

แบบจำลองเครื่องยนต์โรตารีสำหรับโรเตอร์รูปหลายเหลี่ยมรูโลซ  
(Rotary engine model for any Reuleaux polygonal rotor)

นางสาว รินรดา รางศรี  
รหัส 620510525

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่  
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

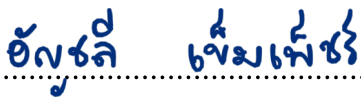
แบบจำลองเครื่องยนต์โรตารีสำหรับโรเตอร์รูปหลายเหลี่ยมรูโลซ  
(Rotary engine model for any Reuleaux polygonal rotor)

รินรดา รางศรี

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต  
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

.....  ..... ประธานกรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ยุ จันทร)

.....  ..... กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.อัชลี เข้มเพ็ชร)

3/04/2566

แบบจำลองเครื่องยนต์โรตารีสำหรับโรเตอร์รูปหลายเหลี่ยมรูโลซ  
(Rotary engine model for any Reuleaux polygonal rotor)

นางสาว รินรดา รางศรี  
รหัส 620510525

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต  
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

# กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษากระบวนวิชา 206499 (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักศึกษาสาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้ศึกษาค้นคว้า ประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ งานค้นคว้าอิสระชิ้นนี้ประสบความสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับการอนุเคราะห์ช่วยเหลือจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ยู จันทร ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ให้คำปรึกษาและให้โอกาสข้าพเจ้าในการทำงานค้นคว้าอิสระชิ้นดังกล่าว และให้ความช่วยเหลือในการแนะนำให้ข้อมูลความรู้ทักษะ เทคนิคต่าง ๆ รวมถึงแนวทางการ ทำการค้นคว้าอิสระ อีกทั้งตรวจสอบความถูกต้องในการศึกษาอิสระนี้ให้แก่ข้าพเจ้า ด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่ง จนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี ข้าพเจ้าตระหนักถึงความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์ และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ กรุณาให้ข้อเสนอแนะ ให้คำปรึกษา แก้ไขและให้แนวคิดต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้า อิสระฉบับนี้ให้ดียิ่งขึ้น ด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่งจนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ทุกท่านที่ได้อบรม สั่งสอนและให้ความรู้ด้านคณิตศาสตร์แก่นักศึกษา

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ประสานงานของทางภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ให้คำแนะนำช่วยเหลือ บริการประสานงานและอำนวยความสะดวกต่าง ๆ เป็นอย่างดีมาโดยตลอด

สุดท้ายนี้หากการศึกษาค้นคว้าเล่มนี้จะมีประโยชน์แก่ผู้สนใจข้อมูล ข้าพเจ้าขอขอบคำขอบคุณ ชื่นชมและคุณความดีให้แก่คุณพ่อ คุณแม่ ผู้ที่ให้การดูแลและเป็นกำลังใจที่สำคัญยิ่งในการทำการศึกษาค้นคว้าของข้าพเจ้า ครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนข้าพเจ้า ในส่วนของความผิดพลาดหรือบกพร่องประการใด ข้าพเจ้าขอน้อมรับ ผิดไว้แต่เพียงผู้เดียวและยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษาเพื่อเป็นประโยชน์ในการพัฒนา การศึกษาค้นคว้าอิสระต่อไป

รินรดา รางศรี



|                          |                                                           |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------|
| หัวข้อ (ภาษาไทย)         | แบบจำลองเครื่องยนต์โรตารีสำหรับโรเตอร์รูปหลายเหลี่ยมรูโลซ |
| (ภาษาอังกฤษ)             | Rotary engine model for any Reuleaux polygonal rotor      |
| ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ | นางสาว รินรดา รางศรี รหัสนักศึกษา 620510525               |
| ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา     | ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ยุ จันทร                        |
| ชื่อกรรมการสอบ           | รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร                        |

### บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการทำงานของโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมรูโลซ ในเครื่องยนต์โรตารี เครื่องยนต์โรตารีเป็นเครื่องยนต์ที่ยกระดับสมรรถนะในการขับเคลื่อนรถซูเปอร์คาร์ โดยมีชุมพลัง 500-700 แรงม้า และอัตราเร่ง 0-100 ภายใน 4 วินาที เราได้สังเกตว่าปัจจัยหลัก คือ โรเตอร์ที่มีรูปสามเหลี่ยมรูโลซ และห้องเผาไหม้ที่เหมาะสม นอกจากนี้ หากเปลี่ยนโรเตอร์จากรูปสามเหลี่ยมรูโลซ เป็นรูปห้าเหลี่ยมรูโลซ อาจจะทำให้มีแรงม้าเพิ่มขึ้น ในการค้นคว้าอิสระนี้ได้จำลองการเคลื่อนที่ของโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมรูโลซ และห้องเผาไหม้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นต้นแบบในการจำลองโรเตอร์และห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์รูปห้าเหลี่ยมรูโลซ ผลการค้นคว้าอิสระนี้ พบว่าเราได้แบบจำลองห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์รูป  $n$  เหลี่ยมรูโลซ โดย  $n$  เป็นจำนวนเต็มคี่ที่มากกว่าหนึ่ง

คำสำคัญ : สามเหลี่ยมรูโลซ, เครื่องยนต์โรตารี, สมการพาราเมตริก

### Abstract

The purpose of this independent study is to study the operation of Reuleaux triangular rotor in the rotary engine. The rotary engine is an engine that enhances the performance of supercars, with power from 500-700 horsepower and acceleration from 0-100 in 4 seconds. We have noticed that the main factor is the suitable rotor of Reuleaux triangle and the suitable housing. In addition, if the rotor is changed from a Reuleaux triangle to a Reuleaux pentagon hole may increase horsepower. In this independent study, we investigate a mathematical equation for the motion of the Reuleaux triangular rotor and housing as a model for simulating the rotor and housing for a Reuleaux pentagon rotor. The results of this independent study is found that we get the simulation of the housing for a Reuleaux  $n$ -polygon rotor, where  $n$  is an odd integer with greater than one.

Keywords : Reuleaux triangle, Rotary engine, Parametric equation

# สารบัญ

|                                                                                                          |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| กิตติกรรมประกาศ                                                                                          | i         |
| บทคัดย่อ                                                                                                 | ii        |
| สารบัญ                                                                                                   | iii       |
| <b>1 บทนำ (introduction)</b>                                                                             | <b>1</b>  |
| 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ . . . . .                                                                     | 1         |
| 1.2 วัตถุประสงค์ . . . . .                                                                               | 9         |
| 1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ . . . . .                                                                  | 9         |
| 1.4 ขอบเขตการศึกษา . . . . .                                                                             | 10        |
| 1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน . . . . .                                                                        | 10        |
| <b>2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)</b>                                                                  | <b>11</b> |
| 2.1 พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า . . . . .                                                                 | 11        |
| 2.2 สามเหลี่ยมรูโลซ (Reuleaux Triangle) . . . . .                                                        | 14        |
| 2.2.1 การสร้างสามเหลี่ยมรูโลซ (Construction of Reuleaux Triangle) . . . . .                              | 14        |
| 2.2.2 สมบัติทางคณิตศาสตร์ของสามเหลี่ยม Reuleaux (Mathematical Properties of Reuleaux Triangle) . . . . . | 16        |
| 2.3 ห้าเหลี่ยมรูโลซ (Reuleaux Pentagon) . . . . .                                                        | 20        |
| 2.3.1 การสร้างห้าเหลี่ยมรูโลซ (Construction of Reuleaux Pentagon) . . . . .                              | 20        |
| 2.3.2 สมบัติทางคณิตศาสตร์ของห้าเหลี่ยมรูโลซ (Mathematical Properties of Reuleaux Pentagon) . . . . .     | 23        |
| 2.4 เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ( Reuleaux Heptagon) . . . . .                                                      | 28        |
| 2.4.1 การสร้างเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Construction of Reuleaux Heptagon) . . . . .                             | 28        |

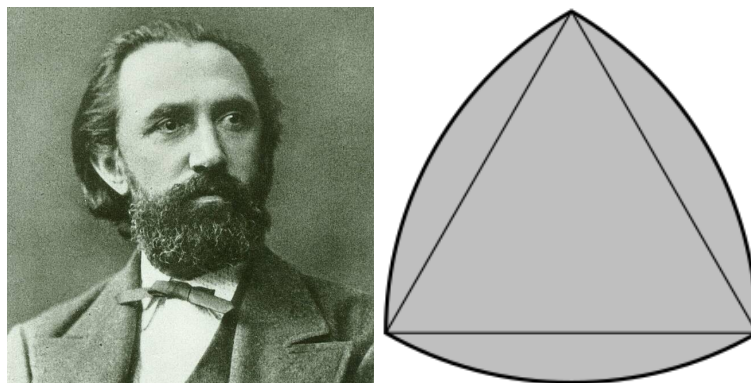
|          |                                                                                                 |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4.2    | สมบัติทางคณิตศาสตร์ของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Mathematical Properties of Reuleaux Heptagon) . . . . . | 31        |
| 2.5      | สมการพาราเมตริก . . . . .                                                                       | 36        |
| <b>3</b> | <b>ผลการศึกษา (Results)</b>                                                                     | <b>37</b> |
| 3.1      | กระบวนการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ . . . . .                                 | 37        |
| 3.2      | ระยะรัศมีของสามเหลี่ยมรูโลซ ที่เหมาะสม . . . . .                                                | 46        |
| 3.2.1    | รัศมีของเพลลาใด ๆ สำหรับโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมรูโลซ . . . . .                                     | 47        |
| 3.3      | แบบจำลองห้าเหลี่ยมรูโลซ (Model for Reuleaux Pentagon) . . . . .                                 | 51        |
| 3.3.1    | กระบวนการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของห้าเหลี่ยมรูโลซ . . . . .                                 | 51        |
| 3.4      | แบบจำลองสำหรับเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Model for Reuleaux Heptagon) . . . . .                          | 63        |
| 3.5      | แบบจำลองสำหรับ $n$ เหลี่ยมรูโลซ (Model for Reuleaux Polygonal) . . . . .                        | 66        |
| <b>4</b> | <b>สรุปผลการศึกษา (Conclusion)</b>                                                              | <b>68</b> |
| 4.1      | สรุปผลการศึกษา . . . . .                                                                        | 68        |
|          | <b>บรรณานุกรม</b>                                                                               | <b>70</b> |
|          | <b>บรรณานุกรม</b>                                                                               | <b>71</b> |

# บทที่ 1

## บทนำ (introduction)

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

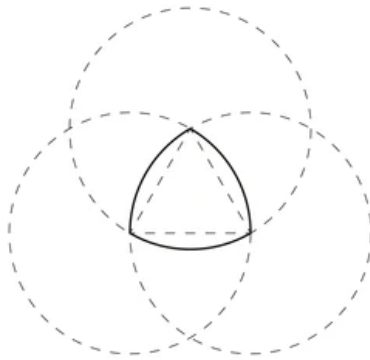
ในศตวรรษที่ 19 Franz Reuleaux วิศวกรชาวเยอรมัน ที่รู้จักกันในนามผู้บุกเบิกการศึกษาเครื่องจักรกลศาสตร์ ได้ค้นพบรูปสามเหลี่ยมรูโลซ (Reuleaux Triangle) อีกทั้งยังเป็นผู้ที่ใช้รูปสามเหลี่ยมรูโลซ นี้ในการออกแบบชิ้นงานต่าง ๆ อีกด้วย



รูปภาพ 1.1: Franz Reuleaux และ รูปสามเหลี่ยมรูโลซ

ที่มา : <https://www.tu.berlin/en/about/history/people-portraits/franz-reuleaux>

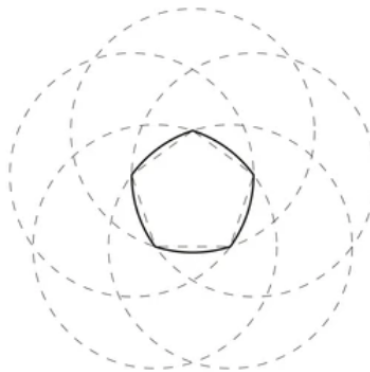
ในทางเรขาคณิต **สามเหลี่ยม Reuleaux** เป็นรูปทรงที่เกิดจากการตัดกันของวงกลมสามวง โดยแต่ละวงมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ขอบเขตของอีกสองวงที่เหลือ ขอบเขตของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ เส้นโค้งที่มีความกว้างคงที่ซึ่งป็นเส้นโค้งที่เกิดจากส่วนโค้งวงกลม นอกจากนี้ยังมีรูปหลายเหลี่ยมรูโลซ ที่ถูกพัฒนามาจากต้นแบบของสามเหลี่ยมรูโลซ โดยสามารถสร้างได้จากเส้นโค้งที่มีความกว้างคงที่ ซึ่งประกอบขึ้นจากส่วนโค้งวงกลมที่มีรัศมีคงที่เช่นเดียวกัน



รูปภาพ 1.2: สามเหลี่ยมรูโลซ

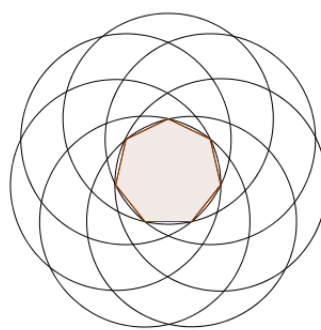
ที่มา : <https://www.shutterstock.com/search/reuleaux-triangle>

ด้วยแนวคิดนี้เราจึงได้รูปห้าเหลี่ยมรูโลซ และ เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ อีกเช่นกัน



รูปภาพ 1.3: ห้าเหลี่ยมรูโลซ

ที่มา : <https://brilliant.org/wiki/composite-figures/>



รูปภาพ 1.4: เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

ที่มา : <https://scipython.com/blog/constructing-reuleaux-polygons/>

เนื่องจากสามเหลี่ยมรูโลซ เป็นรูปทรงเรขาคณิตที่กะทัดรัดและมีสัดส่วนที่เท่ากัน จึงถูกนิยมนำมาเป็นโครงสร้างพื้นฐานเพื่อเพิ่มความแข็งแรงให้กับชิ้นงานต่าง ๆ เช่น การออกแบบดินสอ มีการใช้รูปร่างของสามเหลี่ยมรูโลซ ในการออกแบบ ช่วยให้จับถนัดมือยิ่งขึ้น แต่ละเส้นโค้งของสามเหลี่ยมรองรับนิ้วมือระหว่างเขียน ซึ่งช่วยให้ควบคุมดินสอได้ดีขึ้น เช่นเดียวกัน ปีกกีตาร์ที่เราเห็นในชีวิตประจำวัน ก็ใช้รูปทรงของสามเหลี่ยมรูโลซ เพื่อการควบคุมที่ดีขึ้นและการจับที่แน่นขึ้น



รูปภาพ 1.5: ดินสอรูปทรงสามเหลี่ยมรูโลซ

ที่มา : <https://www.scienceabc.com/pure-sciences/what-is-the-reuleaux-triangle.html>



รูปภาพ 1.6: ปีกกีตาร์

ที่มา : <https://www.scienceabc.com/pure-sciences/what-is-the-reuleaux-triangle.html>

นอกจากนี้ในช่วงปลายศตวรรษที่ 13 หรือต้นศตวรรษที่ 14 สามเหลี่ยมรูโลซ นำไปออกแบบถูกประยุกต์ใช้ในด้านสถาปัตยกรรม โบสถ์หลายแห่งมีการออกแบบหน้าต่างด้านหน้าอาคารเป็นรูปร่างคล้ายสามเหลี่ยมรูโลซ รูปร่างนี้ยังถูกใช้ในการออกแบบบันไดวน โดยใช้รูปสามเหลี่ยมรูโลซ แบบ 2 มิติออกแบบเป็นแผนผังสำหรับฐานบันได



