of integration)

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวอภิญญา แซ่ห่าน **รหัสนักศึกษา** 620510583
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.มรกต เก็บเจริญ
ชื่อกรรมการสอบ อาจารย์ ดร.เอกชัย ทวินันท์

บทคัดย่อ

ในการค้นคว้าอิสระนี้เราศึกษาวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ที่ฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์ไม่สามารถหาค่าได้ที่ขอบเขตของปริพันธ์ เราใช้การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ในการประมาณฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์โดยไม่ใช้จุดเอกฐานในการคำนวณ และ ในการศึกษานี้จะได้นำเสนอการพัฒนาสูตร ค่าคลาดเคลื่อนของการคำนวณ รวมถึงผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์

Abstract

In this independent study, we study the numerical integration for the improper integral which the integrand is/are singular at the limit point(s). We use the Lagrange’s polynomial approximate integrand at the point(s) exclude the singular point(s). The derivation of the formula, error approximation and numerical approximations are presented in this study.

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ(Introduction)

ในการหาค่าปริพันธ์โดยทั่วไปแล้ว เราสามารถใช้สูตรปิดของนิวตัน – โคตส์ (Newton - Cotes) ในการประมาณค่าได้ เช่น กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule), ซิมสป์สัน (Simpson's rules) และกฎของเวดเดิล (Weddle's rules) เป็นต้น ซึ่งสูตรเหล่านี้สามารถใช้ประมาณค่าปริพันธ์ที่หาค่าได้ทุกจุดบนฟังก์ชันและฟังก์ชันของปริพันธ์ที่หาค่าได้ที่ขอบเขตของปริพันธ์ แต่ไม่สามารถใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์ที่ไม่ตรงแบบหรือฟังก์ชันของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตของปริพันธ์ อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าเราสามารถใช้ สูตรเกาส์ควอดราเจอร์ (Gauss quadrature rules) ในการประมาณค่าปริพันธ์ที่ไม่ตรงแบบหรือฟังก์ชันของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตของปริพันธ์ได้ แต่สูตรนี้มีวิธีการประมาณค่าที่ยุ่งยากและซับซ้อน Fox [3] จึงได้ใช้สูตรพื้นฐานสำหรับวิธีเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบหรือฟังก์ชันของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตของปริพันธ์ โดยต่อมา Huq et al [4] ได้พัฒนาสูตรที่ง่ายต่อการประมาณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบหรือฟังก์ชันของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตของปริพันธ์ ในรูป

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1.1}$$

เมื่อ $f(x)$ มีจุด $x = a$ และ / หรือ $x = b$ ที่เป็นจุดเอกฐาน โดยสูตรนี้จะไม่นำขอบเขตของปริพันธ์ซึ่งเป็นจุดที่มีปัญหามาพิจารณาในการประมาณค่าปริพันธ์ และสามารถใช้สูตรนี้ได้โดยตรงสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์ที่ไม่ตรงแบบหรือฟังก์ชันของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตของปริพันธ์ ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าวิธีการประมาณค่าวิธีอื่น ๆ

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

2.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

พิจารณาการหาค่าปริพันธ์จำกัดขอบเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีความต่อเนื่องในช่วง $x\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \tag{2.1}$$

จะหาค่าได้เสมอ โดยทั่วไปปริพันธ์ที่ไม่ตรงแบบจะถูกแบ่งออกเป็นสามชนิด

ถ้า $a=-\infty$ หรือ $b=+\infty$ และฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องตลอดในช่วงของของปริพันธ์ เรียกปริพันธ์ (1) ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง** เช่น

$$\int_0^{+\infty} e^x dx,\ \int_{-\infty}^{3}\left(x^2+2x\right)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

ถ้า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ ที่ x บางค่าในช่วงปิด $[a,b]$ จะเรียกปริพันธ์ (2.1) ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง** เช่น

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx,\ \int_{1}^{3}\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx,\ \int_{0}^{1}\frac{1}{(x-1)}dx$$

และ ถ้า ลิมิตของของปริพันธ์ a เป็น $-\infty$ หรือ b เป็น $+\infty$ และ ลิมิตของ $f(x)$ เป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหาค่าไม่ได้ที่ x บางค่า ซึ่ง $a<x<b$ หรือที่ $x=a$ หรือ $x=b$ เรียกปริพันธ์ (2.1) ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม** เช่น

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2}dx,\ \int_{-4}^{+\infty}\frac{1}{x(x+4)}dx$$

สำหรับในบทนิยามต่อไปนี้จะทำให้เราสามารถหาค่าของปริพันธ์แบบต่าง ๆ ได้

<u>**บทนิยาม 2.1**</u>

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,+\infty)$ แล้ว สำหรับ $b>a$

   กำหนดให้ $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,b]$ แล้ว สำหรับ $a<b$

   กำหนดให้ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,+\infty)$ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

กำหนดให้ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

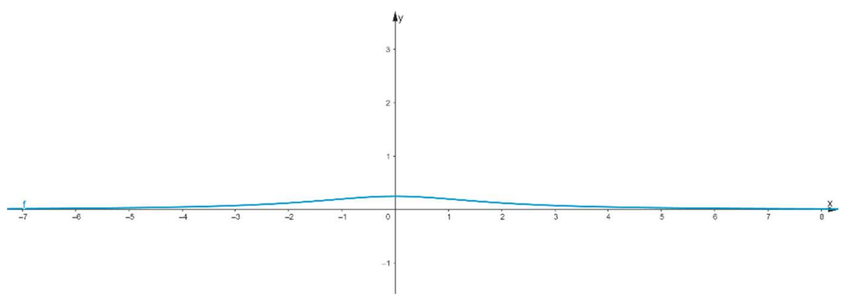
นั่นคือ สำหรับ $a < c < b$ จะกำหนด

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx \tag{2.2}$$

เรากล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบข้างต้น คอนเวอร์จ (converge) ก็ต่อเมื่อ ค่าลิมิตในบทนิยาม 2.1 หาค่าได้ และจะเรียก ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ไม่คอนเวอร์จว่า ไดเวอร์จ (diverge)

หมายเหตุ ถ้ามีลิมิตหนึ่งในสมการ (2.2) หาค่าไม่ได้ แล้ว $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ไดเวอร์จ

<u>ตัวอย่าง 2.2</u> จงหาค่าของ $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)}dx$



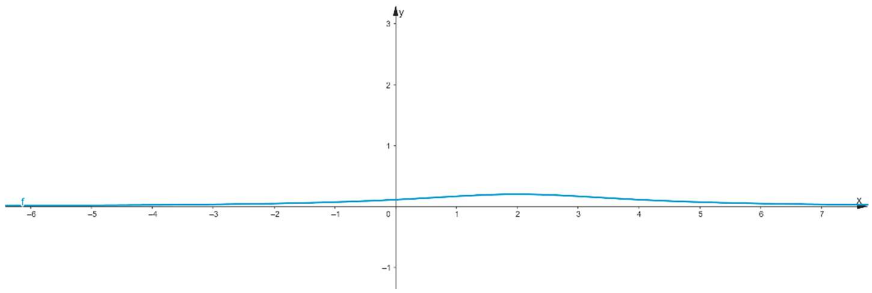
จากบทนิยาม 2.1 ข้อ 1 พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)}dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{(x^2+4)}dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\arctan\frac{b}{2} - \arctan 0\right] \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{4}$

นั่นคือ $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)}dx$ คอนเวอร์จ

ตัวอย่าง 2.3 จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-4x+9\right)}$



จากบทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เราสามารถเขียน

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-4x+9\right)} = \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{\left(x^2-4x+9\right)} + \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-4x+9\right)}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-4x+9\right)} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{\left(x-2\right)^2+5} + \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{\left(x-2\right)^2+5} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\arctan\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right]_a^2 + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\arctan\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right]_2^b \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\arctan 0 - \arctan\frac{a-2}{\sqrt{5}}\right] + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\arctan\frac{b-2}{\sqrt{5}} - \arctan 0\right] \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-4x+9\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

นั่นคือ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-4x+9\right)}$ คอนเวอร์จ

บทนิยาม 2.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $\left(a,b\right]$ และ $\lim_{x\to a^+} f\left(x\right) = +\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหาค่าไม่ได้ สำหรับ $a<c<b$ กำหนดปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f\left(x\right)dx \tag{2.3}$$

บทนิยาม 2.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $\left[a,b\right)$ และ $\lim_{x\to b^-} f\left(x\right) = +\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหาค่าไม่ได้ สำหรับ $a<d<b$ กำหนดปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to b^-}\int_a^d f(x)dx \tag{2.4}$$

<u>บทนิยาม 2.6</u> ให้ $a<r<b$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,r)\cup(r,b]$ และ $\lim_{x\to r} f(x)=+\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหาค่าไม่ได้ กำหนดปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$$

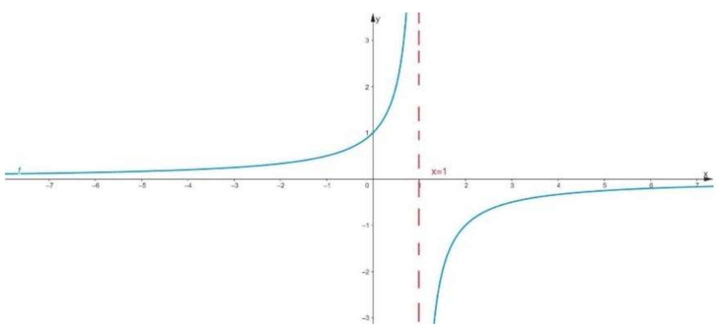
นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to r^-}\int_a^c f(x)dx + \lim_{d\to r^+}\int_d^b f(x)dx \tag{2.5}$$