รูปภาพ 1.7: หน้าต่างโบสถ์

ที่มา : <https://www.scienceabc.com/pure-sciences/what-is-the-reuleaux-triangle.html>



รูปภาพ 1.8: บันไดวนฐานคล้ายสามเหลี่ยมรูโลซ

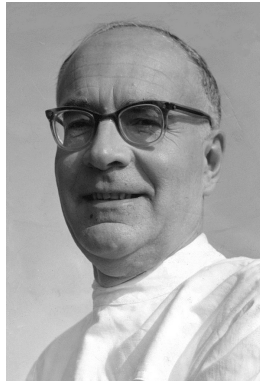
ที่มา : <https://www.scienceabc.com/pure-sciences/what-is-the-reuleaux-triangle.html>

Franz Reuleaux นำเสนอสมบัติเชิงกลของสามเหลี่ยมรูโลซ ที่สำคัญ คือ สามเหลี่ยมนี้สามารถเปลี่ยนการหมุนรอบแกนให้เป็นการเคลื่อนที่คล้ายรูปเลข 8 ต่อมาในปี 1929 วิศวกรชาวเยอรมัน Felix Wankel ได้นำสมบัติเชิงกลของ Franz Reuleaux นี้ มาพัฒนาเป็นเครื่องยนต์แบบใหม่ที่มีการสันดาปภายในซึ่งใช้หลักการหมุนต่างจากหลักการเคลื่อนที่ขึ้น-ลงในเครื่องยนต์ลูกสูบ ในปี 1950 ทางบริษัท NSU Motorenwerke AG (บริษัทผลิตเครื่องยนต์และจักรยานยนต์ในประเทศเยอรมัน) ได้พัฒนาเครื่องยนต์ของ Felix Wankel จนกระทั่งถูกใช้เป็นเครื่องยนต์ในรถสปอร์ตหรือรถซูเปอร์คาร์ และเรียกว่า **เครื่องยนต์โรตารี (Rotary engine)** หรือ **เครื่องยนต์วันเคล (Wankel engine)**



รูปภาพ 1.9: เครื่องยนต์โรตารี

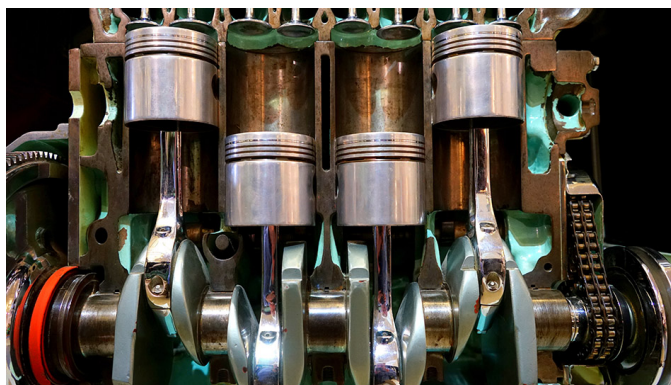
ที่มา : <https://www.carsguide.com.au/car-advice/what-is-a-rotary-engine-37430>



รูปภาพ 1.10: Felix Wankel

ที่มา : <https://www.gettyimages.ca/photos/felix-wankel-felix-wankel>

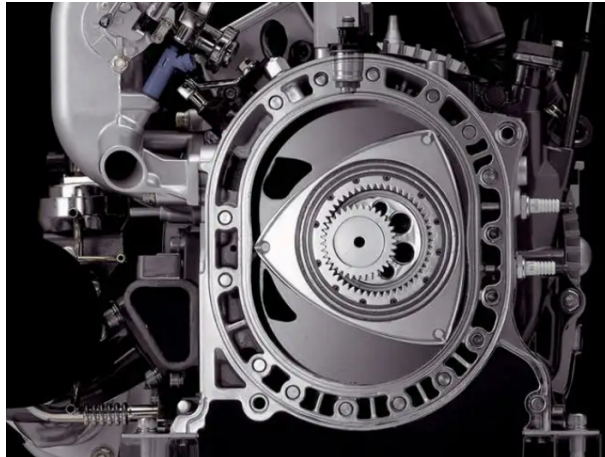
เครื่องยนต์โรตารีและเครื่องยนต์ลูกสูบ (Piston engine) สร้างพลังกำลังในการขับเคลื่อนโดยเปลี่ยนพลังงานความร้อนให้กลายเป็นพลังงานกลในลักษณะเดียวกัน แต่เครื่องยนต์ในรูปแบบลูกสูบ และเครื่องยนต์โรตารีกลับมีรูปแบบการทำงาน รวมถึงองค์ประกอบภายในที่ต่างกันไปอย่างสิ้นเชิง ซึ่งสิ่งที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนจนทำให้สามารถเห็นภาพได้ง่ายที่สุด นั่นก็คือ ตัวลูกสูบที่มีลักษณะที่ต่างกัน เครื่องยนต์ในรูปแบบลูกสูบ เป็นลูกสูบทรงกระบอกเคลื่อนที่ในแนวขึ้น-ลง อยู่ในเสื้อสูบ (Cylinder Block) ที่แยกกับชิ้นส่วนที่เป็นฝาสูบอย่างชัดเจน ส่วนเครื่องยนต์โรตารีเป็นลูกสูบรูปทรงสามเหลี่ยมรูโลซ หรือที่เรียกกันว่า **โรเตอร์ (Rotor)** เคลื่อนที่ด้วยการหมุนใน **ห้องเผาไหม้ (Housing)** ที่มีหน้าที่เสมือนเป็นทั้งเสื้อสูบและฝาสูบในหนึ่งเดียว ด้วยการใช้ชิ้นส่วนที่น้อยกว่า มีขนาดที่กะทัดรัดกว่า ซึ่งส่งผลในเรื่องของน้ำหนักที่เบาว่าตามไปด้วย



รูปภาพ 1.11: ลูกสูบทรงกระบอกภายในเสื้อสูบ

ที่มา : <https://www.yukonlubricants.com/4-stroke-engine/>





รูปภาพ 1.12: โรเตอร์ภายในเครื่องยนต์โรตารี

ที่มา : <https://www.autocar.co.uk/car-news/technology/under-skin-understanding-bizarre-workings-rotary-engines>



รูปภาพ 1.13: ชิ้นส่วนของเครื่องยนต์แบบลูกสูบ

ที่มา : <http://car.boxzaracing.com/knowledge/32973>



รูปภาพ 1.14: ชิ้นส่วนของเครื่องยนต์โรตารี

ที่มา : <http://car.boxzaracing.com/knowledge/32973>

**หลักการในการทำงานของเครื่องยนต์โรตารีและเครื่องยนต์ลูกสูบ**

เครื่องยนต์เผาไหม้ภายใน หรือเครื่องยนต์สันดาปภายในจะทำงานได้นั้นจะอาศัยองค์ประกอบของระบบหลักดังนี้

- ระบบน้ำมัน (เบนซิน หรือ ดีเซล)
- ระบบอากาศ
- ระบบจุดระเบิด (สามารถจุดได้ 2 แบบ จุดระเบิดด้วยประกายไฟ และ จุดระเบิดด้วยการอัดอากาศ)

เครื่องยนต์แบบลูกสูบ แบ่งการเผาไหม้ออกเป็น 4 จังหวะ (four-stroke cycle) ได้แก่

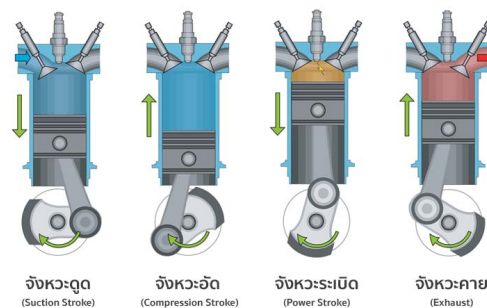
1. **จังหวะดูด (Intake Stroke)** จังหวะที่ลูกสูบจะทำการดูด “ส่วนผสมไอดี” ที่เป็นการผสมกันระหว่างอากาศจากภายนอกและน้ำมันเบนซินที่ฉีดฝอยออกมาจากหัวฉีด มาผสมกันตามสัดส่วนที่กำหนด แล้วเริ่มทำงานจากจังหวะที่ลูกสูบอยู่ตำแหน่งบนสุดของกระบอกสูบ หรือที่ศัพท์เทคนิคเรียกว่า “ศูนย์ตายบน” จากนั้นลูกสูบจะขยับลงสู่จุดล่างสุดของกระบอกสูบ หรือที่เรียกว่า “ศูนย์ตายล่าง” โดยจังหวะที่ลูกสูบขยับตัวลงมานั้น วาล์วไอดีจะทำการเปิดเพื่อให้ส่วนผสมไอดี เข้ามาอยู่ในกระบอกสูบได้ ส่วนวาล์วไอเสียนั้น จะทำการปิดเพื่อไม่ให้ส่วนผสมไอดีออกจากกระบอกสูบได้
2. **จังหวะอัด (Compression Stroke)** รูปทรงของห้องเผาไหม้จะบังคับให้ไอดีดังกล่าวถูกบีบอัดลง ทำให้พื้นที่ลดลง ส่งผลให้การสันดาปมีประสิทธิภาพมากขึ้น
3. **จังหวะระเบิด (Power Stroke)** เมื่อไอดีถูกบีบอัดจนร้อนและมีความดันสูงขึ้น มันจะระเบิดด้วยการจุดประกายไฟจากหัวเทียน แรงระเบิดจะเป็นแรงผลักดันให้ลูกสูบหมุนเคลื่อนที่ต่อไป
4. **จังหวะคายไอเสีย (Exhaust Stroke)** ไอเสียที่เกิดขึ้นจากการสันดาปจะถูกปล่อยผ่านพอร์ตไอเสียออกไปสู่บรรยากาศ

การทำงานทั้ง

41 วัฏจักรของเครื่องยนต์แบบลูกสูบ (1 cycle of Piston engine)

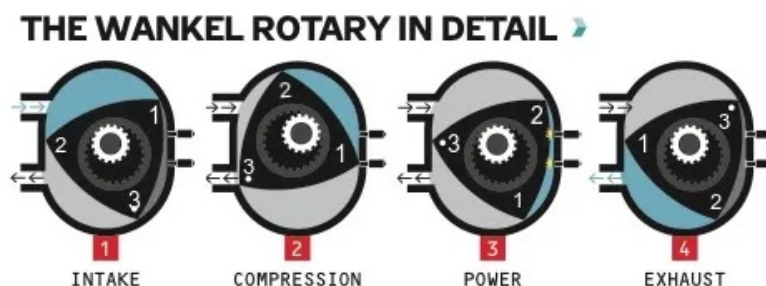
เครื่องยนต์โรตารี มีหลักการทำงาน 4 จังหวะ เช่นเดียวกับเครื่องยนต์แบบลูกสูบ แต่โรเตอร์หรือลูกสูบทรงสามเหลี่ยมรูโลซ ของเครื่องยนต์โรตารีเปลี่ยนจากการเคลื่อนที่แบบขึ้น-ลง เป็นการเคลื่อนที่หมุนไปรอบ ๆ ห้องเผาไหม้ โดยผนังด้านข้างห้องเผาไหม้จะมีพอร์ตหลัก 2 พอร์ต คือ พอร์ตไอดี (Intake Port) และพอร์ตไอเสีย (Exhaust Port) ทำหน้าที่ป้อนไอดีหรือเชื้อเพลิงกับอากาศ และพอร์ตไอเสียสำหรับการระบายไอเสียจากการเผาไหม้ที่สมบูรณ์ออกจากกระบอกสูบ เมื่อมันทำงานโดยโรเตอร์หมุนตามเข็มนาฬิกา จะรีดทั้งไอดีและไอเสียไปตามผนังห้องเผาไหม้ จังหวะของการหมุนในขั้นตอนถัดไป ก็จะหมุนเวียนไปเข้าสู่จังหวะดูอีกครั้ง ต่อเนื่องวนเวียนอยู่แบบนี้ โดยไม่ต้องรอให้ครบวัฏจักรแบบเครื่องยนต์ลูกสูบ ดังนั้น 1 วัฏจักรของเครื่องยนต์โรตารี จะเกิดการระเบิดทั้งหมด 3 ครั้ง นั่นคือ

1 วัฏจักรของเครื่องยนต์แบบลูกสูบ เท่ากับ  $\frac{1}{3}$  วัฏจักรของเครื่องยนต์โรตารี



รูปภาพ 1.15: การทำงาน 4 จังหวะของเครื่องยนต์แบบลูกสูบ  
ที่มา : <https://www.yamaha-motor.co.th/blog/detail?url>

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ผู้ศึกษาค้นคว้าเกิดความสนใจเกี่ยวกับการทำงานของเครื่องยนต์โรตารี เราจึงคิดว่าหากเปลี่ยนโรเตอร์จากสามเหลี่ยมรูโลซ ไปเป็น ห้าเหลี่ยมรูโลซ หรือ รูปหลายเหลี่ยมรูโลซ เราจะได้ห้องเครื่องที่สามารถทำให้เกิดการจุดระเบิดได้เพิ่มขึ้นจากเดิม



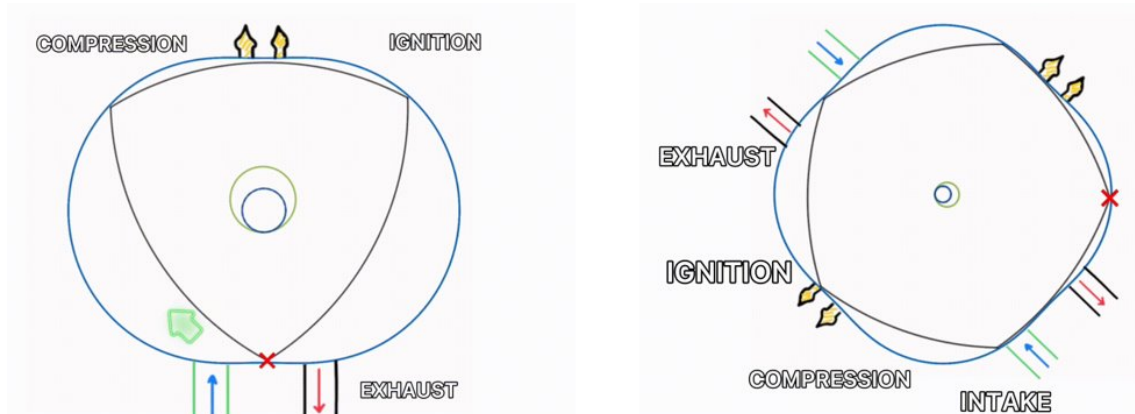
รูปภาพ 1.16: การทำงาน 4 จังหวะของเครื่องยนต์โรตารี  
ที่มา : <https://gr8autotech.wordpress.com/tag/wankel-rotary-engine/>

จากรูปข้างต้น

1 วัฏจักรของเครื่องยนต์โรตารีโรเตอร์รูปห้าเหลี่ยมรูโลซ เท่ากับ 8 วัฏจักรของเครื่องยนต์แบบลูกสูบ

### หรือเท่ากับ $\frac{8}{3}$ วัฏจักรของเครื่องยนต์โรตารีโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมรูโลซ

ดังนั้น งานค้นคว้าอิสระนี้ได้ทำการศึกษาการเคลื่อนที่ของโรเตอร์สามเหลี่ยมรูโลซ ภายในห้องเผาไหม้ของเครื่องยนต์โรตารี โดยศึกษาการหมุนและหาสมการการเคลื่อนที่ปลายสามเหลี่ยมรูโลซ นำไปสู่การสร้างแบบจำลองห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์สามเหลี่ยมรูโลซ เพื่อเป็นข้อมูลในการสร้างแบบจำลองห้องเผาไหม้ และศึกษาการทำงานของเครื่องยนต์โรตารีที่มีโรเตอร์เป็นรูปห้าเหลี่ยมรูโลซ และรูปหลายเหลี่ยมรูโลซ