เมื่อ $a<c<r<d<b$

ถ้าค่าลิมิต ในบทนิยาม 2.4 , 2.5 และ 2.6 หาค่าได้แล้ว จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองในนิยามนั้น คอนเวอร์จ และเรียก ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ไม่คอนเวอร์จว่า ไดเวอร์จ

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$



เนื่องจาก $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}=+\infty$ และ ฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0,1)$

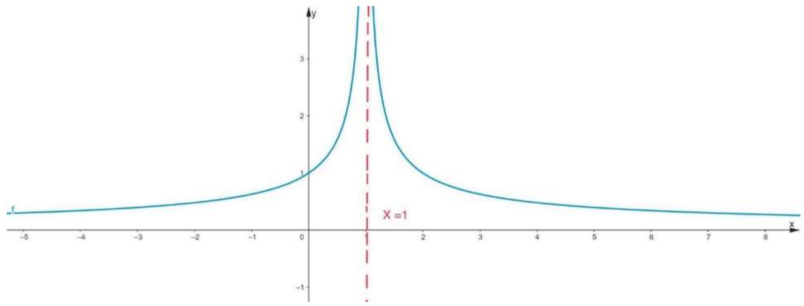
ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

จาก

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}dx \\ &= \lim_{b\to 1^-} -\left[\ln|1-x|\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-} -\left[\ln(1-b)-0\right] = +\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ ไดเวอร์จ

<u>ตัวอย่าง 2.8</u> จงหาค่าของ $\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$



เนื่องจาก $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ และ ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0,1)$ และ $(1,3]$

ดังนั้น $\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

จากบทนิยาม 2.6 ได้ว่า

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx &= \lim_{b\to 1^-} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx + \lim_{c\to 1^+} \int_{c}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx \\
&= \lim_{b\to 1^-} (3)\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_0^b + \lim_{c\to 1^+} (3)\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_c^3 \\
&= \lim_{b\to 1^-} (3)\left[(b-1)^{\frac{1}{3}} + 1\right] + \lim_{c\to 1^+} (3)\left[(2)^{\frac{1}{3}} - (c-1)^{\frac{1}{3}}\right] \\
&= 3 + 3\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx = 3 + 3\sqrt[3]{2}$

นั่นคือ $\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$ คอนเวอร์จ

สำหรับในหัวข้อต่อไปเราจะศึกษาการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม เพื่อนำไปใช้ในการประมาณฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์

2.2 การประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนามในรูปแบบลากรองจ์ (Lagrange's Interpolation Formula)

ฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์เป็นฟังก์ชันพหุนามรูปแบบหนึ่งที่นำไปใช้สำหรับประมาณค่าในช่วง สำหรับในที่นี้จะใช้ฟังก์ชันพหุนามในรูปแบบลากรองจ์ในการประมาณฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์

เพื่อความง่ายในการทำความเข้าใจ จะพิจารณาจากการประมาณค่าในช่วงของจุดพิกัดสองจุดคือ (x_0, f_0) และ (x_1, f_1) ซึ่ง $x_0 \neq x_1$ เราจะกล่าวว่า (x_0, f_0) และ (x_1, f_1) เป็นฟังชันพหุนามในรูปแบบของลากรองจ์ดีกรี 1 คือ

$$p_1(x) = f_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \ell_0^{(1)}(x) f_0 + \ell_1^{(1)}(x) f_1 \tag{2.6}$$

เมื่อ $\ell_i^{(1)}(x_j) = \begin{cases} 1 \ , i = j \\ 0 \ , i \neq j \end{cases}$

จากการพิจารณาฟังก์ชันพหุนามที่ประมาณค่าในช่วงของจุดพิกัดสามจุดคือ $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{2}$ เราจะกล่าวว่า $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{2}$ เป็นฟังชันพหุนามในรูปแบบของลากรองจ์ดีกรี 2 คือ

$$p_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

นั่นคือ

$$p_2(x) = \ell_0^{(2)}(x) f_0 + \ell_1^{(2)}(x) f_1 + \ell_2^{(2)}(x) f_2 \tag{2.7}$$

เมื่อ $\ell_i^{(2)}(x_j) = \begin{cases} 1 \ , i = j \\ 0 \ , i \neq j \end{cases}$

เมื่อเขียนในรูปทั่วไป ฟังก์ชันพหุนาม $p_N(x)$ ซึ่งมีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ N ที่ประมาณค่าในช่วง $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{N}$ สามารถเขียนได้เป็น

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{N} f_i \ell_i^{(N)}(x) \tag{2.8}$$

ซึ่งฟังก์ชัน $\ell_i^{(N)}(x)$ เป็นพหุนามดีกรี N และมีคุณสมบัติคือ

$$\ell_k^{(N)}(x_j) = \begin{cases} 1 \ , k = j \\ 0 \ , k \neq j \end{cases}$$

ที่จะทำให้ $p_N(x_i) = f_i$ สำหรับ $i = 0, 1, \ldots, N$ และกรณีนี้

$$\ell_k^{(N)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_N)}$$

จะได้ว่า

$$\ell_k^{(N)}(x) = \prod_{j=0}^{N} \left[\frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right], \ j \neq k \ , \ \ k = 0, 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

ซึ่งฟังก์ชันพหุนาม $\ell_k^{(N)}(x)$ นี้ เรียกว่า พหุนามรูปแบบของลากรองจ์ โดยที่ $\ell_k^{(N)}(x)$ จะมีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ N ก็ได้

ตัวอย่าง 2.9 จงหาฟังก์ชันพหุนามกำลังสามที่ประมาณค่าในช่วงของจุดพิกัดต่อไปนี้ $(2,1),(3,2),(-1,3)$ และ $(4,4)$ ในรูปแบบของลากรองจ์

เนื่องจากข้อมูลมีจุดพิกัด 4 จุด ดังนั้นต้องใช้ฟังก์ชันพหุนาม ในรูปแบบของลากรองจ์กำลังสาม หรือ $\ell_k^{(3)}(x)$ จะได้

$$\ell_0^{(3)}(x)=\frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{(2-3)(2+1)(2-4)} \qquad =\frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)$$

$$\ell_1^{(3)}(x)=\frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(3-2)(3+1)(3-4)} \qquad =-\frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4)$$

$$\ell_2^{(3)}(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)}=-\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\ell_3^{(3)}(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(4-2)(4-3)(4+1)} \qquad =\frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

นั่นคือ พหุนามที่ใช้ประมาณค่าในช่วงของจุดพิกัดที่กำหนดให้ คือ

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= (1)\left[\frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)\right]+(2)\left[-\frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4)\right] \\
&\quad +(3)\left[-\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)\right]+(4)\left[\frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)\right] \\
&= \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)-\frac{1}{2}(x-2)(x+1)(x-4) \\
&\quad -\frac{1}{20}(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{2}{5}(x-2)(x-3)(x+1) \\
&= \frac{8}{5}-\frac{16}{15}x+\frac{7}{20}x^2+\frac{1}{60}x^3
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$p_3(x)=\frac{8}{5}-\frac{16}{15}x+\frac{7}{20}x^2+\frac{1}{60}x^3$$

ในลำดับต่อไปจะศึกษาการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขในรูปแบบของสูตรปิดของนิวตัน – โคตส์ (Newton - Cotes formulas)

2.3 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

การหาค่าปริพันธ์แบบจำกัดขอบเขตเชิงตัวเลข (numerical definite integral) ที่อยู่ในรูปแบบ

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \text{ , โดยที่ } [a,b] \text{ เป็นช่วงจำกัด}$$

โดยทั่วไปแล้วการหาค่าปริพันธ์จำกัดขอบเขตเป็นสิ่งที่ยากหรือในบางครั้งอาจไม่สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันได้เลย จากความรู้วิชาแคลคูลัสพื้นฐานเราทราบว่าค่าปริพันธ์ I คือพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยฟังก์ชัน $f(x)$ และเส้นตรง $x=a$ และ $x=b$ สำหรับในการประมาณค่าในช่วง ดั้งนั้นถ้าเราสามารถประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม (polynomial interpolation) $p_n(x)$ แล้วเราจะสามารถประมาณค่า $I(f)$ ด้วยการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามได้โดยง่าย โดยหลักการที่กล่าวมาข้างต้นเรียกว่า สูตรนิวตัน - โคตส์

ในการคำนวณหาค่าของปริพันธ์จำกัดขอบเขตดังที่กล่าวมาข้างต้นนั้น เราสามารถหาค่าได้จากการประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ ด้วยฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ สำหรับ สูตรนิวตัน – โคตส์ จะมีสองส่วนด้วยกัน คือ สูตรปิดของนิวตัน – โคตส์ (Newton - Cotes’ closed formulas) และ สูตรปิดของนิวตัน – โคตส์ (Newton - Cotes’ opened formulas)

สำหรับในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ เราจะศึกษาสูตรปิดของนิวตัน – โคตส์ ดังต่อไปนี้

สูตรปิดของนิวตัน – โคตส์

กรณี $n=1$ หลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal rule)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]-\frac{h^3}{12}f^{(2)}(\xi), \quad x_0 \le \xi \le x_1 \tag{2.10}$$

กรณี $n=2$ หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน (Simpson’s rule)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad x_0 \le \xi \le x_2 \tag{2.11}$$

กรณี $n=3$ หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน $\frac{3}{8}$ (Simpson’s three eighths rule)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi), \quad x_0 \le \xi \le x_3 \tag{2.12}$$