## 1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาแนวคิดของสามเหลี่ยมรูโลซ และเครื่องยนต์โรตารี
2. เพื่อศึกษาคุณสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมรูโลซ และเครื่องยนต์โรตารี
3. เพื่อจำลองการเคลื่อนที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ ในเครื่องยนต์โรตารี
4. เพื่อจำลองการเคลื่อนที่ของห้าเหลี่ยมรูโลซ จนถึง  $n$  เหลี่ยมรูโลซ ในเครื่องยนต์โรตารี

## 1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ผู้ศึกษาค้นคว้ามีความเข้าใจแนวคิดของสามเหลี่ยมรูโลซ และเครื่องยนต์โรตารี
2. ผู้ศึกษาค้นคว้าทราบคุณสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมรูโลซ และเครื่องยนต์โรตารี
3. แบบจำลองการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ที่มีลักษณะเป็นสามเหลี่ยมรูโลซ และห้องเผาไหม้ในเครื่องยนต์โรตารี
4. ผู้ศึกษาค้นคว้าสามารถสร้างแบบจำลองห้องเผาไหม้ของโรเตอร์ห้าเหลี่ยมรูโลซ และเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ในเครื่องยนต์โรตารี
5. สมบัติบางประการของห้าเหลี่ยมรูโลซ

## 1.4 ขอบเขตการศึกษา

1. สร้างแบบจำลองโรเตอร์และห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์สามเหลี่ยมรูโลซ
2. สร้างแบบจำลองโรเตอร์และห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์ห้าเหลี่ยมรูโลซ และ  $n$  เหลี่ยมรูโลซ

## 1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับสามเหลี่ยมรูโลซ
2. ศึกษาแนวคิดและสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมรูโลซ
3. ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับเครื่องยนตรोटารี
4. ศึกษาการเคลื่อนที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ ภายในเครื่องยนตรोटารี
5. จำลองสมการการเคลื่อนที่ของจุดยอดสามเหลี่ยมรูโลซ ภายในเครื่องยนตรोटารี
6. จำลองสมการการเคลื่อนที่ของจุดยอดห้าเหลี่ยมรูโลซ และเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ภายในเครื่องยนตรोटารี
7. หาความยาวของสามเหลี่ยมรูโลซ ที่เหมาะสม

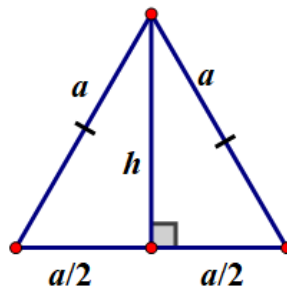
## บทที่ 2

# ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ในบทนี้ เราจะนำเสนอการสร้างสามเหลี่ยมรูโลซ ห้าเหลี่ยมรูโลซ เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ และสมบัติทางกายภาพต่าง ๆ นำไปสู่การจำลองโรเตอร์และห้องเผาไหม้ ในที่นี้ยังนำเสนอสมการพาราเมตริก ซึ่งใช้ในการอธิบายแบบจำลองต่าง ๆ

### 2.1 พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า

ทฤษฎีบท 2.1 พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า  $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  เมื่อ  $a$  คือ ความยาวด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่า



บทพิสูจน์. กำหนดให้  $h$  คือ ความสูงของสามเหลี่ยมด้านเท่า และ  $a$  คือ ความยาวด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่า

หา  $h$  โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorus Theorem) จะได้ว่า

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

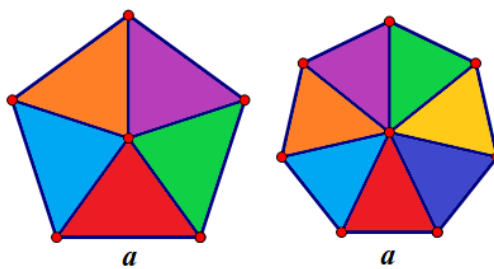
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

และจากสูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยม  $= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$  ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า} &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\end{aligned}$$

□

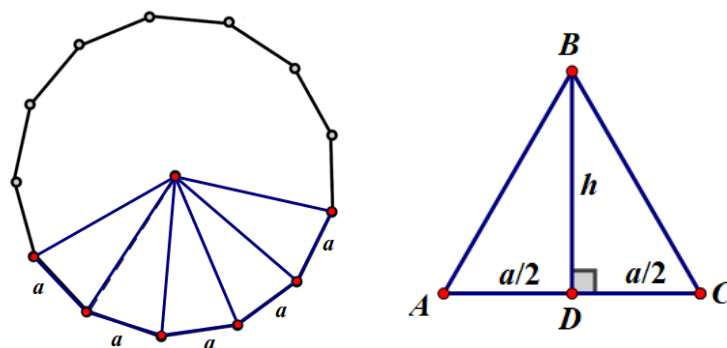
## ทฤษฎีบท 2.2 พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า



พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า หาได้จากการแบ่งรูปหลายเหลี่ยมออกเป็น  $n$  ชิ้นเท่า ๆ กัน โดยสามเหลี่ยมมีขนาดมุม  $\frac{2\pi}{n}$

ดังนั้น พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า  $= \frac{1}{4}na^2 \cot \frac{\pi}{n}$  เมื่อ  $n$  คือ จำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า และ  $a$  คือ ความยาวด้านของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

| จำนวนด้าน | 5                                   | 7                                   | $n$                                 |
|-----------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| พื้นที่   | $\frac{5}{4}a^2 \cot \frac{\pi}{5}$ | $\frac{7}{4}a^2 \cot \frac{\pi}{7}$ | $\frac{n}{4}a^2 \cot \frac{\pi}{n}$ |



บทพิสูจน์. จากรูป แบ่งรูปหลายเหลี่ยมออกเป็น  $n$  ชิ้นเท่า ๆ กัน

กำหนดให้  $h$  คือ ความสูงของสามเหลี่ยม  $ABC$  และ  $a$  คือ ความยาวด้านของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า พิจารณาการหา

พื้นที่สามเหลี่ยม  $ABC$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC &= \text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ADB + \text{พื้นที่สามเหลี่ยม } CDB \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h \right]\end{aligned}$$

หา  $h$  เพื่อนำไปหาพื้นที่สามเหลี่ยม  $ABC$  โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric ratio) เนื่องจาก  $\angle CBD = \frac{\pi}{n}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cot \frac{\pi}{n} &= \frac{a/2}{h} \\ h &= \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC &= 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{n} \right] \\ &= \frac{a^2 \cot \frac{\pi}{n}}{4}\end{aligned}$$

พื้นที่รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า มีค่าเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยม  $ABC$  จำนวน  $n$  ชิ้น นั่นคือ

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า} &= n \cdot \text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC \\ &= n \left( \frac{a^2 \cot \frac{\pi}{n}}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} n a^2 \cot \frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

□

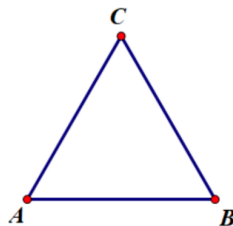


## 2.2 สามเหลี่ยมรูโลซ (Reuleaux Triangle)

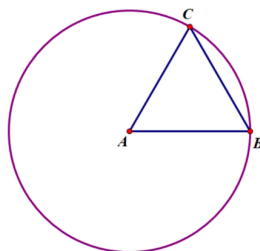
### 2.2.1 การสร้างสามเหลี่ยมรูโลซ (Construction of Reuleaux Triangle)

สามเหลี่ยมรูโลซ หรือ สามเหลี่ยมทรงกลม เป็นรูปทรงที่สร้างด้วยเส้นโค้งที่ตัดกัน เมื่อวาดวงกลมจากจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

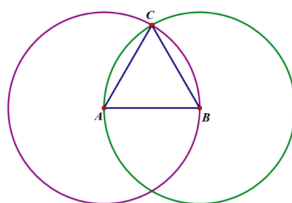
1. สร้างสามเหลี่ยมด้านเท่า  $ABC$



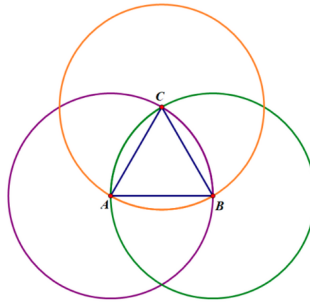
2. สร้างวงกลมผ่านจุด B และจุด C โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด A



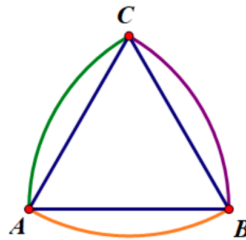
3. สร้างวงกลมผ่านจุด A และจุด C โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด B



4. สร้างวงกลมผ่านจุด A และจุด B โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด C

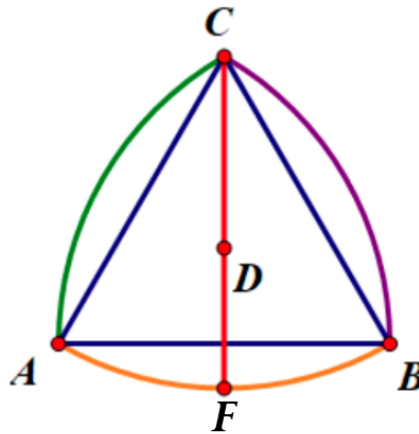


5. พื้นที่ตรงกลางที่ซ้อนทับกันของวงกลมทั้งสามวง คือ สามเหลี่ยมรูโลซ



**บทนิยาม 2.3** สามเหลี่ยม  $ABC$  เรียกว่าเป็น สามเหลี่ยมภายในสามเหลี่ยมรูโลซ

ข้อสังเกต สามเหลี่ยมภายในสามเหลี่ยมรูโลซ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และมีจุดศูนย์กลางที่จุด  $D$  ดังรูป



**บทนิยาม 2.4** จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมภายในสามเหลี่ยมรูโลซ

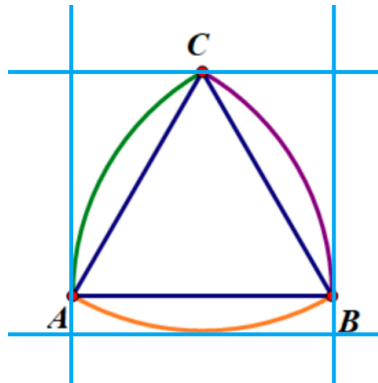
นั่นคือ จุด  $D$

**บทนิยาม 2.5** เส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ เส้นตรงซึ่งลากจากมุม  $C$  ผ่านจุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมรูโลซ ไปบรรจบกับเส้นรอบรูป นั่นคือ  $\overline{CF}$

ข้อสังเกต ความยาว  $\overline{CF}$  เท่ากับความยาว  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$

## 2.2.2 สมบัติทางคณิตศาสตร์ของสามเหลี่ยม Reuleaux (Mathematical Properties of Reuleaux Triangle)

คุณสมบัติที่ชัดเจนประการแรกของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ มีความกว้างคงที่เมื่อลากเส้นขนานสองเส้นสัมผัสกับพื้นผิวใด ๆ โดยไม่คำนึงถึงการวางแนวของเส้น และระยะห่างระหว่างเส้นขนาน คือ รัศมีของวงกลมที่ลากจากจุดยอดเพื่อสร้างสามเหลี่ยมรูโลซ



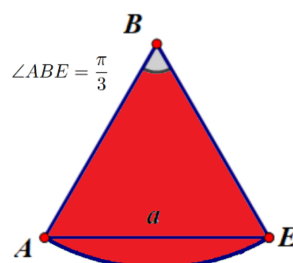
### พื้นที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ (Area of Reuleaux Triangle )

**บทนิยาม 2.6 คอร์ด** คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีปลายทั้งสองข้างอยู่บนเส้นรอบวง โดยเส้นคอร์ดที่ยาวที่สุดของวงกลมได้แก่ เส้นผ่านศูนย์กลาง

**บทนิยาม 2.7 เชกเตอร์** คือ ชิ้นส่วนของวงกลมที่เกิดจากรัศมีสองเส้นซึ่งลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดสองจุดบนวงกลม เชกเตอร์ที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง โดยเราสามารถหาพื้นที่ของเชกเตอร์ได้จาก

$$\text{พื้นที่เชกเตอร์} = \frac{\theta}{2\pi} \pi a^2 = \frac{\theta a^2}{2}$$

โดย  $\theta$  คือ ขนาดมุมเชกเตอร์  $\angle ABE$



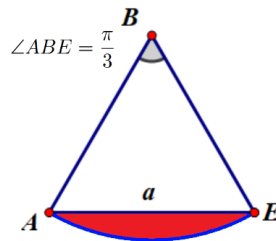
ในที่นี้สามเหลี่ยมด้านเท่า มีขนาดมุมเซกเตอร์  $\angle ABE = \frac{\pi}{3}$  นั่นคือ  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่เซกเตอร์สามเหลี่ยมด้านเท่า} &= \frac{\pi/3}{2} a^2 \\ &= \frac{\pi}{6} a^2\end{aligned}$$

โดย  $a$  คือ ความยาวด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่าภายในของสามเหลี่ยมรูโลซ

**บทนิยาม 2.8** เซกเมนต์ คือ ชิ้นส่วนของวงกลมที่เกิดจากการปิดล้อมด้วยส่วนโค้งของวงกลมและคอร์ด

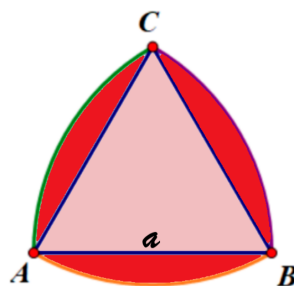
พื้นที่ของเซกเมนต์หาได้จาก พื้นที่เซกเตอร์ – พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า



กำหนดให้  $a$  คือ ความยาวด้านของสามเหลี่ยมภายในของสามเหลี่ยมรูโลซ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่เซกเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่า} &= \text{พื้นที่เซกเตอร์สามเหลี่ยมด้านเท่า} - \text{พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า} \\ &= \frac{\pi}{6} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\end{aligned}$$

**ประพจน์ 2.9** พื้นที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ  $\frac{1}{2} a^2 (\pi - \sqrt{3})$



โดย  $a$  คือ ความยาวด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่าภายในสามเหลี่ยมรูโลซ

บทพิสูจน์. สังเกตได้ว่า พื้นที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ หาได้จาก พื้นที่เซกเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่า 3 เซกเมนต์ รวมกับพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

$$\text{พื้นที่เซกเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\text{พื้นที่เซกเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่า 3 เซกเมนต์} = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\text{จากทฤษฎีบท 2.2 พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยมรูโลซ} = \text{พื้นที่เซกเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่า 3 เซกเมนต์} + \text{พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า}$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$= \frac{1}{2}a^2 (\pi - \sqrt{3})$$

□

### ความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมรูโลซ (Perimeter of Reuleaux Triangle)

**บทนิยาม 2.10** ส่วนโค้งของวงกลม คือ ความยาวส่วนโค้งของวงกลม เป็นระยะที่วัดได้ตามความยาวของเส้นรอบวง กำหนดให้  $a$  คือ ความยาวด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่าภายในสามเหลี่ยมรูโลซ และ  $\theta$  คือ มุมของสามเหลี่ยมด้านเท่าภายในสามเหลี่ยมรูโลซ

$$\text{ส่วนโค้งของวงกลม} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi a = \theta a$$

**ประพจน์ 2.11** ความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ  $\pi a$

บทพิสูจน์. สังเกตได้ว่า ความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมรูโลซ หาได้จากส่วนโค้งของวงกลม 3 ส่วน

$$\text{ความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมรูโลซ} = \text{ความยาวส่วนโค้ง 3 ส่วน}$$

$$= 3 \cdot \theta a$$

ในที่นี้สามเหลี่ยมด้านเท่า มีขนาดมุม  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ดังนั้น

$$\text{ความยาวรอบรูป สามเหลี่ยมรูโลซ} = 3 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot a$$

$$= \pi a$$



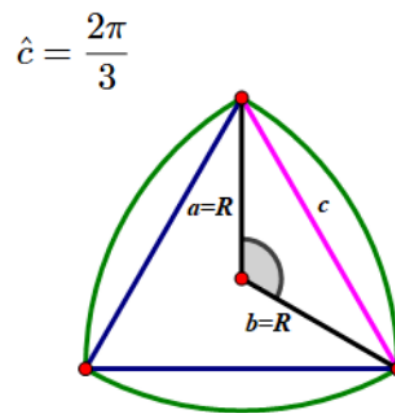
### ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ

กำหนดให้  $R$  คือ ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ ไปยังมุมของสามเหลี่ยมรูโลซ

**ประพจน์ 2.12** ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ  $R\sqrt{3}$

**บทพิสูจน์.** เนื่องจากสามเหลี่ยมรูโลซ มีเส้นรอบรูปเป็นส่วนโค้งวงกลม ดังนั้น จึงสามารถใช้ด้านของสามเหลี่ยมภายในในการคำนวณหาความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ ได้

จากกฎของโคไซน์ (Law of Cosines)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{c}$



เมื่อ  $a = R$ ,  $b = R$  และ มุม  $\hat{c}$  มีขนาดเท่ากับ  $\frac{2\pi}{3}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c^2 &= R^2 + R^2 - 2R^2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= R^2 + R^2 - 2R^2 \left( -\frac{1}{2} \right) \\ &= 3R^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $c = R\sqrt{3}$

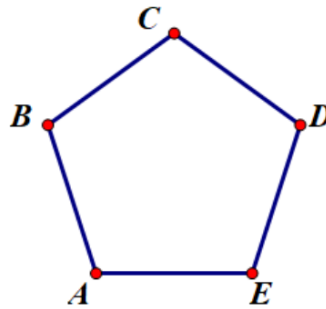
ดังนั้น เส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ มีค่าเท่ากับ  $c = R\sqrt{3}$



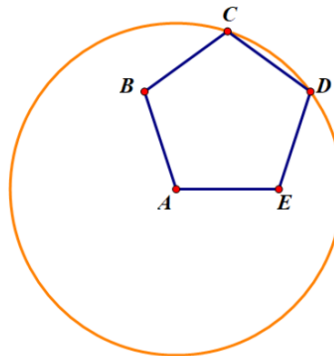
## 2.3 ห้าเหลี่ยมรูโลซ (Reuleaux Pentagon)

### 2.3.1 การสร้างห้าเหลี่ยมรูโลซ (Construction of Reuleaux Pentagon)

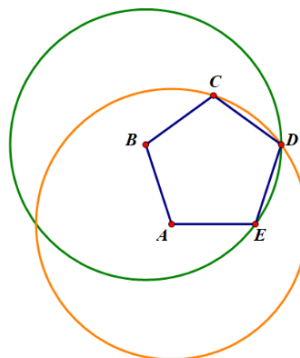
1. สร้างห้าเหลี่ยมด้านเท่า  $ABCDE$



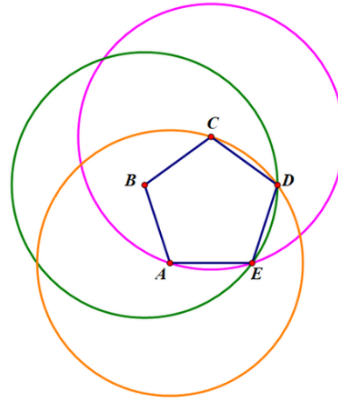
2. สร้างวงกลมผ่านจุด  $C$  และจุด  $D$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $A$



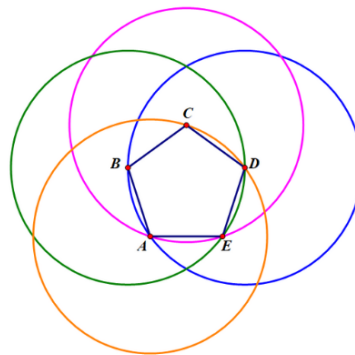
3. สร้างวงกลมผ่านจุด  $D$  และจุด  $E$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $B$



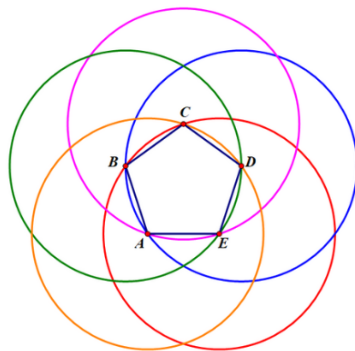
4. สร้างวงกลมผ่านจุด  $A$  และจุด  $E$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $C$



5. สร้างวงกลมผ่านจุด  $A$  และจุด  $B$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $D$

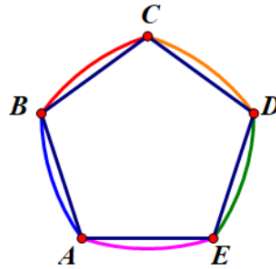


6. สร้างวงกลมผ่านจุด  $B$  และจุด  $C$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $E$



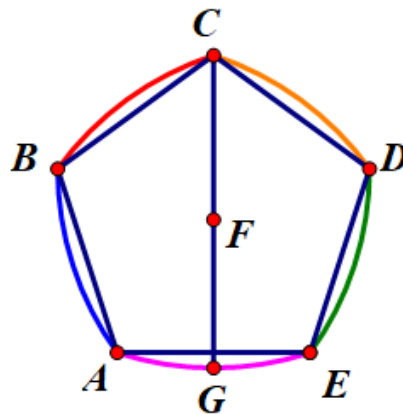


7. พื้นที่ตรงกลางที่ซ้อนทับกันของวงกลมทั้งห้าวง คือ ห้าเหลี่ยมรูโลซ

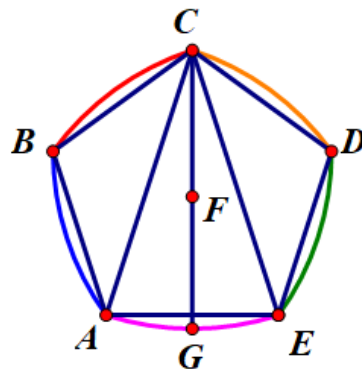


**บทนิยาม 2.13** ห้าเหลี่ยม  $ABCDE$  เรียกว่าเป็น ห้าเหลี่ยมภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ

ข้อสังเกต ห้าเหลี่ยมภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ เป็นห้าเหลี่ยมด้านเท่า และมีจุดศูนย์กลางที่จุด  $F$  ดังรูป



**บทนิยาม 2.14** จุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ จุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ นั่นคือ จุด  $F$

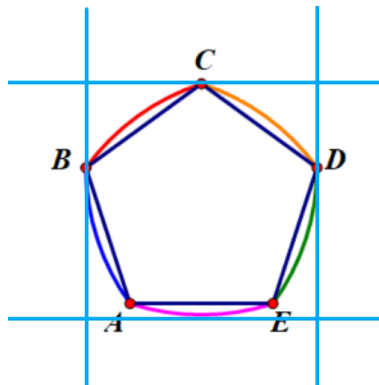


**บทนิยาม 2.15** เส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ เส้นตรงซึ่งลากจากมุม  $C$  ผ่านจุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ ไปบรรจบกับเส้นรอบรูป ดังรูปข้างต้น นั่นคือ  $\overline{CG}$

ข้อสังเกต ความยาว  $\overline{CG}$  มีความยาวเท่ากับ  $\overline{AC}$  และ  $\overline{EC}$

### 2.3.2 สมบัติทางคณิตศาสตร์ของห้าเหลี่ยมรูโลซ (Mathematical Properties of Reuleaux Pentagon)

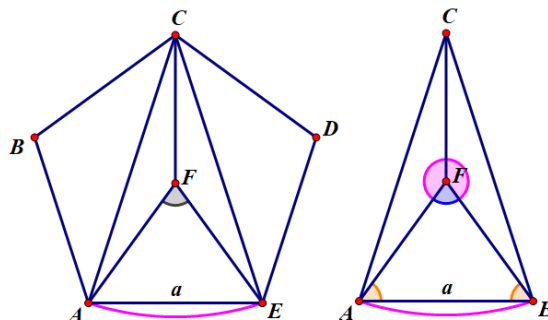
คุณสมบัติที่ชัดเจนประการแรกของห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ มีความกว้างคงที่เมื่อลากเส้นขนานสองเส้นสัมผัสกับพื้นผิวใด ๆ โดยไม่คำนึงถึงการวางแนวของเส้น และระยะห่างระหว่างเส้นขนาน คือ รัศมีของวงกลมที่ลากจากจุดยอดเพื่อสร้างห้าเหลี่ยมรูโลซ



#### พื้นที่ของห้าเหลี่ยมรูโลซ (Area of Reuleaux Pentagon)

**บทนิยาม 2.6** คอร์ด คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีปลายทั้งสองข้างอยู่บนเส้นรอบวง โดยเส้นคอร์ดที่ยาวที่สุดของวงกลมได้แก่ เส้นผ่านศูนย์กลาง

**บทนิยาม 2.7** เชกเตอร์ คือ ชิ้นส่วนของวงกลมที่เกิดจากรัศมีสองเส้นซึ่งลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดสองจุดบนวงกลม เชกเตอร์ที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง โดยเราสามารถหาพื้นที่ของเชกเตอร์ได้จาก



$$m\angle ACE = \frac{\pi}{5}$$

$$m\angle AFE = \frac{2\pi}{5}$$

$$m\angle FAE = \frac{3\pi}{10}$$

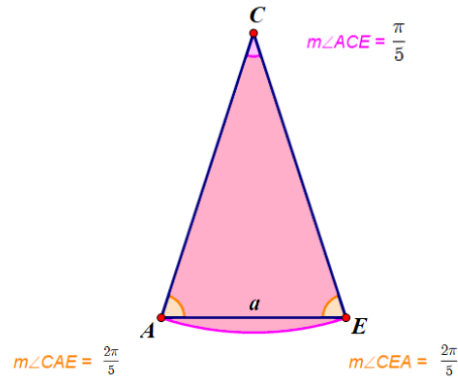
$$m\angle FEA = \frac{3\pi}{10}$$

$$m\angle CFA = \frac{4\pi}{5}$$

$$m\angle EFC = \frac{4\pi}{5}$$

$$m\angle CAE = \frac{2\pi}{5}$$

$$m\angle CEA = \frac{2\pi}{5}$$



$$\text{จากบทนิยาม 2.7 พื้นที่เซกเตอร์} = \frac{\theta}{2\pi} \pi a^2$$

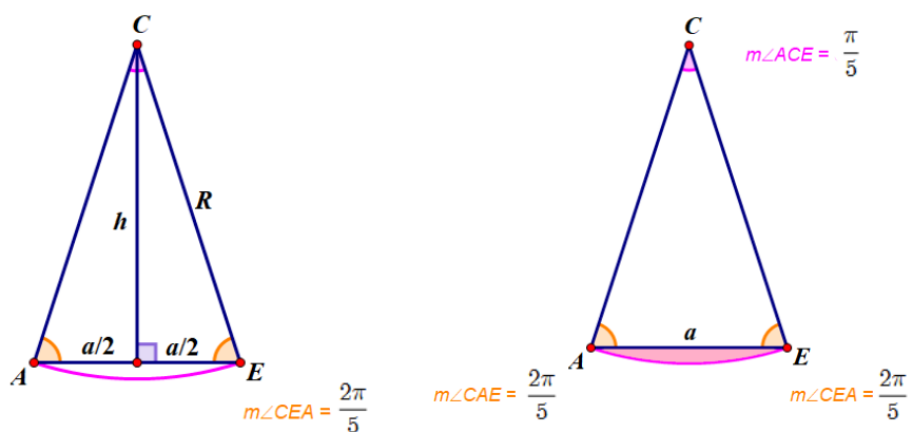
ในที่นี้ห้าเหลี่ยมด้านเท่า มีขนาดมุมเซกเตอร์  $\theta = \frac{\pi}{5}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่เซกเตอร์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า} &= \frac{\pi/5}{2} a^2 \\ &= \frac{\pi}{10} a^2 \end{aligned}$$

โดย  $a$  คือ ความยาวด้านของห้าเหลี่ยมด้านเท่าภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ

**บทนิยาม 2.8 เซกเมนต์** คือ ชิ้นส่วนของวงกลมเกิดจากการปิดล้อมด้วยส่วนโค้งของวงกลมและคอร์ด

ในที่นี้พื้นที่ของเซกเมนต์หาได้จาก พื้นที่เซกเตอร์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า – พื้นที่สามเหลี่ยม  $ACE$



หาพื้นที่สามเหลี่ยม  $ACE$  กำหนดให้  $h$  คือ ความสูงของสามเหลี่ยม  $ACE$  และ  $a$  คือ ความยาวด้านของห้าเหลี่ยมด้านเท่าภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ และ  $R$  คือ ระยะทาง  $\overline{CE}$  หรือ รัศมีของวงกลม

หา  $h$  เพื่อนำไปหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม  $ACE$  โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\cot \frac{\pi}{5} = \frac{h}{a/2}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{5}$$

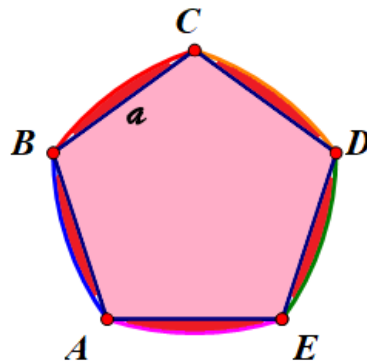
และจากสูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยม  $= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$  ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ACE &= 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \cdot \left( \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{5} \right) \right] \\ &= \frac{a^2 \cot \frac{\pi}{5}}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\text{พื้นที่เซกเมนต์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า} = \left( \frac{\pi}{10} a^2 \right) - \left( \frac{a^2 \cot \frac{\pi}{5}}{4} \right)$$

**ประพจน์ 2.16** พื้นที่ของห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ  $\frac{\pi}{2} a^2$



โดย  $a$  คือ ความยาวด้านของห้าเหลี่ยมด้านเท่าภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ

บทพิสูจน์. สังเกตได้ว่า พื้นที่ของห้าเหลี่ยมรูโลซ หาได้จาก พื้นที่เซกเมนต์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า 5 เซกเมนต์ รวมกับพื้นที่ห้าเหลี่ยมด้านเท่า

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่เซกเมนต์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า} &= \left(\frac{\pi}{10}a^2\right) - \left(\frac{a^2 \cot \frac{\pi}{5}}{4}\right) \\ \text{พื้นที่เซกเมนต์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า 5 เซกเมนต์} &= 5 \left[ \left(\frac{\pi}{10}a^2\right) - \left(\frac{a^2 \cot \frac{\pi}{5}}{4}\right) \right] \\ &= \left(\frac{\pi}{2}a^2\right) - \left(\frac{a^2 5 \cot \frac{\pi}{5}}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\text{จากทฤษฎีบท 2.2 พื้นที่ห้าเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{5}{4}a^2 \cot \frac{\pi}{5}$$