<u>**ทฤษฎีบท 2.10**</u> **ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสูตรปิดนิวตัน – โคตส์**

ถ้าแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน ที่มีขนาดขั้นบันได $h=(b-a)/n$ และ $x_i = a+ih$, $i=0,1,2,\ldots,n$ ให้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=o}^{n} a_i f(x_i) \tag{2.13}$$

คือสูตรปิดนิวตัน - โคตส์ จะมี $\xi \in (a,b)$ ที่ทำให้

กรณีที่ n เป็นเลขคี่

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=o}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-n)dt \tag{2.14}$$

กรณีที่ n เป็นเลขคู่

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=o}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2 (t-1)\ldots(t-n)dt \tag{2.15}$$

ตัวอย่าง 2.11 จงใช้หลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูในการประมาณค่า $\int_0^3 x^2 e^x dx$ โดยแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน

พิจารณา เมื่อ $n = 2$ จะได้ $h = \frac{3}{2}, x_0 = 0, x_1 = 1.5, x_2 = 3$ ดังนั้น

$$\int_0^3 x^2 e^x dx \approx \frac{3}{4}\left[f(0) + f(3)\right] + \frac{3}{2} f(1.5) \approx 150.70307$$

ตัวอย่าง 2.12 จงใช้หลักเกณฑ์ของซิมป์สันในการประมาณค่า $\int_1^2 \frac{1}{1+2x} dx$ โดยแบ่งช่วง $[1,2]$ ออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน

พิจารณา เมื่อ $n = 4$ จะได้ $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ดังนั้น

$$\int_1^2 \frac{1}{1+2x} dx \approx \frac{1}{12}\left[f(1) + 4f\left(\frac{5}{4}\right) + 2f\left(\frac{6}{4}\right) + 4f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2)\right] = 0.2554$$

ตัวอย่าง 2.13 จงหาค่าปริพันธ์ $\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx$ โดยใช้สูตรปิดของนิวตัน - โคตส์ โดยที่ $n = 1,2,3$

เมื่อ $n = 1, h = \frac{1}{2}$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4}\left[e^{-1} + e^{-(3/2)^2}\right] = 0.1183197$$

เมื่อ $n = 2, h = \frac{1}{4}$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{12}\left[e^{-1} + 4e^{-(5/4)^2} + e^{-(3/2)^2}\right] = 0.1093104$$

เมื่อ $n = 3, h = \frac{1}{6}$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{16}\left[e^{-1} + 3e^{-(7/6)^2} + 3e^{-(4/3)^2} + e^{-(3/2)^2}\right] = 0.1093404$$

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

สำหรับในบทนี้ เราจะศึกษาการประมาณค่าปริพันธ์ที่ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง โดยเราใช้หลักการของนิวตัน - โคสต์ ซึ่งจะประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยฟังก์ชันพหุนามในรูปแบบของลากรองจ์ (Lagrange's formula) โดยจะไม่เลือกจุดที่ขอบเขตของปริพันธ์ในการประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนาม นั่นคือจะไม่เลือกจุดที่ทำให้ฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์หาค่าไม่ได้

ในการค้นคว้าอิสระนี้เราได้ทำการศึกษาผลงานวิจัยของ Huq et al [4] โดยจะแบ่งการศึกษาออกเป็น 3 กรณี คือ

1. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตทั้งสองด้าน (Both Singular Integral) เช่น $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$
2. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่าง (Lower Singular Integral) เช่น $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
3. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตบน (upper Singular Integral) เช่น $I=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx$

3.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตทั้งสองด้าน (Both Singular Integral)

ในหัวข้อนี้ พิจารณาปัญหา $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ $f(a)$ และ $f(b)$ หาค่าไม่ได้ โดยจะประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ พหุนามลากรองจ์ดีกรี 3

การประมาณฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์โดยใช้พหุนามลากรองจ์ดีกรี 3

เราจะพิจารณาการประมาณค่า $\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_0 และ x_{12} โดยแบ่งขอบเขตของปริพันธ์ออกเป็นสองช่วง คือ $\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx$ และ $\int_{x_6}^{x_{12}} f(x)\,dx$

อันดับแรกเราจะพิจารณาการประมาณค่า $\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_0 โดยใช้พหุนามลากรองจ์ที่ จุด x_0, x_1, x_4 และ x_6 เมื่อ $x_0=0,\ x_1=x_0+h$, $x_4=x_0+4h$ และ $x_6=x_0+6h$ เมื่อ $h=\frac{x_6-x_0}{6}$

$$f(x) \approx f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_4)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_4)(x_0-x_6)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_4)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_4)(x_1-x_6)}$$
$$+ f_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_6)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_6)} + f_6 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_4)}$$

เมื่อกำหนดให้ $f_i \approx f(x_i),\, i=0,1,4,6$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_6} \left[f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_4)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_4)(x_0-x_6)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_4)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_4)(x_1-x_6)} \right.$$
$$\left. + f_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_6)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_6)} + f_6 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_4)} \right] dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_6} \left[f_0 \frac{(x-h)(x-4h)(x-6h)}{(-h)(-4h)(-6h)} + f_1 \frac{(x)(x-4h)(x-6h)}{(h)(-3h)(-5h)} \right.$$
$$\left. + f_4 \frac{(x)(x-h)(x-6h)}{(4h)(3h)(-2h)} + f_6 \frac{(x)(x-h)(x-4h)}{(6h)(5h)(2h)} \right] dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_6} \left[\frac{f_0}{(-24h^3)} (x^3 - 11hx^2 + 34h^2x - 24h^3) + \frac{f_1}{15h^3} (x^3 - 10hx^2 + 24h^2x) \right.$$
$$\left. + \frac{f_4}{(-24h^3)} (x^3 - 7hx^2 + 6h^2x) + \frac{f_6}{60h^3} (x^3 - 6hx^2 + 4h^2x) \right] dx$$
$$= \left[\frac{f_0}{(-24h^3)} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{3}hx^3 + \frac{34}{2}h^2x^2 - 24h^3x \right) + \frac{f_1}{15h^3} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{10}{3}hx^3 + \frac{24}{2}h^2x^2 \right) \right.$$
$$\left. + \frac{f_4}{(-24h^3)} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}hx^3 + \frac{6}{2}h^2x^2 \right) + \frac{f_6}{60h^3} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{6}{3}hx^3 + \frac{4}{2}h^2x^2 \right) \right]_{x_0}^{x_6}$$
$$= \left[\frac{f_0}{(-24h^3)} \left(\frac{1}{4}(6h)^4 - \frac{11}{3}h(6h)^3 + \frac{34}{2}h^2(6h)^2 - 24h^3(6h) \right) + \frac{f_1}{15h^3} \left(\frac{1}{4}(6h)^4 - \frac{10}{3}h(6h)^3 + \frac{24}{2}h^2(6h)^2 \right) \right.$$
$$\left. + \frac{f_4}{(-24h^3)} \left(\frac{1}{4}(6h)^4 - \frac{7}{3}h(6h)^3 + \frac{6}{2}h^2(6h)^2 \right) + \frac{f_6}{60h^3} \left(\frac{1}{4}(6h)^4 - \frac{6}{3}h(6h)^3 + \frac{4}{2}h^2(6h)^2 \right) \right]$$
$$= 0 + \frac{f_1}{15}(36h) + \frac{f_4}{24}(72h) + \frac{f_6}{60}(36h)$$
$$= \left(\frac{12}{5}h \right) f_1 + (3h) f_4 + \left(\frac{3}{5} \right) f_6$$
$$= \frac{3}{5}h [4f_1 + 5f_4 + f_6]$$

นั่นคือ

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{3h}{5} [4f_1 + 5f_4 + f_6] \qquad (3.1)$$

เมื่อ $h=\dfrac{x_6-x_0}{6}$

ต่อไปเราจะพิจารณาการประมาณค่า $\int_{x_6}^{x_{12}} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_{12} โดยใช้พหุนามลากรองจ์ที่จุด x_6, x_8, x_{11} และ x_{12} เมื่อ $x_6=x_0+6h,\ x_8=x_0+8h, x_{11}=x_0+11h$ และ $x_{12}=x_0+12h$ เมื่อ $h=\dfrac{x_{12}-x_6}{6}$

$$f(x)\approx f_6\frac{(x-x_8)(x-x_{11})(x-x_{12})}{(x_6-x_8)(x_6-x_{11})(x_6-x_{12})}+f_8\frac{(x-x_6)(x-x_{11})(x-x_{12})}{(x_8-x_6)(x_8-x_{11})(x_8-x_{12})}$$
$$+f_{11}\frac{(x-x_6)(x-x_8)(x-x_{12})}{(x_{11}-x_6)(x_{11}-x_8)(x_{11}-x_{12})}+f_{12}\frac{(x-x_6)(x-x_8)(x-x_{11})}{(x_{12}-x_6)(x_{12}-x_8)(x_{12}-x_{11})}$$