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ห้าเหลี่ยมรูโลซ} &= \text{พื้นที่เซกเมนต์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า 5 เซกเมนต์} + \text{พื้นที่ห้าเหลี่ยมด้านเท่า} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}a^2\right) - \left(\frac{a^2 5 \cot \frac{\pi}{5}}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}a^2 \cot \frac{\pi}{5}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}a^2\end{aligned}$$

□

### ความยาวรอบรูปของห้าเหลี่ยมรูโลซ (Perimeter of Reuleaux Pentagon)

**บทนิยาม 2.10** ส่วนโค้งของวงกลม คือ ความยาวส่วนโค้งของวงกลม เป็นระยะที่วัดได้ตามความยาวของเส้นรอบวง กำหนดให้  $a$  คือ ความยาวด้านของห้าเหลี่ยมด้านเท่าภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ และ  $\theta$  คือ มุมห้าเหลี่ยมด้านเท่าภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ

$$\text{ส่วนโค้งของวงกลม} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi a = \theta a$$

**ประพจน์ 2.17** ความยาวรอบรูปของห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ  $\pi a$

บทพิสูจน์. สังเกตได้ว่า ความยาวรอบรูปของห้าเหลี่ยมรูโลซ หาได้จากส่วนโค้งของวงกลม 5 ส่วน

$$\begin{aligned}\text{ความยาวรอบรูปของห้าเหลี่ยมรูโลซ} &= \text{ความยาวส่วนโค้ง 5 ส่วน} \\ &= 5 \cdot \theta a\end{aligned}$$

ในที่นี้ห้าเหลี่ยมภายในห้าเหลี่ยมด้านเท่า มีขนาดมุม  $\theta = \frac{\pi}{5}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{ความยาวรอบรูปของห้าเหลี่ยมรูโลซ} &= 5 \cdot \frac{\pi}{5} \cdot a \\ &= \pi a\end{aligned}$$

□

ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ

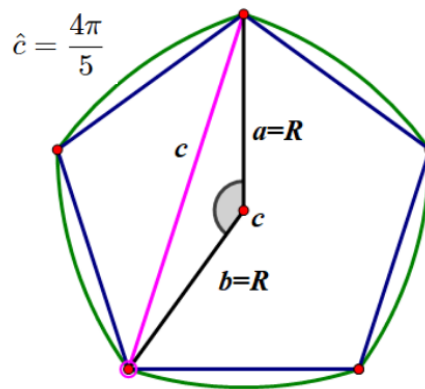
**ประพจน์ 2.18** ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ  $R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)}$

โดย  $R$  คือ ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ ไปยังมุมของห้าเหลี่ยมรูโลซ

*บทพิสูจน์.* เนื่องจากห้าเหลี่ยมรูโลซ มีเส้นรอบรูปเป็นส่วนโค้งวงกลม ดังนั้น จึงสามารถใช้ด้านของห้าเหลี่ยมภายใน

ในการคำนวณหาความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซได้

$$\text{จากกฎของโคไซน์ } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{c}$$



เมื่อ  $a = R$ ,  $b = R$  และ มุม  $\hat{c}$  มีขนาดเท่ากับ  $\frac{4\pi}{5}$  จะได้ว่า

$$c^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \left( \cos \frac{4\pi}{5} \right)$$

$$\text{นั่นคือ } c = R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)}$$

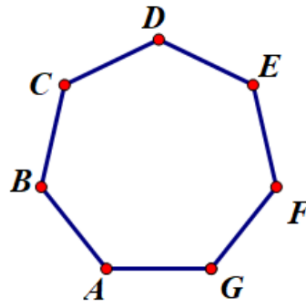
ดังนั้น เส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ มีค่าเท่ากับ  $c = R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)}$

□

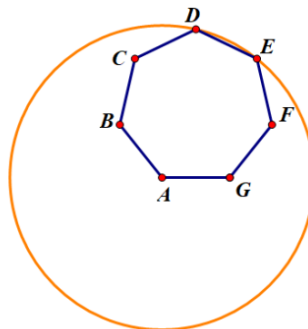
## 2.4 เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ( Reuleaux Heptagon)

### 2.4.1 การสร้างเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Construction of Reuleaux Heptagon)

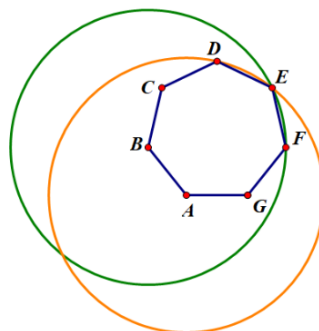
1. สร้างเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า  $ABCDEFG$



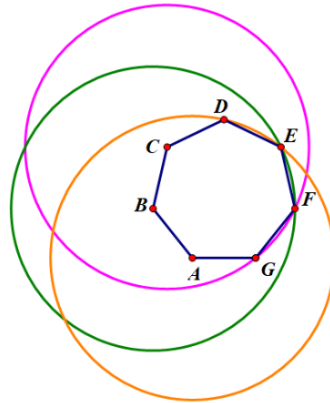
2. สร้างวงกลมผ่านจุด  $D$  และจุด  $E$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $A$



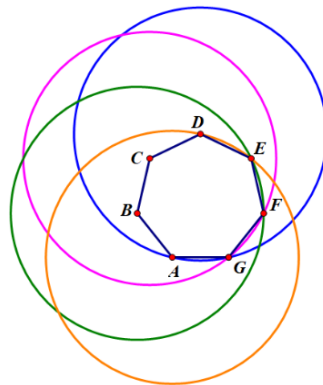
3. สร้างวงกลมผ่านจุด  $E$  และจุด  $F$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $B$



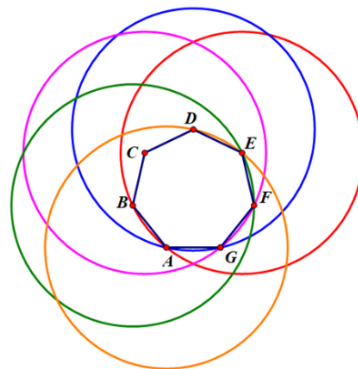
4. สร้างวงกลมผ่านจุด  $F$  และจุด  $G$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $C$



5. สร้างวงกลมผ่านจุด  $A$  และจุด  $G$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $D$

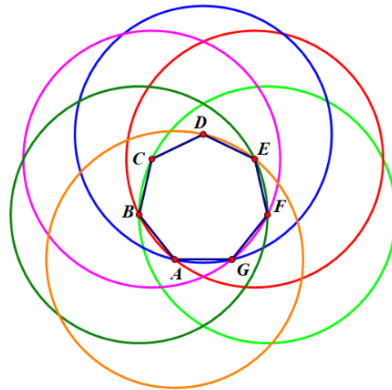


6. สร้างวงกลมผ่านจุด  $A$  และจุด  $B$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $E$

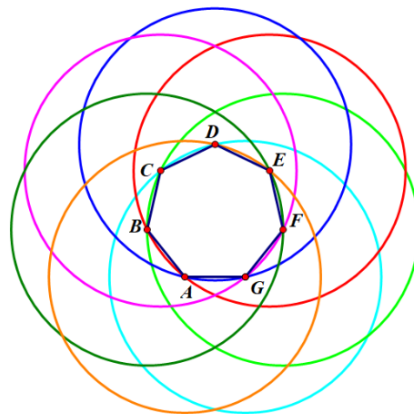




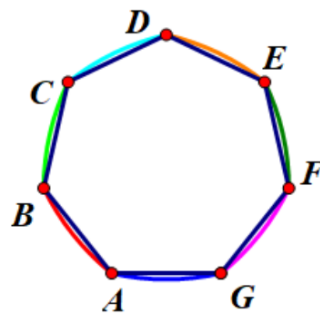
7. สร้างวงกลมผ่านจุด  $B$  และจุด  $C$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $F$



8. สร้างวงกลมผ่านจุด  $C$  และจุด  $D$  โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด  $G$

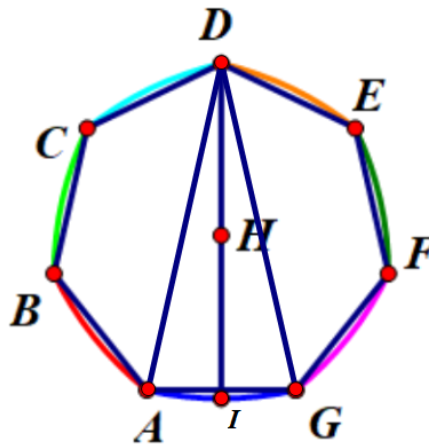


9. พื้นที่ตรงกลางที่ซ้อนทับกันของวงกลมทั้งเจ็ดวง คือ เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ



**บทนิยาม 2.19** เจ็ดเหลี่ยม  $ABCDEFGG$  เรียกว่าเป็น เจ็ดเหลี่ยมภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

ข้อสังเกต เจ็ดเหลี่ยมภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ เป็นเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า และมีจุดศูนย์กลางที่จุด  $H$  ดังรูป



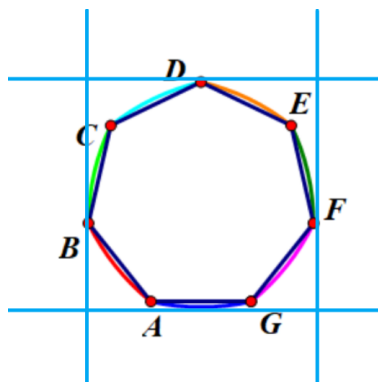
**บทนิยาม 2.20** จุดศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ คือ จุดศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

**บทนิยาม 2.21** เส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ คือ เส้นตรงซึ่งลากจากมุมผ่านจุดศูนย์กลางของรูปเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ไปบรรจบกับเส้นรอบรูป ดังรูปข้างต้น นั่นคือ  $\overline{DI}$

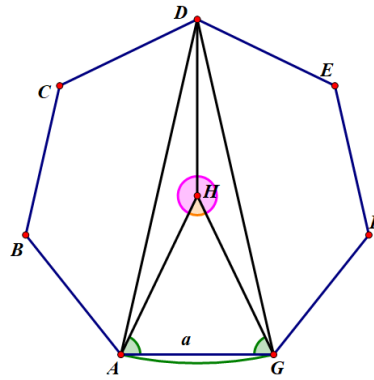
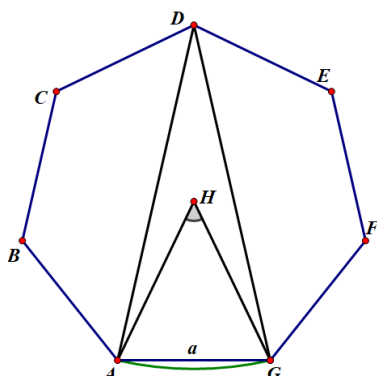
ข้อสังเกต ความยาว  $\overline{DI}$  มีความยาวเท่ากับ  $\overline{DA}$  และ  $\overline{DG}$

## 2.4.2 สมบัติทางคณิตศาสตร์ของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Mathematical Properties of Reuleaux Heptagon)

คุณสมบัติที่ชัดเจนประการแรกของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ คือ มีความกว้างคงที่เมื่อลากเส้นขนานสองเส้นสัมผัสกับพื้นผิวใด ๆ โดยไม่คำนึงถึงการวางแนวของเส้น และระยะห่างระหว่างเส้นขนาน คือ รัศมีของวงกลมที่ลากจากจุดยอดเพื่อสร้างเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ



## พื้นที่เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Area of Reuleaux Heptagon)

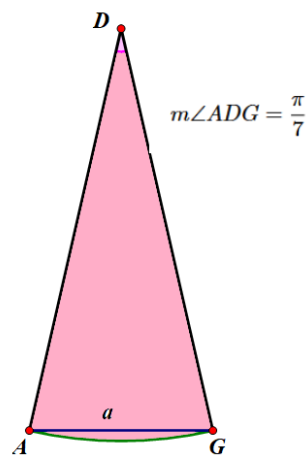


$$m\angle AGH = \frac{2\pi}{7}$$

$$m\angle DHA = m\angle DHG = \frac{6\pi}{7}$$

$$m\angle ADH = m\angle GDH = \frac{\pi}{14}$$

$$m\angle ADG = \frac{\pi}{7}$$

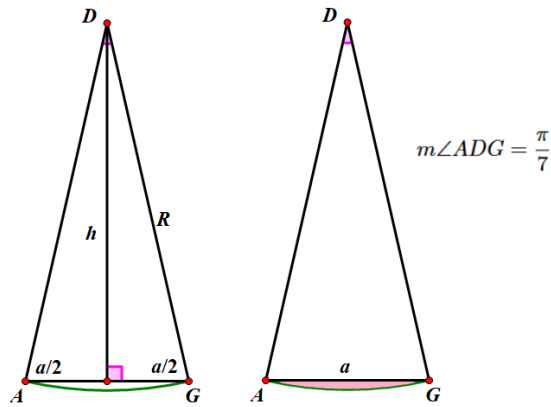


ในที่นี้  $\angle ADG = \frac{\pi}{7}$  นั่นคือ  $\theta = \frac{\pi}{7}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่เซกเตอร์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า} &= \frac{\pi/7}{2} a^2 \\ &= \frac{\pi}{14} a^2 \end{aligned}$$

โดย  $a$  คือ ความยาวด้านของเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่าภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

พื้นที่เซกเตอร์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า-พื้นที่เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า



หาพื้นที่สามเหลี่ยม  $ADG$  กำหนดให้  $h$  คือ ความสูงของสามเหลี่ยม  $ADG$  และ  $a$  คือ ความยาวด้านของเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่าภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ และ  $R$  คือ ระยะทาง  $\overline{DG}$  หรือ รัศมีของวงกลม

หา  $h$  เพื่อนำไปหาพื้นที่สามเหลี่ยม  $ADG$  โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric ratio) จะได้ว่า

$$\cot \frac{\pi}{14} = \frac{h}{a/2}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{14}$$

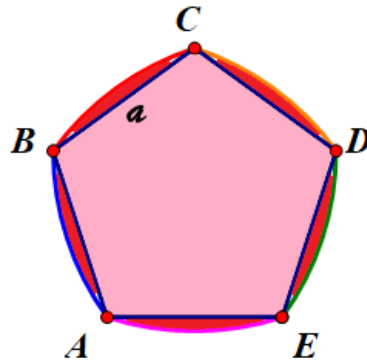
และจากสูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยม  $= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$  ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ACE &= 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \cdot \left( \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{14} \right) \right] \\ &= \frac{a^2 \cot \frac{\pi}{14}}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\text{พื้นที่เซกเมนต์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า} = \left( \frac{\pi}{14} a^2 \right) - \left( \frac{a^2 \cot \frac{\pi}{14}}{4} \right)$$

**ประพจน์ 2.22** พื้นที่ของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ คือ  $\frac{\pi}{2}a^2$



โดย  $a$  คือ ความยาวด้านของเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่าภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

**บทพิสูจน์.** สังเกตได้ว่า พื้นที่ของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ หาได้จาก พื้นที่เซกเมนต์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า 7 เซกเมนต์ รวมกับพื้นที่เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า

$$\text{พื้นที่เซกเมนต์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า} = \left(\frac{\pi}{14}a^2\right) - \left(\frac{a^2 \cot \frac{\pi}{14}}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่เซกเมนต์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า 7 เซกเมนต์} &= 7 \left[ \left(\frac{\pi}{14}a^2\right) - \left(\frac{a^2 \cot \frac{\pi}{14}}{4}\right) \right] \\ &= \frac{\pi}{2}a^2 - \left(\frac{a^2 7 \cot \frac{\pi}{14}}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{จากทฤษฎีบท 2.2 พื้นที่เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{7}{4}a^2 \cot \frac{\pi}{7}$$

$$\text{พื้นที่เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ} = \text{พื้นที่เซกเมนต์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า 7 เซกเมนต์} + \text{พื้นที่เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2}a^2 - \left(\frac{a^2 7 \cot \frac{\pi}{14}}{4}\right) + \frac{7}{4}a^2 \cot \frac{\pi}{7} \\ &= \frac{\pi}{2}a^2 \end{aligned}$$