เมื่อกำหนดให้ $f_i\approx f(x_i),\ i=6,8,11,12$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{x_6}^{x_{12}} f(x)dx\approx\int_{x_6}^{x_{12}}\left[f_6\frac{(x-x_8)(x-x_{11})(x-x_{12})}{(x_6-x_8)(x_6-x_{11})(x_6-x_{12})}+f_8\frac{(x-x_6)(x-x_{11})(x-x_{12})}{(x_8-x_6)(x_8-x_{11})(x_8-x_{12})}\right.$$
$$\left.+f_{11}\frac{(x-x_6)(x-x_8)(x-x_{12})}{(x_{11}-x_6)(x_{11}-x_8)(x_{11}-x_{12})}+f_{12}\frac{(x-x_6)(x-x_8)(x-x_{11})}{(x_{12}-x_6)(x_{12}-x_8)(x_{12}-x_{11})}\right]dx$$
$$=\int_{x_6}^{x_{12}}\left[f_6\frac{(x-8h)(x-11h)(x-12h)}{(-2h)(-5h)(-6h)}+f_8\frac{(x-6h)(x-11h)(x-12h)}{(2h)(-3h)(-4h)}\right.$$
$$\left.+f_{11}\frac{(x-6h)(x-8h)(x-12h)}{(5h)(3h)(-h)}+f_{12}\frac{(x-6h)(x-8h)(x-11h)}{(6h)(4h)(h)}\right]dx$$
$$=\int_{x_6}^{x_{12}}\left[\frac{f_6}{(-60h^3)}\left(x^3-31hx^2+316h^2x-1056h^3\right)+\frac{f_8}{24h^3}\left(x^3-29hx^2+270h^2x-792h^3\right)\right.$$
$$\left.+\frac{f_{11}}{(-15h^3)}\left(x^3-26hx^2+216h^2x-576h^3\right)+\frac{f_{12}}{24h^3}\left(x^3-25hx^2+202h^2x-528h^3\right)\right]dx$$
$$=\left[\frac{f_6}{(-60h^3)}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{31}{3}hx^3+\frac{316}{2}h^2x^2-576h^3x\right)+\frac{f_8}{24h^3}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{29}{3}hx^3+\frac{270}{2}h^2x^2-792h^3x\right)\right.$$
$$\left.+\frac{f_{11}}{(-15h^3)}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{26}{3}hx^3+\frac{216}{2}h^2x^2-576h^3x\right)+\frac{f_{12}}{24h^3}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{25}{3}hx^3+\frac{202}{2}h^2x^2-528h^3x\right)\right]_{x_6}^{x_{12}}$$
$$=\left[\frac{f_6}{(-60h^3)}\left(\frac{1}{4}(12h)^4-\frac{31}{3}h(12h)^3+\frac{316}{2}h^2(12h)^2-576h^3(12h)\right)\right.$$
$$+\frac{f_8}{24h^3}\left(\frac{1}{4}(12h)^4-\frac{29}{3}h(12h)^3+\frac{270}{2}h^2(12h)^2-792h^3(12h)\right)$$

$$+\frac{f_{11}}{\left(-15h^{3}\right)}\left(\frac{1}{4}(12h)^{4}-\frac{26}{3}h(12h)^{3}+\frac{216}{2}h^{2}(12h)^{2}-576h^{3}(12h)\right)$$

$$+\frac{f_{12}}{24h^{3}}\left(\frac{1}{4}(12h)^{4}-\frac{25}{3}h(12h)^{3}+\frac{202}{2}h^{2}(12h)^{2}-528h^{3}(12h)\right)\Bigg]$$

$$=\frac{f_{6}}{(-60)}(-36h)+\frac{f_{8}}{24}(72h)+\frac{f_{11}}{(-15)}(-36h)+0$$

$$=\left(\frac{3}{5}h\right)f_{6}+(3h)f_{8}+\left(\frac{12}{5}\right)f_{11}$$

$$=\frac{3}{5}h\left[f_{6}+5f_{8}+4f_{11}\right]$$

นั่นคือ

$$\int_{x_6}^{x_{12}} f(x)dx \approx \frac{3h}{5}\left[f_{6}+5f_{8}+4f_{11}\right] \tag{3.2}$$

เมื่อ $h=\dfrac{x_{12}-x_{6}}{6}$

ต่อไปเราจะนำสมการ (3.1) และ (3.2) มารวมกันทำให้ได้สมการดังนี้

พิจารณา

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_{6}} f(x)dx+\int_{x_6}^{x_{12}} f(x)dx$$

$$=\frac{3}{5}h\left[4f_{1}+5f_{4}+y_{6}\right]+\frac{3}{5}h\left[f_{6}+5f_{8}+4f_{11}\right]$$

$$=\frac{3}{5}h\left[4f_{1}+5f_{4}+f_{6}+f_{6}+5f_{8}+4f_{11}\right]$$

$$=\frac{3}{5}h\left[4f_{1}+5f_{4}+2f_{6}+5f_{8}+4f_{11}\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)dx \approx \frac{3h}{5}\left[4f_{1}+5f_{4}+2f_{6}+5f_{8}+4f_{11}\right] \tag{3.3}$$

เมื่อ $h=\dfrac{x_{12}-x_{0}}{12}$

รูปแบบทั่วไปของ (3.3) ในช่วง $[a,b]$ คือ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{3h}{5}\Big[4\left(f_{1}+f_{13}+\ldots+f_{12M-11}\right)+5\left(f_{4}+y_{16}+\ldots+f_{12M-8}\right)+2\left(f_{6}+f_{18}+\ldots+f_{12M-6}\right)$$
$$+5\left(f_{8}+f_{20}+\ldots+f_{12M-4}\right)+4\left(f_{11}+y_{23}+\ldots+f_{12M-1}\right)\Big] \tag{3.4}$$

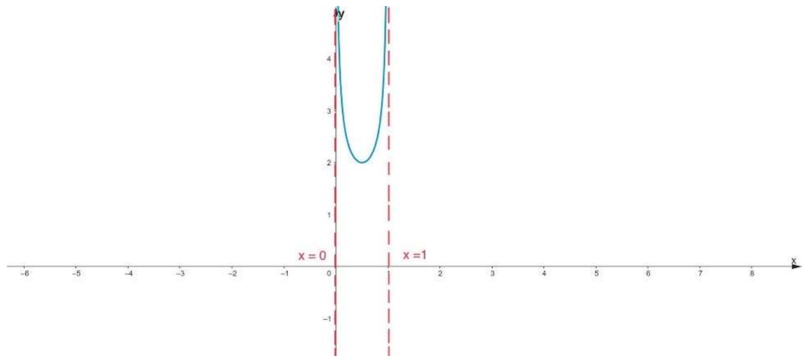
เมื่อ $h=\dfrac{a-b}{12n}$ และ $n=1,2,3,\ldots,M$

ตัวอย่างการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์

พิจารณา

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \tag{3.5}$$

จากสมการ (3.5) จะได้กราฟดังนี้



จากกราฟข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ และ $x=1$ เมื่อเราใช้สมการ (3.4) ในการประมาณค่าสมการ (3.5) จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น $\pi \approx 3.14159$

สมการ (3.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 2.94705$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 3.00398$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 3.04427$

นอกจากสมการ (3.4) จะสามารถประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตทั้งสองด้านของปริพันธ์ได้แล้ว ยังสามารถใช้ในการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตล่างของปริพันธ์และการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตบนของปริพันธ์ได้อีกด้วย โดยเราจะแสดงตัวอย่างการประมาณค่าในหัวข้อถัดไป

3.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่าง (Lower Singular Integral)

ในหัวข้อนี้ พิจารณาปัญหา $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ $f(a)$ หาค่าไม่ได้ โดยจะประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ พหุนามลากรองจ์ดีกรี 2 , ดีกรี 4

การประมาณฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์โดยใช้พหุนามลากรองจ์ดีกรี 2

พิจารณาการประมาณ $\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_0 โดยใช้พหุนามลากรองจ์ที่

จุด x_0, x_1, x_3 เมื่อ $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h$ และ $x_3 = x_0 + 3h$ เมื่อ $h = \frac{x_3 - x_0}{3}$

$$f(x) \approx f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)}$$

เมื่อกำหนดให้ $f_i \approx f(x_i)$, $i = 0,1,3$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_3} \left[f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)} \right] dx \\
&= \int_{x_0}^{x_3} \left[f_0 \frac{(x-h)(x-3h)}{(-h)(-3h)} + f_1 \frac{(x)(x-3h)}{(h)(-2h)} + f_3 \frac{(x)(x-h)}{(3h)(2h)} \right] dx \\
&= \int_{x_0}^{x_3} \left[\frac{f_0}{3h^2}\left(x^2 - 4hx + 3h^2\right) + \frac{f_1}{\left(-2h^2\right)}\left(x^2 - 3hx\right) + \frac{f_3}{6h^2}\left(x^2 - hx\right) \right] dx \\
&= \left[\frac{f_0}{3h^2}\left(\frac{1}{3}x^3 - 2hx^2 + 3h^2 x\right) + \frac{f_1}{\left(-2h^2\right)}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}hx^2\right) + \frac{f_3}{6h^2}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}hx^2\right) \right]_{x_0}^{x_3} \\
&= \frac{f_0}{3h^2}\left[\frac{1}{3}(3h)^3 - 2h(3h)^2 + 3h^2(3h)\right] + \frac{f_1}{\left(-2h^2\right)}\left[\frac{1}{3}(3h)^3 - \frac{3}{2}h(3h)^2\right] + \frac{f_3}{6h^2}\left[\frac{1}{3}(3h)^3 - \frac{1}{2}h(3h)^2\right] \\
&= \frac{f_0}{3h^2}\left(9h^3 - 18h^3 + 9h^3\right) + \frac{f_1}{\left(-2h^2\right)}\left(9h^3 - \frac{27}{2}h^3\right) + \frac{f_3}{6h^2}\left(9h^3 - \frac{9}{2}h^3\right) \\
&= 0 + \frac{f_1}{\left(-2h^2\right)}\left(-\frac{9}{2}h^3\right) + \frac{f_3}{6h^2}\left(\frac{9}{2}h^3\right) \\
&= \left(\frac{9}{4}h\right) f_1 + \left(\frac{3}{4}h\right) f_3 \\
&= \frac{3}{4}h\left[3f_1 + f_3\right]
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx \approx \frac{3h}{4}\left[3f_1 + f_3\right] \qquad (3.6)$$