□

#### ความยาวรอบรูปเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Perimeter of Reuleaux Heptagon)

กำหนดให้  $a$  คือ ความยาวด้านของเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่าภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ และ  $\theta$  คือ มุมสามเหลี่ยมภายในเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

**ประพจน์ 2.23** ความยาวรอบรูปของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ คือ  $\pi a$

บทพิสูจน์. สังเกตได้ว่า ความยาวรอบรูปของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ หาได้จากส่วนโค้งของวงกลม 7 ส่วน

$$\begin{aligned}\text{ความยาวรอบรูปของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ} &= \text{ความยาวส่วนโค้ง 7 ส่วน} \\ &= 7\theta a\end{aligned}$$

ในที่นี้สามเหลี่ยมด้านเท่า มีขนาดมุม  $\theta = \frac{\pi}{7}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{ความยาวรอบรูปสามเหลี่ยมรูโลซ} &= 7 \cdot \frac{\pi}{7} \cdot a \\ &= \pi a\end{aligned}$$

□

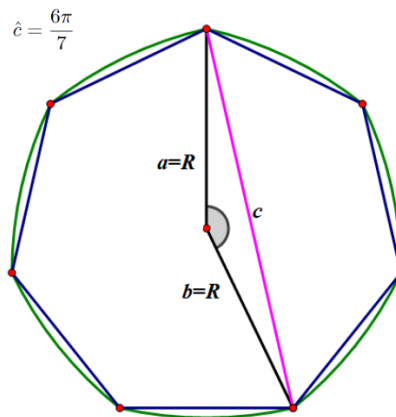
ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

**ประพจน์ 2.24** ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ คือ  $R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{6\pi}{7}\right)}$

โดย  $R$  คือ ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ไปยังมุมของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

บทพิสูจน์. เนื่องจากห้าเหลี่ยมรูโลซ มีเส้นรอบรูปเป็นวงกลม ดังนั้น จึงสามารถใช้ด้านของเจ็ดเหลี่ยมภายในในการคำนวณหาความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ได้

จากกฎของโคไซน์ (Law of Cosines)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c$



เมื่อ  $a = R$ ,  $b = R$  และ มุม  $c$  มีขนาดเท่ากับ  $\frac{6\pi}{7}$  จะได้ว่า

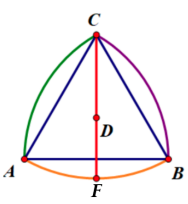
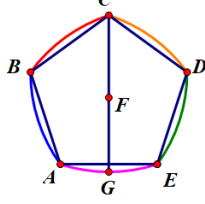
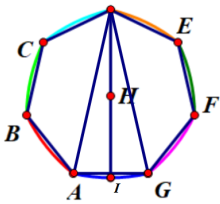
$$c^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \left( \cos \frac{6\pi}{7} \right)$$

$$\text{นั่นคือ } c = R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{6\pi}{7}\right)}$$

ดังนั้น เส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ มีค่าเท่ากับ  $c = R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{6\pi}{7}\right)}$

□

สรุปสมบัติของรูปหลายเหลี่ยมรูโลซ (Summarize properties of Reuleaux polygon)

|                          |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| รูป                      |  |  |  |
| พื้นที่                  | $\frac{1}{2}a^2(\pi - \sqrt{3})$                                                  | $\frac{\pi}{2}a^2$                                                                 | $\frac{\pi}{2}a^2$                                                                  |
| ความยาวรอบรูป            | $\pi a$                                                                           | $\pi a$                                                                            | $\pi a$                                                                             |
| ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง | $R\sqrt{3}$                                                                       | $R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)}$                                    | $R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{6\pi}{7}\right)}$                                     |

## 2.5 สมการพาราเมตริก

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุใน 2 มิติ ที่เวลา  $t$  ใด ๆ สมมติให้วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง  $(x, y)$  บนระนาบ 2 มิติ นั่นคือ  $x$  และ  $y$  จะแปรผันตาม  $t$  หมายความว่าเมื่อเวลา  $t$  เปลี่ยนไปตำแหน่งของวัตถุ  $(x, y)$  จะ เปลี่ยนไปด้วย เราจึงสามารถเขียน  $x$  และ  $y$  ในรูปฟังก์ชันต่อเนื่องของ  $t$  ดังนี้

$$x = x(t), y = y(t) \quad (2.1)$$

เรียก (2.1) ว่า สมการพาราเมตริก (parametric equation) ของเส้นโค้ง และเรียก  $t$  ว่า พารามิเตอร์ (parameter) โดยทั่วไปพารามิเตอร์  $t$  จะอยู่ในรูปของเวลาหรือไม่ก็ได้

**ตัวอย่าง 2.25**  $f(x) = x^5 + x + 15$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการพาราเมตริก

$$x(t) = t, y(t) = t^5 + t + 15$$

**ตัวอย่าง 2.26**  $x(t) = t, y(t) = t^5 + t + 15$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r} = t\vec{i} + (t^5 + t + 15)\vec{j}$$

## บทที่ 3

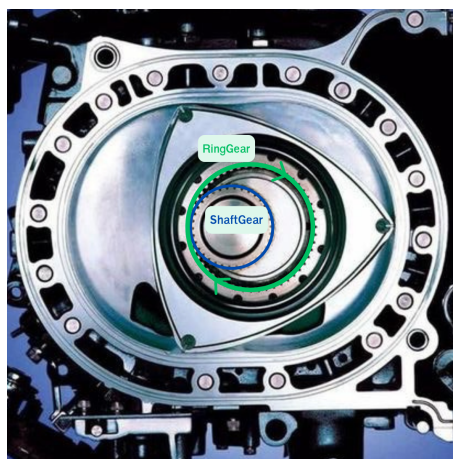
# ผลการศึกษา (Results)

ข้อสมมติฐานที่ว่า การเปลี่ยนโรเตอร์จากสามเหลี่ยมรูโลซ เป็นห้าเหลี่ยมรูโลซ จะทำให้เครื่องยนต์มีประสิทธิภาพสูงขึ้น ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราจึงทำการจำลองการเคลื่อนที่ต่าง ๆ ในเครื่องยนต์โรตารีสำหรับโรเตอร์สามเหลี่ยมรูโลซ ทั้งยังศึกษาการเคลื่อนที่และความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างอุปกรณ์ภายในเครื่องยนต์ เราพบว่า ลักษณะห้องเผาไหม้ คือ ภาพการเคลื่อนที่ของมุมสามเหลี่ยมรูโลซ ด้วยหลักการนี้ นำมาสู่การจำลองการเคลื่อนที่โรเตอร์ห้าเหลี่ยมรูโลซ ด้วยหลักการเดียวกันเราสามารถจำลองห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์  $n$  เหลี่ยมใด ๆ ได้

นอกจากนี้เราพบว่ารัศมีของโรเตอร์ที่มีความยาวสั้นหรือความยาวเกินไป สามารถทำให้แบบจำลองเกิดปัญหาได้ ในบทนี้จึงได้นำเสนอรัศมีของโรเตอร์ที่เหมาะสมเข้าไปด้วย

สุดท้ายของการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ขยายขนาดของห้องเผาไหม้เล็กน้อย เพื่อให้แบบจำลองเสมือนจริงมากขึ้น เนื่องจากทำให้ปลายของโรเตอร์ ไม่ทับกับห้องเผาไหม้

### 3.1 กระบวนการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ



การออกแบบของเครื่องยนต์โรตารี มีฟันเฟืองด้านในมีฟัน 20 ฟัน ในขณะที่เฟืองที่มีฟันด้านนอกขนาดใหญ่มี 30 ฟัน [7]



ดังนั้น ส่วนประกอบหลักที่สำคัญของการเคลื่อนที่ จึงประกอบไปด้วย

1. เฟืองของเพลลา (ShaftGear) (วงกลมสีน้ำเงิน) กำหนดให้เท่ากับ 2 หน่วย จากอัตราส่วนของจำนวนฟันเฟือง
2. เฟืองโรเตอร์สามเหลี่ยมรูโลซ (RingGear) (วงกลมสีเขียว) กำหนดให้เท่ากับ 3 หน่วย จากอัตราส่วนของจำนวนฟันเฟือง

โดยที่ เฟืองของเพลลาไม่มีการเคลื่อนที่ และ เฟืองโรเตอร์หมุนตามเข็มนาฬิกา

เราได้ศึกษาการเคลื่อนที่ของโรเตอร์และสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ [<https://www.youtube.com/watch?v=6BCgl2uumlI>] และได้ลำดับขั้นตอนการจำลอง ดังนี้

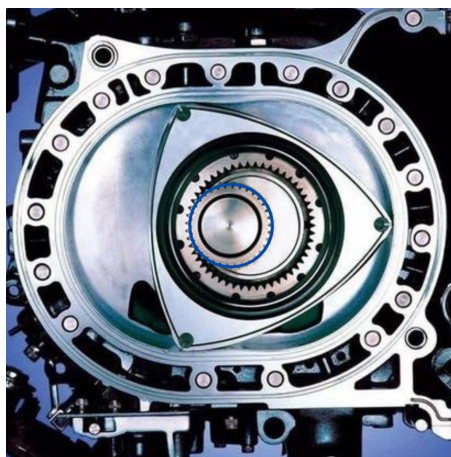
**ขั้นตอนที่ 1** สร้างฟังก์ชัน  $f(t) = -t\pi$  โดยที่  $t \in \mathbb{R}$

**หมายเหตุ** ฟังก์ชัน  $f$  ประกอบด้วย  $-1$  เนื่องจาก การเคลื่อนที่ของสามเหลี่ยมรูโลซ มีลักษณะตามเข็มนาฬิกา

ฟังก์ชัน  $f$  ประกอบด้วย  $\pi$  เพื่อให้เราพิจารณาค่ามุมมาตรฐานได้ เช่น  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  และ  $\frac{\pi}{2}$

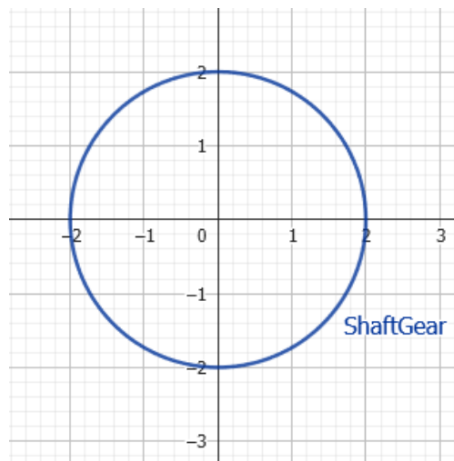
**ขั้นตอนที่ 2** จำลองเฟืองของเพลลา ที่ไม่มีการเคลื่อนที่

กำหนดให้  $\text{ShaftGear}(t)$  เป็นฟังก์ชันเฟืองของเพลลา ดังรูป



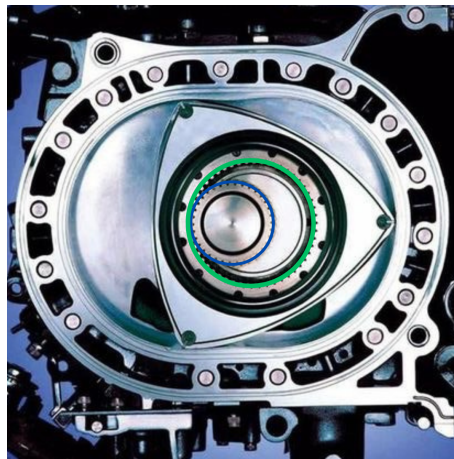
เนื่องจากว่า เฟืองของเพลลาเป็นวงกลมรัศมี 2 หน่วย และไม่มีการเคลื่อนที่ เฟืองของเพลลาจึงเป็นกราฟของ  $\text{ShaftGear}$

$$x = 2 \cos(t), \quad y = 2 \sin(t)$$



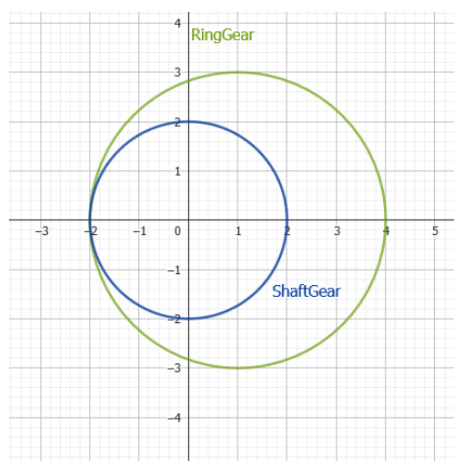
### ขั้นตอนที่ 3 จำลองวงกลมภายในสามเหลี่ยมรูโลซ

กำหนดให้  $\text{RingGear}(t)$  เป็นฟังก์ชันของวงกลมภายในสามเหลี่ยมรูโลซ ดังรูป



และมีรัศมียาว 3 หน่วย จึงได้สมการดังนี้

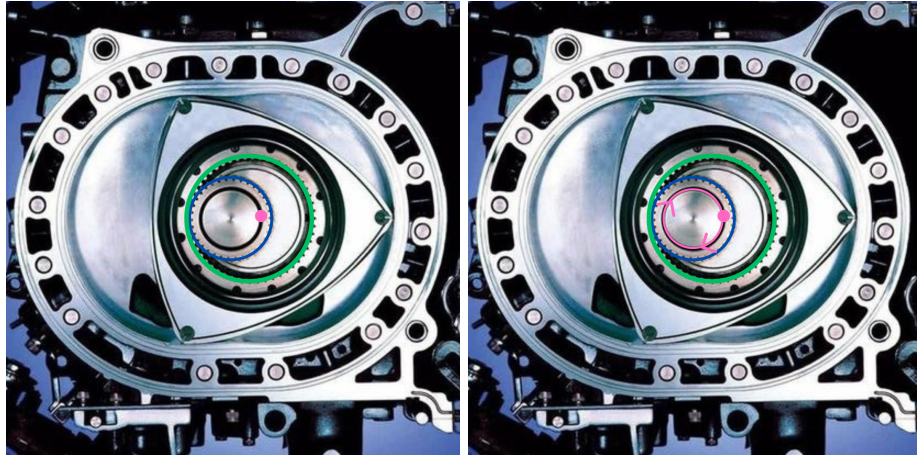
$$\text{RingGear}(t) = 3 \cos(t)\vec{i} + 3 \sin(t)\vec{j} + \text{CenterReuleaux}(t)$$



โดย กำหนดให้  $\text{CenterReuleaux}(t)$  เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ

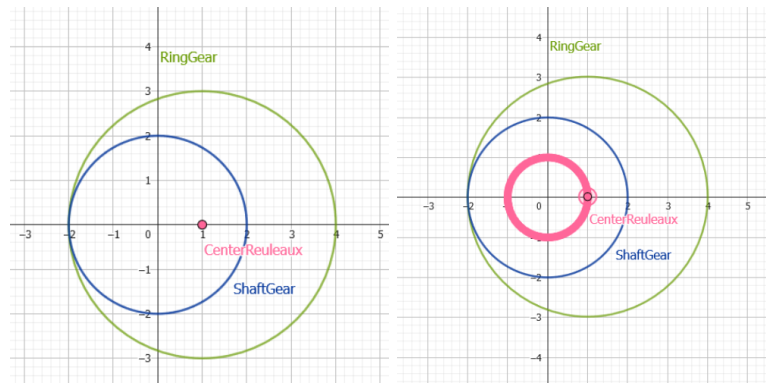
#### ขั้นตอนที่ 4 สร้างฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ จะเป็นวงกลมรัศมี 1 หน่วย ตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