เมื่อ $h = \frac{x_3 - x_0}{3}$

รูปแบบทั่วไปของ (3.6) ในช่วง $[a,b]$ คือ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{4}\left[3\left(f_1 + f_4 + f_7 + \ldots + f_{3M-2}\right) + \left(f_3 + f_6 + f_9 + \ldots + f_{3M}\right)\right] \qquad (3.7)$$

เมื่อ $h = \frac{a-b}{3n}$ และ $n = 1,2,3,\ldots,M$

ค่าคลาดเคลื่อนของสูตร

จากการพิจารณาการประมาณค่า $\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_0 เมื่อ $x_0=0$, $x_1=x_0+h$ และ $x_3=x_0+3h$ เราจะหาค่าคลาดเคลื่อนของสูตร (3.6) โดยกำหนดให้

$\int_{x_0}^{x_3} \tilde{f}(x) \approx \frac{3h}{4}\left[3f_1+f_3\right]$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx-\int_{x_0}^{x_3}\tilde{f}(x) &\le \int_{x_0}^{x_3}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{3!}\right]dx \\
&= \int_{x_0}^{x_3}\left[\frac{(x)(x-h)(x-3h)}{3!}\right]dx \\
&= \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_3}\left(x^3-4hx^2+3h^2x\right)dx \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}hx^3+\frac{3}{2}h^2x^2\right]_{x_0}^{x_3} \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}(3h)^4-\frac{4}{3}h(3h)^3+\frac{3}{2}h^2(3h)^2\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{81h^4-144h^4+54h^4}{4}\right] \\
&= -\frac{3}{8}h^4F^{(3)}(\xi)
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx-\int_{x_0}^{x_3}\tilde{f}(x) \le -\frac{3}{8}h^4F^{(3)}(\xi) \tag{3.8}$$

สำหรับทุก $x\in[x_0,x_3]$

การประมาณฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์โดยใช้พหุนามลากรองจ์ดีกรี 4

พิจารณาการประมาณ $\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_0 โดยใช้พหุนามลากรองจ์ที่จุด x_0,x_1,x_2,x_3 และ x_4 เมื่อ $x_0=0$, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+5h$, $x_3=x_0+11h$ และ $x_4=x_0+15h$ เมื่อ $h=\frac{x_4-x_0}{15}$

$$f(x)\approx f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}+f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$
$$+f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+f_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$
$$+f_4\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

เมื่อกำหนดให้ $f_i\approx f(x_i)$, $i=0,1,2,3,4$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{x_0}^{x_4}f(x)dx\approx\int_{x_0}^{x_4}\left[f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}+f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}\right.$$
$$+f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+f_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$
$$\left.+f_4\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\right]dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_4}\left[f_0\frac{(x-h)(x-5h)(x-11h)(x-15h)}{(-h)(-5h)(-11h)(-15h)}+f_1\frac{(x)(x-5h)(x-11h)(x-15h)}{(h)(-4h)(-10h)(-14h)}\right.$$
$$+f_2\frac{(x)(x-h)(x-11h)(x-15h)}{(5h)(4h)(-6h)(-10h)}+f_3\frac{(x)(x-h)(x-5h)(x-15h)}{(11h)(10h)(6h)(-4h)}$$
$$\left.+f_4\frac{(x)(x-h)(x-5h)(x-11h)}{(15h)(14h)(10h)(4h)}\right]dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_4}\left[\frac{f_0}{825h^4}\left(x^4-32hx^3+326h^2x^2-1120h^3x+825h^4\right)+\frac{f_1}{(-560h^4)}\left(x^4-31hx^3+295h^2x^2-825h^3x\right)\right.$$
$$+\frac{f_2}{1200h^4}\left(x^4-27hx^3+191h^2x^2-165h^3x\right)+\frac{f_3}{(-2640)h^4}\left(x^4-21hx^3+95h^2x^2-75h^3x\right)$$
$$\left.+\frac{f_4}{8400h^4}\left(x^4-17hx^3+71h^2x^2-55h^3x\right)\right]dx$$
$$=\left[\frac{f_0}{825h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-8hx^4+\frac{326}{3}h^2x^3-560h^3x^2+825h^4x\right)\right.$$
$$+\frac{f_1}{(-560h^4)}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{31}{4}hx^4+\frac{295}{3}h^2x^3-\frac{825}{2}h^3x^2\right)$$
$$+\frac{f_2}{1200h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{27}{4}hx^4+\frac{191}{3}h^2x^3-\frac{165}{2}h^3x^2\right)$$
$$+\frac{f_3}{(-2640)h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{21}{4}hx^4+\frac{95}{3}h^2x^3-\frac{75}{2}h^3x^2\right)$$
$$\left.+\frac{f_4}{8400h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{17}{4}hx^4+\frac{71}{3}h^2x^3-\frac{55}{2}h^3x^2\right)\right]_{x_0}^{x_4}$$

$$=\left[\frac{f_0}{825h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-8h(15h)^4+\frac{326}{3}h^2(15h)^3-560h^3(15h)^2+825h^4(15h)\right)\right.$$
$$+\frac{f_1}{(-560h^4)}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{31}{4}h(15h)^4+\frac{295}{3}h^2(15h)^3-\frac{825}{2}h^3(15h)^2\right)$$
$$+\frac{f_2}{1200h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{27}{4}h(15h)^4+\frac{191}{3}h^2(15h)^3-\frac{165}{2}h^3(15h)^2\right)$$
$$+\frac{f_3}{(-2640)h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{21}{4}h(15h)^4+\frac{95}{3}h^2(15h)^3-\frac{75}{2}h^3(15h)^2\right)$$
$$\left.+\frac{f_4}{8400h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{17}{4}h(15h)^4+\frac{71}{3}h^2(15h)^3-\frac{55}{2}h^3(15h)^2\right)\right]$$
$$=\frac{f_1}{(-560h^4)}\left(-\frac{5625}{4}h^5\right)+\frac{f_2}{1200h^4}\left(\frac{25875}{4}h^5\right)+\frac{f_3}{(-2640h^4)}\left(-\frac{61875}{4}h^5\right)+\frac{f_4}{8400h^4}\left(\frac{41625}{4}h^5\right)$$
$$=\left(\frac{1125}{448}h\right)f_1+\left(\frac{2415}{448}h\right)f_2+\left(\frac{2625}{448}h\right)f_3+\left(\frac{555}{448}h\right)f_4$$
$$=\frac{15}{448}h\left[75f_1+161f_2+175f_3+37f_4\right]$$

นั่นคือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{15h}{448}\left[75f_1+161f_2+175f_3+37f_4\right] \tag{3.9}$$

เมื่อ $h=\dfrac{x_4-x_0}{15}$

รูปแบบทั่วไปของ (3.9) ในช่วง $[a,b]$ คือ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{15h}{448}\left[75\left(f_1+f_5+\ldots+f_{4M-3}\right)+161\left(f_2+f_6+\ldots+f_{4M-2}\right)\right.$$
$$\left.+175\left(f_3+f_7+\ldots+f_{4M-1}\right)+37\left(f_4+f_8+\ldots+f_{4M}\right)\right] \tag{3.10}$$

เมื่อ $h=\dfrac{a-b}{15n}$ และ $n=1,2,3,\ldots,M$

ค่าคลาดเคลื่อนของสูตร

จากการพิจารณาการประมาณค่า $\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_0 เมื่อ $x_0=0$, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+5h$, $x_3=x_0+11h$ และ $x_4=x_0+15h$ เราจะหาค่าคลาดเคลื่อนของสูตร (3.9) โดยกำหนดให้ $\int_{x_0}^{x_4}\tilde{f}(x)\approx\frac{15h}{448}\left[75f_1+161f_2+175f_3+37f_4\right]$

พิจารณา

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_4} \tilde{f}(x) \le \int_{x_0}^{x_4} \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{5!} \right] dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_4} \left[\frac{(x)(x-h)(x-5h)(x-11h)(x-15h)}{5!} \right] dx$$

$$= \frac{1}{120} \int_{x_0}^{x_4} \left(x^5 - 32hx^4 + 326h^2x^3 - 1120h^3x^2 + 825h^4x \right) dx$$

$$= \frac{1}{120} \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{32}{5}hx^5 + \frac{326}{4}h^2x^4 - \frac{1120}{3}h^3x^3 + \frac{825}{2}h^4x^2 \right]_{x_0}^{x_4}$$

$$= \frac{1}{120} \left[\frac{1}{6}(15h)^6 - \frac{32}{5}h(15h)^5 + \frac{326}{4}h^2(15h)^4 - \frac{1120}{3}h^3(15h)^3 + \frac{825}{2}h^4(15h)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{120} \left[\frac{11390625}{6}h^6 - 4860000h^6 + \frac{16503750}{4}h^6 - 1260000h^6 + \frac{185625}{2}h^6 \right]$$

$$= \frac{1}{120} \left[\frac{-33750h^6}{12} \right]$$

$$= -\frac{375}{16} h^6 F^{(5)}(\xi)$$

นั่นคือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_4} \tilde{f}(x) \le -\frac{375}{16} h^6 F^{(5)}(\xi) \qquad (3.11)$$