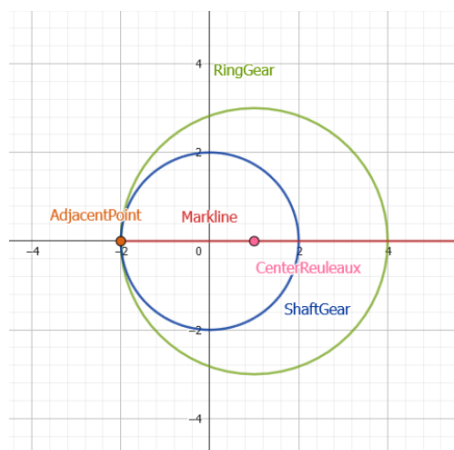
เราจึงได้ว่า

$$\text{CenterReuleaux}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$$

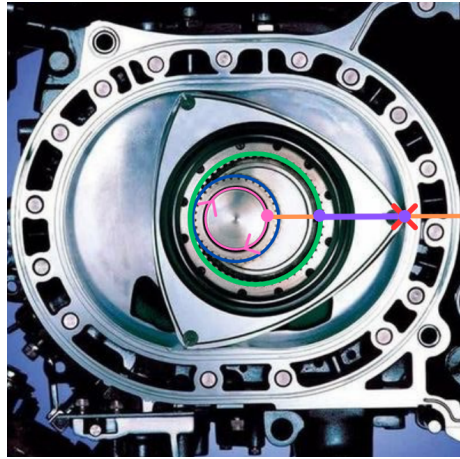


#### ขั้นตอนที่ 5 สร้างจุดและเส้น เพื่อสังเกตการเคลื่อนที่ของ RingGear

กำหนดให้ AdjacentPoint เป็นจุดสังเกตการเคลื่อนที่ของ RingGear ซึ่งเป็นจุดประชิดระหว่าง ShaftGear และ RingGear ดังรูป

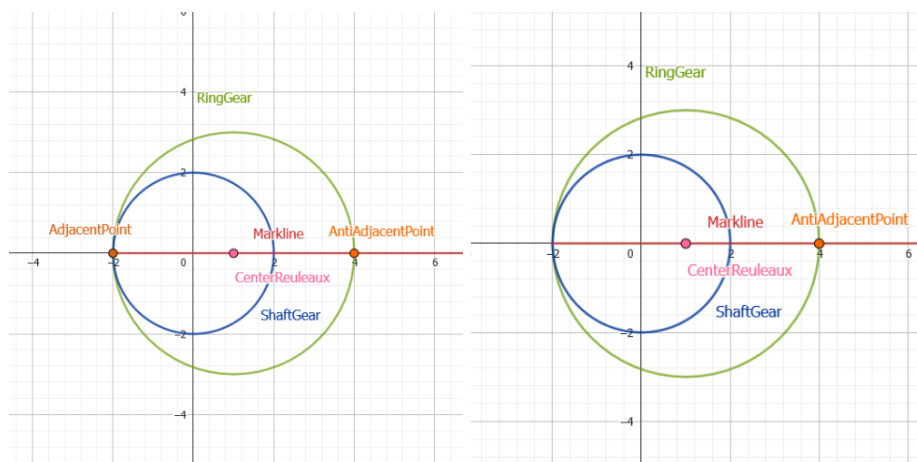


**ขั้นตอนที่ 6** กำหนดให้ Anti – AdjacentPoint ซึ่งเป็นจุดที่สะท้อนกับจุด AdjacentPoint โดยมีจุดศูนย์กลางของ RingGear เป็นจุดสะท้อน เราใช้จุด Anti – AdjacentPoint เป็นจุดสังเกตการเคลื่อนที่ของ RingGear และกำหนดให้ MarkLine เป็นเส้นระหว่างจุด CenterReuleaux และจุด Anti – AdjacentPoint โดยมี ความยาว 3 หน่วย ดังรูป

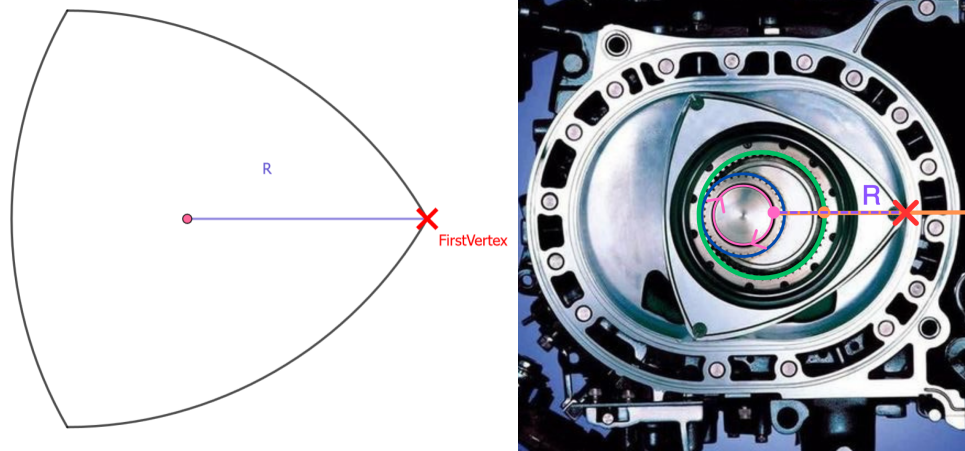


จะได้สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{Anti – AdjacentPoint}(t) &= (\cos f(t) + 3 \cos f(t))\vec{i} + (\sin f(t) + 3 \sin f(t))\vec{j} \\ &= 4 \cos f(t)\vec{i} + 4 \sin f(t)\vec{j}\end{aligned}$$



ขั้นตอนที่ 7 กำหนดให้  $R$  คือ ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมแรกของสามเหลี่ยมรูโลซ ในที่นี้เรียกว่า FirstVertex ดังรูป

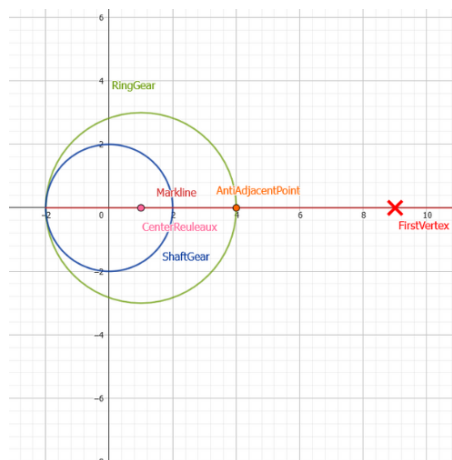


#### ข้อสังเกต

- FirstVertex เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบ CenterReuleaux( $t$ ) เพราะว่า FirstVertex อยู่ในแนวเดียวกันกับ MarkLine
- เนื่องจาก FirstVertex เคลื่อนที่กลับมายังจุดเริ่มต้น สัมพันธ์กับ CenterReuleaux เคลื่อนที่ผ่านจุดกำเนิด 3 ครั้ง จึงต้องใช้  $\frac{f(t)}{3}$

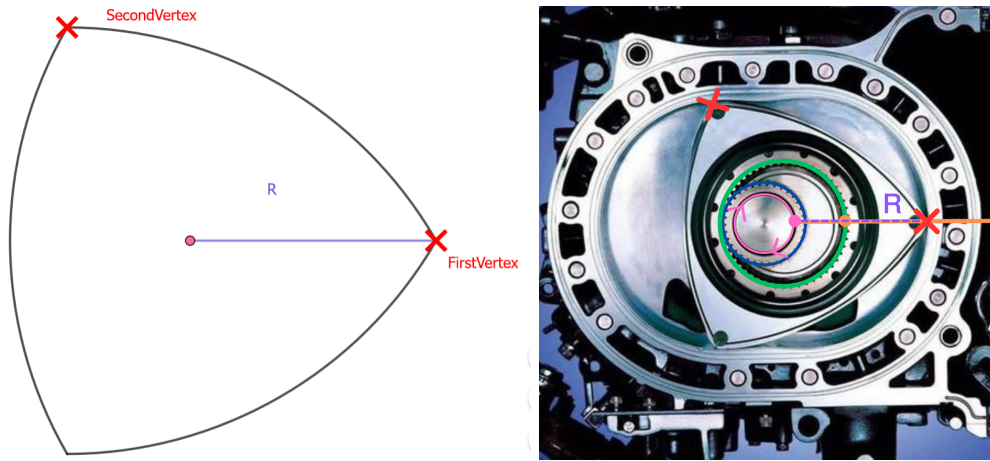
จากขั้นตอนที่ 4 จำลองการเคลื่อนที่ของ FirstVertex ได้ฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}\text{FirstVertex}(t) &= \left[ R \cos\left(\frac{t}{3}\right) \vec{i} + R \sin\left(\frac{t}{3}\right) \vec{j} \right] + \text{CenterReuleaux}(t) \\ &= \left[ \cos f(t) + R \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{j}\end{aligned}$$



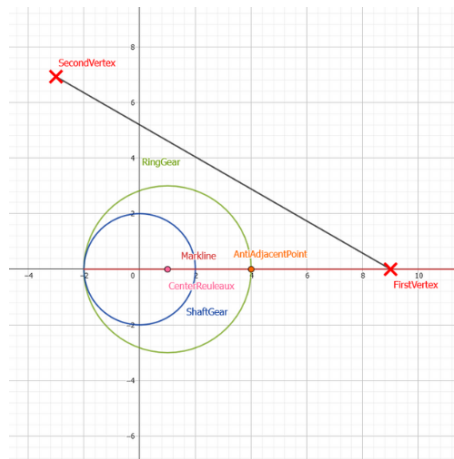


## ขั้นตอนที่ 8 จำลอง SecondVertex

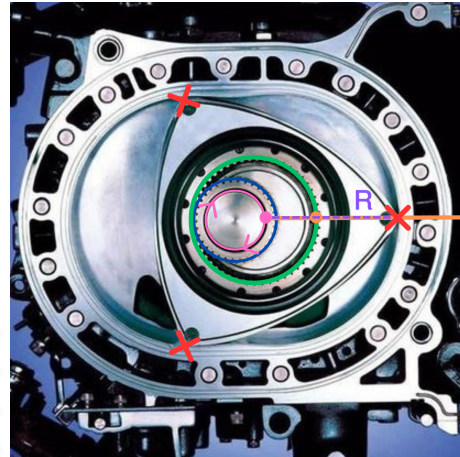
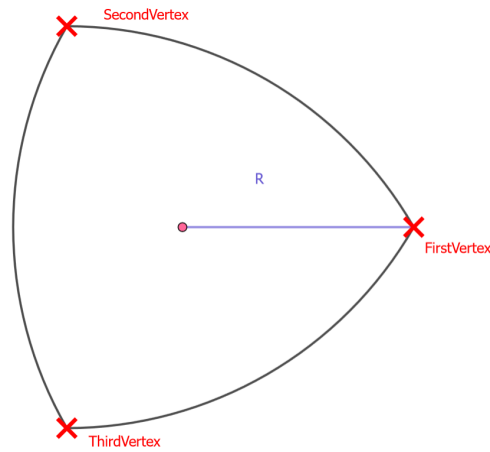


เนื่องจาก SecondVertex เคลื่อนที่เป็นวงกลม ขนาด  $R\sqrt{3}$  หน่วย รอบจุด FirstVertex และมีขนาดมุม  $\frac{5\pi}{6}$  และจากขั้นตอนที่ 7 จึงทำให้ได้ฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{SecondVertex}(t) &= R\sqrt{3} \left[ \cos \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \vec{j} \right] + \text{FirstVertex}(t) \\
 &= R\sqrt{3} \left[ \cos \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \vec{j} \right] \\
 &\quad + \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{3} \cos \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \right] \vec{i} + \left[ R\sqrt{3} \sin \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \right] \vec{j} \\
 &\quad + \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{3} \cos \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{3} \sin \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j}
 \end{aligned}$$

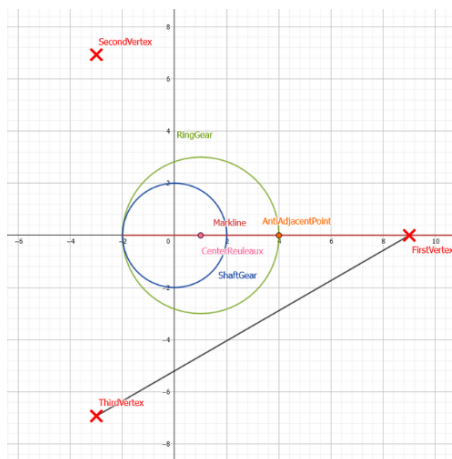


### ขั้นตอนที่ 9 จำลองจุดยอดที่ 3 ของสามเหลี่ยมรูโลซ

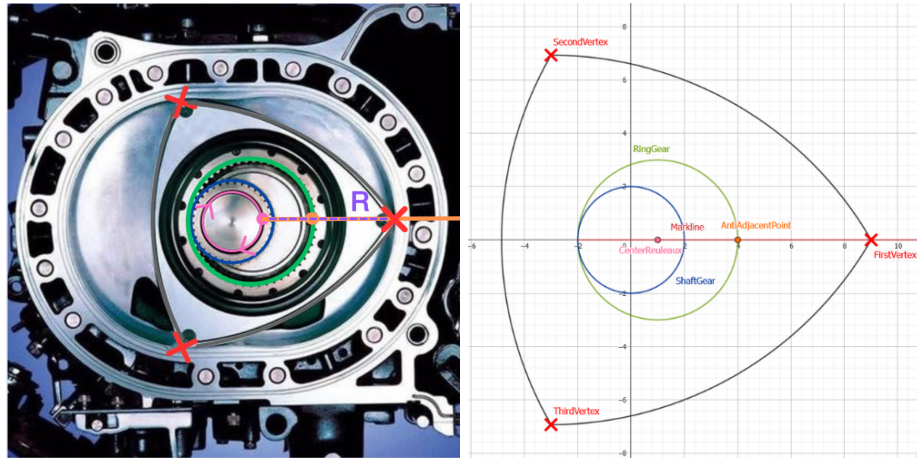


ในทำนองเดียวกัน ThirdVertex เคลื่อนที่เป็นวงกลม ขนาด  $R\sqrt{3}$  หน่วย รอบจุด FirstVertex และมีขนาดมุม  $-\frac{5\pi}{6}$  จึงทำให้ได้ฟังก์ชัน ดังนี้

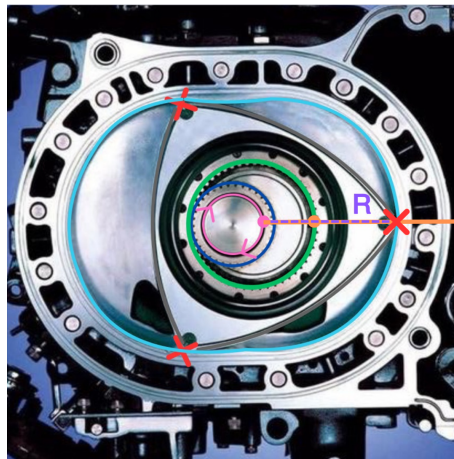
$$\begin{aligned} \text{ThirdVertex}(t) &= R\sqrt{3} \left[ \cos \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \vec{j} \right] + \text{FirstVertex}(t) \\ &= R\sqrt{3} \left[ \cos \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \vec{j} \right] \\ &\quad + \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \\ &= \left[ R\sqrt{3} \cos \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \right] \vec{i} + \left[ R\sqrt{3} \sin \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \right] \vec{j} \\ &\quad + \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \\ &= \left[ R\sqrt{3} \cos \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[ R\sqrt{3} \sin \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$