สำหรับทุก $x \in [x_0, x_4]$

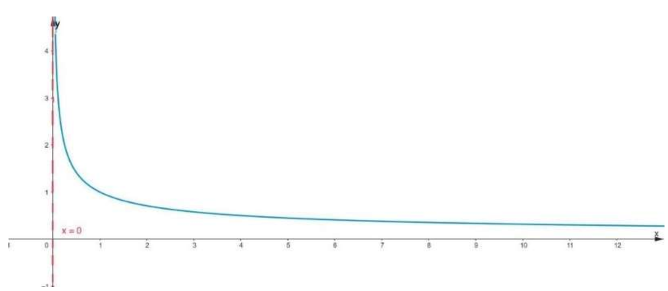
ต่อไปเราจะศึกษาผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ โดยเราจะนำสมการ (3.4), (3.7) และ (3.10) มาใช้ในการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตล่างของปริพันธ์

ตัวอย่างการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์

พิจารณา

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \qquad (3.12)$$

จากสมการ (3.12) จะได้กราฟดังนี้



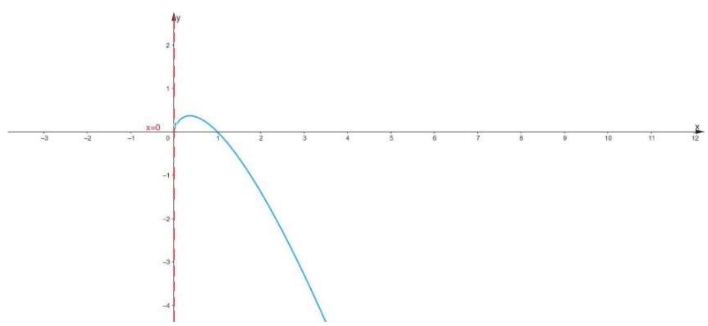
จากกราฟข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราใช้สมการ (3.4), (3.7) และ (3.10) ในการประมาณค่าสมการ (3.12) จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 2.00000

สมการ (3.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 1.90265$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 1.93117$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 1.95133$
สมการ (3.7)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 1.89856$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 1.92827$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 1.94928$
สมการ (3.10)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 1.9048$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 1.93267$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 1.95239$

พิจารณา

$$I=-\int_0^1 x\ln(x)dx \tag{3.13}$$

จากสมการ (3.13) จะได้กราฟดังนี้



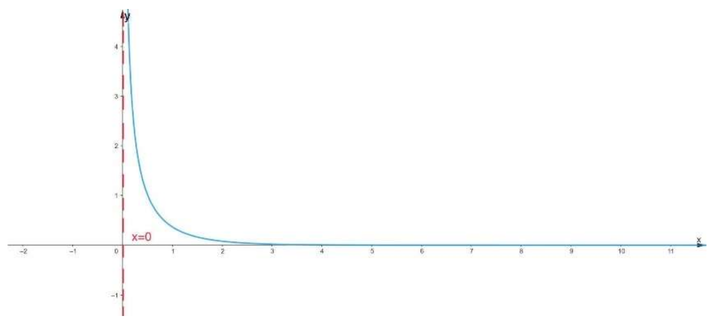
จากกราฟข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราใช้สมการ (3.4), (3.7) และ (3.10) ในการประมาณค่าสมการ (3.13) จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 0.25000

สมการ (3.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 0.25005$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 0.25001$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 0.25000$
สมการ (3.7)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 0.25007$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 0.25002$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 0.25001$
สมการ (3.10)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 0.25004$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 0.25001$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 0.25000$

พิจารณา

$$I=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{\frac{3}{4}}}dx \tag{3.14}$$

จากสมการ (3.14) จะได้กราฟดังนี้



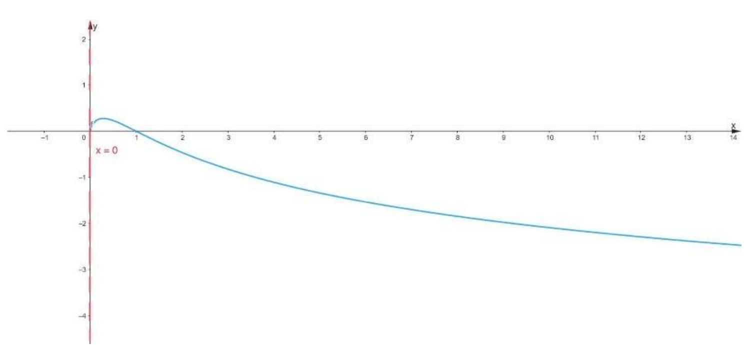
จากกราฟข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราใช้สมการ (3.4), (3.7) และ (3.10) ในการประมาณค่าสมการ (3.14) จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 2.96000

สมการ (3.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 2.42924$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 2.58058$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 2.70774$
สมการ (3.7)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 2.41189$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 2.56602$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 2.69551$
สมการ (3.10)	$N\left(\frac{1}{60}\right)\approx 2.43901$	$N\left(\frac{1}{120}\right)\approx 2.58879$	$N\left(\frac{1}{240}\right)\approx 2.71464$

พิจารณา

$$I=-\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x)}dx \tag{3.15}$$

จากสมการ (3.15) จะได้กราฟดังนี้



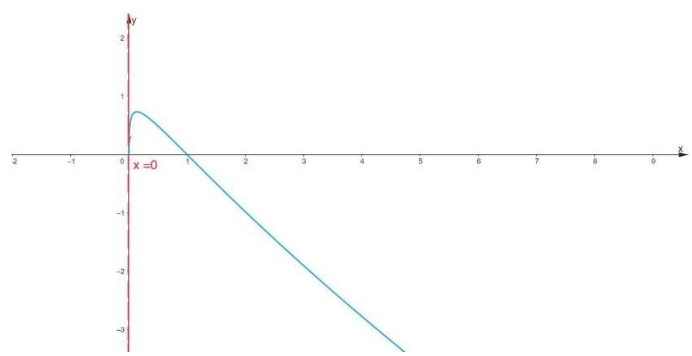
จากกราฟข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราใช้สมการ (3.4), (3.7) และ (3.10) ในการประมาณค่าสมการ (3.15) จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 1.82247

สมการ (3.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.17758$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.17755$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.17754$
สมการ (3.7)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.17761$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.17755$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.17754$
สมการ (3.10)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.17758$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.17754$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.17754$

พิจารณา

$$I = -\int_0^1 \sqrt{x}\ln\left(x\right)dx \tag{3.16}$$

จากสมการ (3.16) จะได้กราฟดังนี้



จากกราฟข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราใช้สมการ (3.4), (3.7) และ (3.10) ในการประมาณค่าสมการ (3.16) จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 0.44444

สมการ (3.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.44523$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.44476$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.44457$
สมการ (3.7)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.44537$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.44482$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.44459$
สมการ (3.10)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.44518$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.44474$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.44456$

3.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตบน (Upper Singular Integral)

ในหัวข้อนี้ พิจารณาปัญหา $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ $f(b)$ หาค่าไม่ได้ โดยจะประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ พหุนามลากรองจ์ดีกรีดีกรี 4

การประมาณฟังก์ชันสำหรับการหาปริพันธ์โดยใช้พหุนามลากรองจ์ดีกรี 4

พิจารณาการประมาณ $\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_4 โดยใช้พหุนามลากรองจ์ ที่จุด x_0, x_1, x_2, x_3 และ x_4 เมื่อ $x_0 = 0,\, x_1 = x_0 + 4h,\, x_2 = x_0 + 10h,\, x_3 = x_0 + 14h$ และ $x_4 = x_0 + 15h$ เมื่อ $h = \dfrac{x_4 - x_0}{15}$

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx{}& f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\
&+ f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\
&+ f_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}
\end{aligned}
$$

เมื่อกำหนดให้ $f_i \approx f(x_i)\,,\, i = 0,1,2,3,4$ ดังนั้นจะได้ว่า

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx{}& \int_{x_0}^{x_4} \Bigg[f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\
&+ f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\
&+ f_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \Bigg] dx \\
={}& \int_{x_0}^{x_4} \Bigg[f_0 \frac{(x-4h)(x-10h)(x-14h)(x-15h)}{(-4h)(-10h)(-14h)(-15h)} + f_1 \frac{(x)(x-10h)(x-14h)(x-15h)}{(4h)(-6h)(-10h)(-14h)} \\
&+ f_2 \frac{(x)(x-4h)(x-14h)(x-15h)}{(10h)(6h)(-4h)(-5h)} + f_3 \frac{(x)(x-4h)(x-10h)(x-15h)}{(14h)(10h)(4h)(-h)} \\
&+ f_4 \frac{(x)(x-4h)(x-10h)(x-14h)}{(15h)(11h)(5h)(h)} \Bigg] dx \\
={}& \int_{x_0}^{x_4} \Bigg[\frac{f_0}{8400h^4} \left(x^4 - 43hx^3 + 656h^2x^2 - 4100h^3x + 8400h^4 \right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{f_1}{(-2640h^4)}\left(x^4-39hx^3+500h^2x^2-210h^3x\right)$$
$$+\frac{f_2}{1200h^4}\left(x^4-33hx^3+326h^2x^2-840h^3x\right)$$
$$+\frac{f_3}{(-560)h^4}\left(x^4-29hx^3+250h^2x^2-600h^3x\right)$$
$$\left.+\frac{f_4}{825h^4}\left(x^4-28hx^3+236h^2x^2-560h^3x\right)\right]dx$$
$$=\left[\frac{f_0}{8400h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{43}{4}hx^4+\frac{656}{3}h^2x^3-\frac{4100}{2}h^3x^2+8400h^4x\right)\right.$$
$$+\frac{f_1}{(-2640h^4)}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{39}{4}hx^4+\frac{500}{3}h^2x^3-\frac{210}{2}h^3x^2\right)$$
$$+\frac{f_2}{1200h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{33}{4}hx^4+\frac{326}{3}h^2x^3-\frac{840}{2}h^3x^2\right)$$
$$+\frac{f_3}{(-560)h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{29}{4}hx^4+\frac{250}{3}h^2x^3-\frac{600}{2}h^3x^2\right)$$
$$\left.+\frac{f_4}{825h^4}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{28}{4}hx^4+\frac{236}{3}h^2x^3-\frac{560}{2}h^3x^2\right)\right]_{x_0}^{x_4}$$
$$=\left[\frac{f_0}{8400h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{43}{4}h(15h)^4+\frac{656}{3}h^2(15h)^3-\frac{4100}{2}h^3(15h)^2+8400h^4(15h)\right)\right.$$
$$+\frac{f_1}{(-2640h^4)}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{39}{4}h(15h)^4+\frac{500}{3}h^2(15h)^3-\frac{210}{2}h^3(15h)^2\right)$$
$$+\frac{f_2}{1200h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{33}{4}h(15h)^4+\frac{326}{3}h^2(15h)^3-\frac{840}{2}h^3(15h)^2\right)$$
$$+\frac{f_3}{(-560)h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{29}{4}h(15h)^4+\frac{250}{3}h^2(15h)^3-\frac{600}{2}h^3(15h)^2\right)$$
$$\left.+\frac{f_4}{825h^4}\left(\frac{1}{5}(15h)^5-\frac{28}{4}h(15h)^4+\frac{236}{3}h^2(15h)^3-\frac{560}{2}h^3(15h)^2\right)\right]$$
$$=\frac{f_0}{8400h^4}\left(\frac{41625}{4}h^5\right)+\frac{f_1}{(-2640h^4)}\left(-\frac{61875}{4}h^5\right)+\frac{f_2}{1200h^4}\left(\frac{25875}{4}h^5\right)+\frac{f_3}{(-560h^4)}\left(-\frac{5625}{4}h^5\right)$$
$$=\left(\frac{555}{448}h\right)f_0+\left(\frac{2625}{448}h\right)f_1+\left(\frac{2415}{448}h\right)f_2+\left(\frac{1125}{448}h\right)f_3$$
$$=\frac{15}{448}h\left[37f_0+175f_1+161f_2+75f_3\right]$$

นั่นคือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{15h}{448}\left[37f_0+175f_1+161f_2+75f_3\right] \qquad (3.17)$$

เมื่อ $h=\frac{x_4-x_0}{15}$

รูปแบบทั่วไปของ (3.17) ในช่วง $[a,b]$ คือ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{15h}{448}\Big[37\left(f_0+f_4+\ldots+f_{4M-4}\right)+175\left(f_1+f_5+\ldots+f_{4M-3}\right)$$
$$+161\left(f_2+f_6+\ldots+f_{4M-2}\right)+75\left(f_3+f_7+\ldots+f_{4M-1}\right)\Big] \qquad (3.18)$$

เมื่อ $h=\dfrac{a-b}{15n}$ และ $n=1,2,3,\ldots,M$

ค่าคลาดเคลื่อนของสูตร

จากการพิจารณาการประมาณค่า $\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจุดเอกฐานที่ x_4 เมื่อ $x_0=0,$ $x_1=x_0+4h,\ x_2=x_0+10h,\ x_3=x_0+14h$ และ $x_4=x_0+15h$ เราจะหาค่าคลาดเคลื่อนของสูตร (3.17) โดยกำหนดให้ $\int_{x_0}^{x_4}\tilde{f}(x)\approx\dfrac{15h}{448}\left[37f_0+175f_1+161f_2+75f_3\right]$

พิจารณา

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx-\int_{x_0}^{x_4}\tilde{f}(x)\le\int_{x_0}^{x_4}\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{5!}\right|dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_4}\left|\frac{(x)(x-4h)(x-10h)(x-14h)(x-15h)}{5!}\right|dx$$
$$=\frac{1}{120}\int_{x_0}^{x_4}\left(x^5-43hx^4+656h^2x^3-4100h^3x^2+8400h^4x\right)dx$$
$$=\frac{1}{120}\left[\frac{1}{6}x^6-\frac{43}{5}hx^5+\frac{656}{4}h^2x^4-\frac{4100}{3}h^3x^3+\frac{8400}{2}h^4x^2\right]_{x_0}^{x_4}$$
$$=\frac{1}{120}\left[\frac{1}{6}(15h)^6-\frac{43}{5}h(15h)^5+\frac{656}{4}h^2(15h)^4-\frac{4100}{3}h^3(15h)^3+\frac{8400}{2}h^4(15h)^2\right]$$
$$=\frac{1}{120}\left[\frac{11390625}{6}h^6-6530625h^6+8302500h^6-4612500h^6+945000h^6\right]$$
$$=\frac{1}{120}\left[\frac{16875h^6}{6}\right]$$
$$=\frac{375}{16}h^6F^{(5)}(\xi)$$

นั่นคือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx-\int_{x_0}^{x_4}\tilde{f}(x)\le\frac{375}{16}h^6F^{(5)}(\xi) \qquad (3.19)$$

สำหรับทุก $x\in[x_0,x_4]$

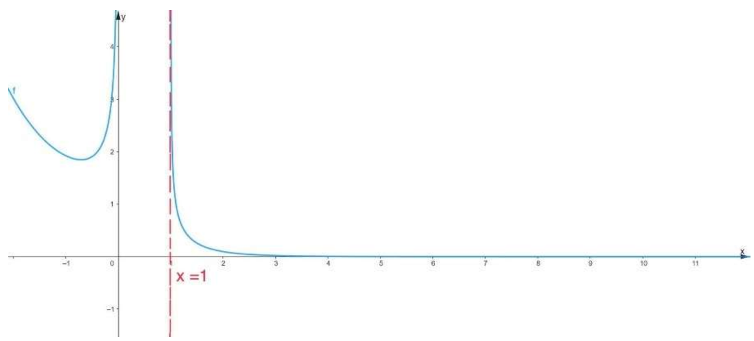
ต่อไปเราจะศึกษาผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ โดยเราจะนำสมการ (3.4) และ (3.18) มาใช้ในการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ที่มีปัญหาที่ขอบเขตบนของปริพันธ์

ตัวอย่างการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์

พิจารณา

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}\,dx \tag{3.20}$$

จากสมการ (3.20) จะได้กราฟดังนี้



จากกราฟข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=1$ เมื่อเราใช้สมการ (3.4) และ (3.18) ในการประมาณค่าสมการ (3.20) จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 0.86600

สมการ (3.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.84781$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.85520$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.86043$
สมการ (3.18)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.84836$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.85559$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.86071$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในการค้นคว้าอิสระนี้เราศึกษาวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดขอบเขตสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่สามารถหาค่าได้ที่ขอบเขตของปริพันธ์ โดยเราได้ใช้การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ในการประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ โดยจะไม่ใช้จุดที่อยู่บนขอบเขตของปริพันธ์นั่นคือจุดเอกฐานในการคำนวณ และได้นำเสนอการพัฒนาสูตร ค่าคลาดเคลื่อนของการคำนวณ รวมถึงผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ โดยผู้ศึกษาได้สรุปผลการศึกษาทั้งหมดดังนี้

สูตรการประมาณค่าปริพันธ์

1. สูตรการประมาณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตทั้งสองด้าน
   - ประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามลากรองจ์ดีกรี 3 เราจะได้สูตรใหม่ คือ

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)dx \approx \frac{3h}{5}\left[4f_1 + 5f_4 + 2f_6 + 5f_8 + 4f_{11}\right] \tag{4.1}$$

2. สูตรการประมาณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่าง
   - ประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามลากรองจ์ดีกรี 2 เราจะได้สูตรใหม่ คือ

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{4}\left[3f_1 + f_3\right] \tag{4.2}$$

ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนคือ

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_3} \tilde{f}(x) \le -\frac{3}{8}h^4 F^{(3)}(\xi) \tag{4.3}$$

   - ประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามลากรองจ์ดีกรี 4 เราจะได้สูตรใหม่ คือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{15h}{448}\left[75f_1 + 161f_2 + 175f_3 + 37f_4\right] \tag{4.4}$$

ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนคือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_4} \tilde{f}(x) \le -\frac{375}{16}h^6 F^{(5)}(\xi) \tag{4.5}$$

3. สูตรการประมาณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตบน

- ประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามลากรองจ์ดีกรี 4 เราจะได้สูตรใหม่ คือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{15h}{448}\left[37f_0 + 175f_1 + 161f_2 + 75f_3\right] \tag{4.6}$$

ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนคือ

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_4} \tilde{f}(x) \le \frac{375}{16}h^6 F^{(5)}(\xi) \tag{4.7}$$

จากการศึกษาสามารถสรุปได้ว่า สูตรที่ดีที่สุดจากสูตรทั้งหมดที่ได้ทำการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ สำหรับประมาณค่าปริพันธ์จำกัดขอบเขตสำหรับของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ คือ

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)dx \approx \frac{3h}{5}\left[4f_1 + 5f_4 + 2f_6 + 5f_8 + 4f_{11}\right] \tag{4.1}$$

เนื่องจากสูตรข้างต้นสามารถประมาณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ทั้งปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตทั้งสองด้าน ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตบน และปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่าง และค่าคลาดเคลื่อนของสูตรยังมีค่าน้อยกว่าสูตรอื่น ๆ ที่ได้ทำการศึกษา

ผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์

1. ผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตทั้งสองด้าน

พิจารณา

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \tag{4.8}$$

จากสมการ (4.8) จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x = 0$ และ $x = 1$ เมื่อเราประมาณค่าสมการข้างต้นจะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น $\pi \approx 3.14159$

สมการ (4.1)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 2.94705$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 3.00398$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 3.04427$

2. ผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่าง

พิจารณา

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \tag{4.9}$$

จากสมการ (4.9) จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราประมาณค่าสมการข้างต้น จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 2.00000

สมการ (4.1)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 1.90265$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 1.93117$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 1.95133$
สมการ (4.2)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 1.89856$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 1.92827$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 1.94928$
สมการ (4.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 1.9048$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 1.93267$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 1.95239$

จากตารางข้างตอนสามารถสรุปได้ว่า สมการ (4.4) ให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากกว่าสมการอื่น ๆ

พิจารณา

$$I=-\int_0^1 x\ln\left(x\right)dx \tag{4.10}$$

จากสมการ (4.10) จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราประมาณค่าสมการข้างต้น จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 0.25000

สมการ (4.1)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.25005$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.25001$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.25000$
สมการ (4.2)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.25007$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.25002$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.25001$
สมการ (4.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.25004$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.25001$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.25000$

จากตารางข้างตอนสามารถสรุปได้ว่า สมการ (4.1) และ สมการ (4.4) ให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากกว่าสมการ (4.2)

พิจารณา

$$I=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{\frac{3}{4}}}dx \tag{4.11}$$

จากสมการ (4.11) จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราประมาณค่าสมการข้างต้น จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 2.96000

สมการ (4.1)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 2.42924$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 2.58058$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 2.70774$
สมการ (4.2)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 2.41189$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 2.56602$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 2.69551$
สมการ (4.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 2.43901$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 2.58879$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 2.71464$

จากตารางข้างตอนสามารถสรุปได้ว่า สมการ (4.4) ให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากกว่าสมการอื่น ๆ

พิจารณา

$$I=-\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x)}\,dx \tag{4.12}$$

จากสมการ (4.12) จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราประมาณค่าสมการข้างต้น จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 1.82247

สมการ (4.1)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.17758$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.17755$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.17754$
สมการ (4.2)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.17761$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.17755$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.17754$
สมการ (4.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.17758$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.17754$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.17754$

จากตารางข้างตอนสามารถสรุปได้ว่า สมการ (4.2) ให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากกว่าสมการอื่น ๆ

พิจารณา

$$I=-\int_0^1 \sqrt{x}\ln(x)\,dx \tag{4.13}$$

จากสมการ (4.13) จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=0$ เมื่อเราประมาณค่าสมการข้างต้น จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 0.44444

สมการ (4.1)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.44523$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.44476$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.44457$
สมการ (4.2)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.44537$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.44482$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.44459$
สมการ (4.4)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.44518$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.44474$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.44456$

จากตารางข้างตอนสามารถสรุปได้ว่า สมการ (4.4) ให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากกว่าสมการอื่น ๆ

จากการศึกษาสามารถสรุปได้ว่า สูตรที่ดีที่สุดจากสูตรการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่างที่ได้ทำการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ สำหรับประมาณค่าปริพันธ์จำกัดขอบเขตสำหรับของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่าง คือสูตร (4.4) ซึ่งให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากที่สุด

3. ผลการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตบน

พิจารณา

$$I=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}\,dx \tag{4.14}$$

จากสมการ (4.14) จะเห็นได้ว่ามีจุดเอกฐานที่ $x=1$ เมื่อเราประมาณค่าสมการข้างต้น จะได้ผลการประมาณค่า ดังนี้ โดยมีค่าที่แม่นตรงเป็น 0.86000

สมการ (4.1)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.84781$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.85520$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.86043$
สมการ (4.6)	$N\left(\frac{1}{60}\right) \approx 0.84836$	$N\left(\frac{1}{120}\right) \approx 0.85559$	$N\left(\frac{1}{240}\right) \approx 0.86071$

จากตารางข้างตอนสามารถสรุปได้ว่า สมการ (4.6) ให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากกว่าสมการ (4.1)

จากการศึกษาสามารถสรุปได้ว่า สูตรที่ดีที่สุดจากสูตรการประมาณค่าเชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตล่างที่ได้ทำการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ สำหรับประมาณค่าปริพันธ์จำกัดขอบเขตสำหรับของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ขอบเขตบน คือสูตร (4.6) ซึ่งให้ผลการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่แม่นตรงมากที่สุด

เอกสารอ้างอิง

[1] มรกต เก็บเจริญ, วิธีเชิงตัวเลข(Numerical Methods), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, คณะวิทยาศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์, พ.ศ. 2557

[2] Calculus 1, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, คณะวิทยาศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์, พ.ศ. 2561

[3] L. Fox, Romberg integration for a class of singular integrand, Computer. Journal. 10(1) (1967), pp87-93.

[4] Md. Habibur Rahaman, Md. Ashraful Huq, M. Kamrul Hasan, A New Straightforward Method for Evaluating Singular Integrals, Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, 2015, No. 6, 420-423

[5] Md. Habibur Rahaman, Md. Ashraful Huq, M. Kamrul Hasan, A More Accurate and Straightforward Method for Evaluating Singular Integrals, Universal Journal Applied Mathematics, Vol. 3, 2015, No. 3, 53-61

ภาคผนวก

Numerical approximation of improper integral (singular at the limit of integration)

MATH diversity @CMU

Author : Apinya Saehan ID : 620510583

Advisor : Associate Professor Dr. Morrakot Khebchareon

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

Abstract

In this independent study, we study the numerical integration for the improper integral which the integrand is/are singular at the limit point(s). We use the Lagrange's polynomial approximate integrand at the point(s) exclude the singular point(s). The derivation of the formula, error approximation and numerical approximations are presented in this study.

Introduction

Huq et al [1] developed a simple and straightforward method for evaluating singular integrals of the form.

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

where $f(x)$ is singular at x=a or x=b This independent study aims to obtain a new straightforward formula for evaluating singular integrals and also obtain a better result than other existing solutions.

We have used Lagrange's formula to derive an integration formula.

Lower Singular Integral

Considering three points x_0, x_1, x_3 together with $x_0=0,\ x_1=x_0+h$ and $x_3=x_0+3h$. the formula has been taken the form

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx=\frac{3h}{4}\left[3f_1+f_3\right] \qquad (1)$$

where $h=\dfrac{x_3-x_0}{3}$

Considering five points x_0, x_1, x_2, x_3 and x_4 together with $x_0=0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_0+5h,\ x_3=x_0+11h$ and $x_4=x_0+15h$. the formula has been taken the form

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx=\frac{15h}{448}\left[75f_1+161f_2+175f_3+37f_4\right] \qquad (2)$$

where $h=\dfrac{x_4-x_0}{15}$

Upper Singular Integral

Considering five points x_0, x_1, x_2, x_3 and x_4 together with $x_0=0,\ x_1=x_0+4h,\ x_2=x_0+10h,\ x_3=x_0+14h$ and $x_4=x_0+15h$. the formula has been taken the form

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx=\frac{15h}{448}\left[37f_0+175f_1+161f_2+75f_3\right] \qquad (3)$$

where $h=\dfrac{x_4-x_0}{15}$

Both Singular Integral

Considering seven points $x_0, x_1, x_4, x_6, x_8, x_{11}$ and x_{12} together with $x_0=0,\ x_1=x_0+h,\ x_4=x_0+4h, x_6=x_0+6h,$ $x_8=x_0+8h, x_{11}=x_0+11h$ and $x_{12}=x_0+12h$. the formula has been taken the form

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)dx=\frac{3h}{5}\left[4f_1+5f_4+2f_6+5f_8+4f_{11}\right] \qquad (4)$$

where $h=\dfrac{x_{12}-x_0}{12}$

Error of the Present Formula

The error of formula (1) is calculated a $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=-\frac{3}{8}h^4F^{(3)}(\xi)$

The error of formula (2) is calculated a $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx=-\frac{375}{16}h^6F^{(5)}(\xi)$

The error of formula (3) is calculated a $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx=\frac{375}{16}h^6F^{(5)}(\xi)$

Examples

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad (5)$$

In this case, we have singular point at x=0. The approximate value of integral (5) using the formula (1), (2) and (4) with step size h .N(h), are given in the table below.

	h_1	$h_2=h_1/2$	$h_3=h_2/2$
Formula (1)	$N\left(\frac{1}{3}\right)=1.54904$	$N\left(\frac{1}{6}\right)=1.67961$	$N\left(\frac{1}{12}\right)=1.77323$
Formula (2)	$N\left(\frac{1}{15}\right)=1.80958$	$N\left(\frac{1}{30}\right)=1.86535$	$N\left(\frac{1}{60}\right)=1.90479$
Formula (4)	$N\left(\frac{1}{12}\right)=1.78233$	$N\left(\frac{1}{24}\right)=1.84608$	$N\left(\frac{1}{48}\right)=1.89116$

References

[1] Md. Habibur Rahaman, Md. Ashraful Huq, M. Kamrul Hasan, A New Straightforward Method for Evaluating Singular Integrals, Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, 2015, No. 6, 420-423

[2] Md. Habibur Rahaman, Md. Ashraful Huq, M. Kamrul Hasan, A More Accurate and Straightforward Method for Evaluating Singular Intergrals, Universal Journal Applied Mathematics , Vol. 3, 2015, No. 3, 53-61