ขั้นตอนที่ 10 สร้างเส้นโค้งเชื่อมจุดยอดทั้ง 3 จุดยอด จะได้สามเหลี่ยมรูโลซ

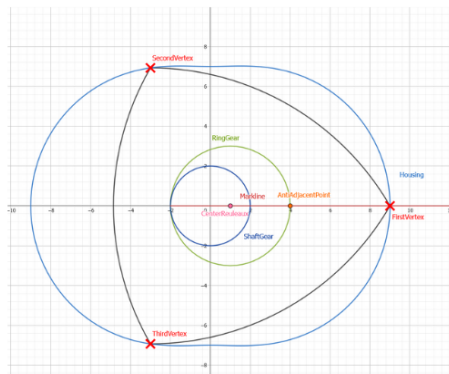


ขั้นตอนที่ 11 จำลองห้องเผาไหม้ของเครื่องยนต์โรตารี ดังรูป



สังเกตได้ว่า ทั้ง 3 มุมของสามเหลี่ยมรูโลซ มีการเคลื่อนที่ชิดกับขอบของ ห้องเผาไหม้ คือ กราฟกของห้องเผาไหม้ ดังนั้น จึงได้ฟังก์ชันห้องเผาไหม้ ดังนี้

$$x = R \cos \left( \frac{t}{3} \right) + \cos(t), y = R \sin \left( \frac{t}{3} \right) + \sin(t)$$



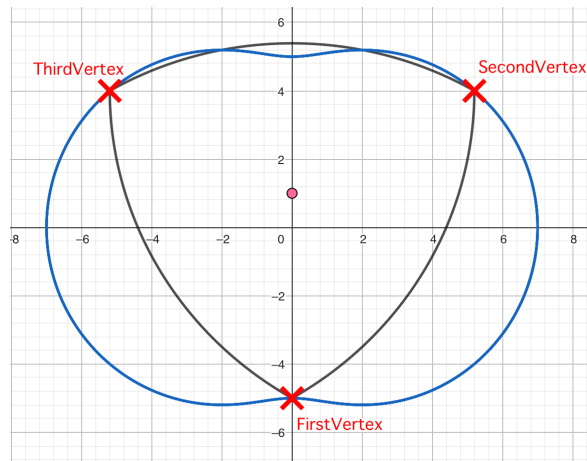


เพื่อความสะดวก ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมรูโลซ ไปยังมุมของรูปหลายเหลี่ยมรูโลซ เรียกว่า รัศมีรูปหลายเหลี่ยมรูโลซ

### 3.2 ระยะรัศมีของสามเหลี่ยมรูโลซ ที่เหมาะสม

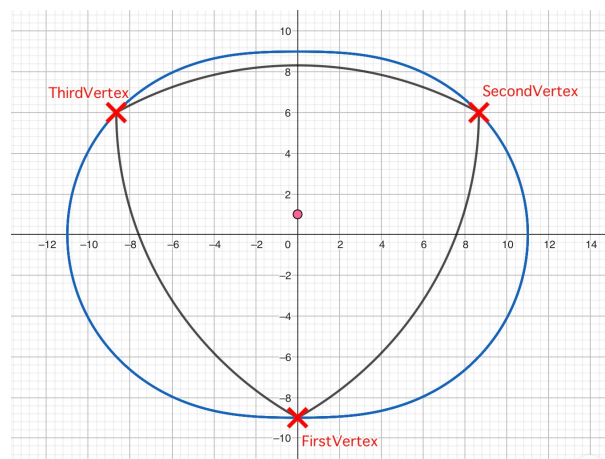
ถึงแม้ว่า มุมของสามเหลี่ยมรูโลซ จะวิ่งไปตามขอบของห้องเผาไหม้ แต่หากรัศมี  $R$  ไม่เหมาะสม อาจทำให้ด้านส่วนโค้งในแบบจำลองเกินขอบของห้องเผาไหม้ได้ ดังเช่น

เมื่อ  $R = 6$  จะได้ดังรูป



ซึ่งเกิดปัญหาโรเตอร์อยู่นอกพื้นที่ของห้องเผาไหม้ นอกจากนี้อาจทำให้เกิดช่องว่างระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้มากเกินไป ดังนี้

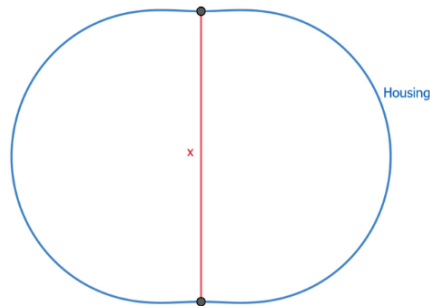
เมื่อ  $R = 8$  จะได้ดังรูป



ซึ่งเกิดปัญหาสามเหลี่ยมรูโลซ ไม่สัมผัสกับห้องเผาไหม้ทำให้เกิดช่องว่างมากเกินไป

จึงจำเป็นต้องหา  $R$  ที่เหมาะสม

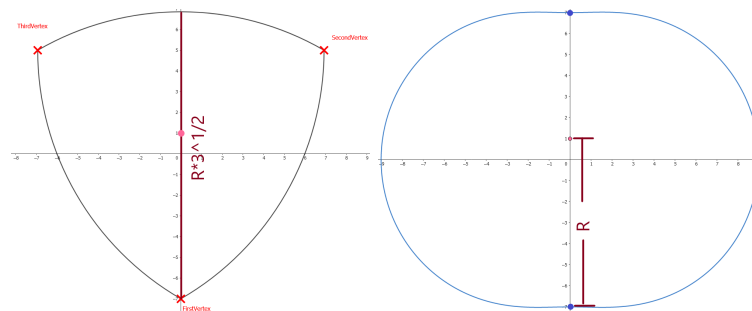
กำหนดให้  $x$  คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ ที่อยู่ตรงข้ามกัน นั่นคือ ระยะของเส้นตรง ดังรูป



**บทนิยาม 3.1** รัศมีที่เหมาะสม คือ  $R$  ที่ทำให้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกัน กับ เส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ เท่ากัน

**ทฤษฎีบท 3.2** ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของสามเหลี่ยมรูโลซ  $R$  ที่เหมาะสม

คือ  $4 + 2\sqrt{3}$



**บทพิสูจน์.** ข้อสังเกตจากรูป เส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R\sqrt{3}$  และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายังขอบของห้องเผาไหม้ เท่ากับ  $R - 1$  ดังนั้นระยะทางจากขอบของห้องเผาไหม้มายังขอบห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกันมีค่าเท่ากับ  $2(R - 1)$  จึงได้ว่า

$$R\sqrt{3} = 2(R - 1)$$

$$R = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{3}$$

ดังนั้นค่า  $R$  ที่เหมาะสมที่สุด มีค่าเท่ากับ  $4 + 2\sqrt{3}$

□

### 3.2.1 รัศมีของเพลาดัด ๆ สำหรับโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมรูโลซ

เนื่องจาก รัศมีของเพลามีหลายขนาด ดังนั้นเราจึงกำหนด  $r$  เป็นรัศมีใด ๆ ของเพลาดัด เพื่อนำไปประยุกต์ใช้สำหรับโรเตอร์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น

กำหนดให้  $r$  เป็นรัศมีของเฟลา ShaftGear จะได้ว่า

1. รัศมีของ CenterReuleaux คือ  $\frac{r}{2}$
2. รัศมีของ RingGear คือ  $\frac{3r}{2}$
3. ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมแรกของสามเหลี่ยมรูโลซ คือ  $R$   
จะได้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของจุดยอดทั้งสาม คือ

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j}$$

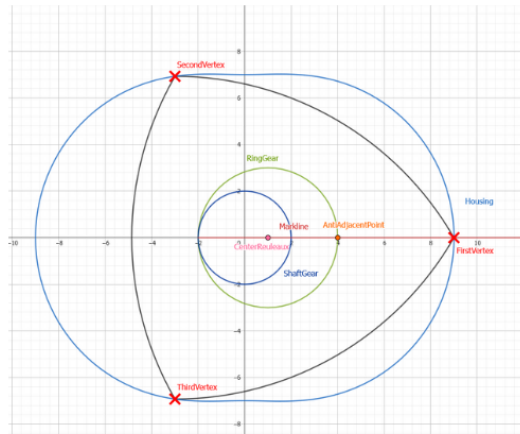
$$\begin{aligned} \text{SecondVertex}(t) = & \left[ R\sqrt{3} \left( \cos \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\ & + \left[ \sqrt{3} \left( \sin \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \text{ThirdVertex}(t) = & \left[ R\sqrt{3} \cos \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\ & + \left[ R\sqrt{3} \sin \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

และจะได้สมการห่อเผาไหม้ ดังนี้

$$x = R \cos \left( \frac{t}{3} \right) + \cos(t), \quad y = R \sin \left( \frac{t}{3} \right) + \sin(t)$$



**ทฤษฎีบท 3.3** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาใด ๆ จะได้ว่า  $R$  ที่เหมาะสม คือ  $\frac{-r}{\sqrt{3}-2}$

บทพิสูจน์. เมื่อกำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาใด ๆ ทำให้ได้ว่าเส้นผ่านศูนย์กลางของสามเหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R\sqrt{3}$  และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายังขอบของห้องเผาไหม้เท่ากับ  $R - \frac{r}{2}$  ดังนั้น

$$R\sqrt{3} = 2 \left( R - \frac{r}{2} \right)$$

$$R\sqrt{3} = 2R - r$$

$$R\sqrt{3} - 2R = -r$$

$$R(\sqrt{3} - 2) = -r$$

$$R = \frac{-r}{\sqrt{3}-2}$$

□

**บทแทรก 3.4** สมการการเคลื่อนที่ของจุดยอดทั้งสาม สำหรับเพลารัศมี  $r$  คือ

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos f(t) + \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \text{SecondVertex}(t) = & \left[ \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\ & + \left[ \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \text{ThirdVertex}(t) = & \left[ \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\ & + \left[ \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

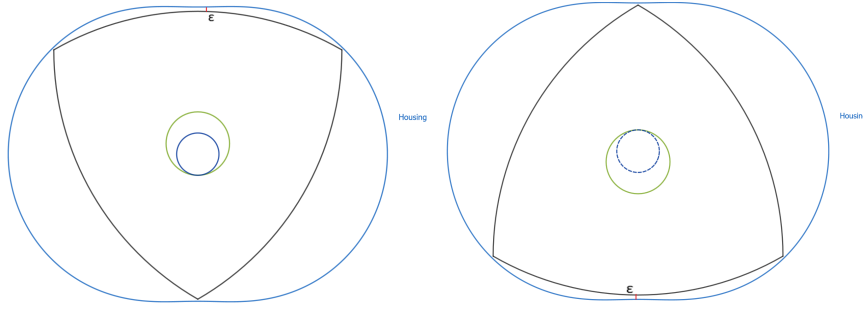
และจะได้สมการห้องเผาไหม้ ดังนี้

$$x = \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \cos \left( \frac{t}{3} \right) + \cos(t), \quad y = \left( \frac{-r}{\sqrt{3}-2} \right) \sin \left( \frac{t}{3} \right) + \sin(t)$$

ในความเป็นจริง ช่องว่างระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้จะมีขนาดเล็กมาก เพื่อให้โรเตอร์สามารถหมุนได้ ดังนั้นเราจึงกำหนดช่องว่างขนาดเล็กนั้นให้มีค่าเท่ากับ  $\varepsilon$  จากนั้นพิจารณา  $R$  ที่เหมาะสมสำหรับเพลารัศมีใด ๆ และมีช่องว่างระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้

**ทฤษฎีบท 3.5** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาใด ๆ และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของสามเหลี่ยมรูโลซ  $R$  ที่เหมาะสม คือ  $\frac{-r+2\varepsilon}{\sqrt{3}-2}$



บทพิสูจน์. พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$R\sqrt{3} = 2 \left( R - \frac{r}{2} + \varepsilon \right)$$

$$R\sqrt{3} = 2R - r + 2\varepsilon$$

$$R\sqrt{3} - 2R = -r + 2\varepsilon$$

$$R(\sqrt{3} - 2) = -r + 2\varepsilon$$

$$R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2}$$

จะได้ฟังก์ชัน FirstVertex, SecondVertex, ThirdtVertex คือ

$$\begin{aligned} \text{FirstVertex}(t) &= \left[ \cos f(t) + \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \\ \text{SecondVertex}(t) &= \left[ \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[ \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \\ \text{ThirdVertex}(t) &= \left[ \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \cos f(t) + \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \cos \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[ \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + \sin f(t) + \left( \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2} \right) \sin \left( \frac{f(t)}{3} \right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

และสมการห้องเผาไหม้ คือ

$$x(t) = R + (\varepsilon) \cos \left( \frac{t}{3} \right) + \cos(t), \quad y(t) = (R + \varepsilon) \sin \left( \frac{t}{3} \right) + \sin(t)$$

□

### 3.3 แบบจำลองห้าเหลี่ยมรูโลซ (Model for Reuleaux Pentagon)

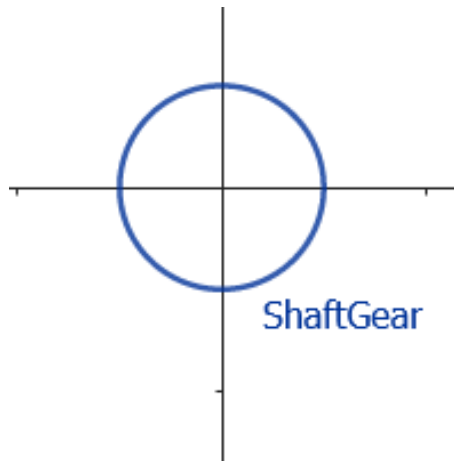
#### 3.3.1 กระบวนการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของห้าเหลี่ยมรูโลซ

ขั้นตอนที่ 1 สร้างฟังก์ชัน  $f(t) = -t\pi$  โดยที่  $t \in \mathbb{R}$

ขั้นตอนที่ 2 จำลองเฟืองของเพล่า ที่ไม่มีการเคลื่อนที่

กำหนดให้  $\text{ShaftGear}(t)$  เป็นฟังก์ชันเฟืองของเพล่า เนื่องจากว่า เฟืองของเพล่าเป็นวงกลมรัศมี  $r$  หน่วย และไม่มีการเคลื่อนที่ เฟืองของเพล่าจึงเป็นกราฟของ  $\text{ShaftGear}$

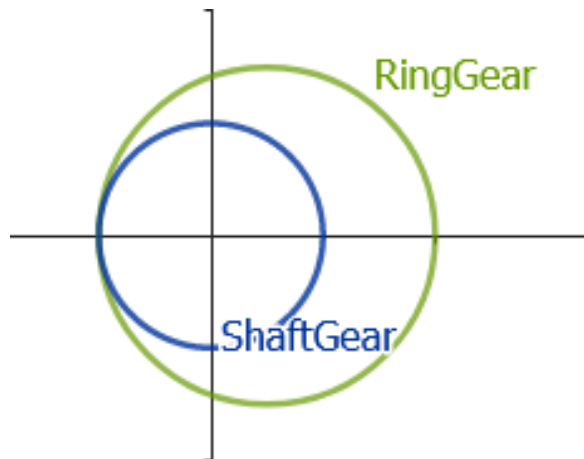
$$x = r \cos(t), y = r \sin(t)$$



ขั้นตอนที่ 3 จำลองวงกลมภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ

กำหนดให้  $\text{RingGear}(t)$  เป็นฟังก์ชันของวงกลมภายในห้าเหลี่ยมรูโลซ และมีรัศมียาว 3 หน่วย จึงได้สมการดังนี้

$$\text{RingGear}(t) = \frac{3r}{2} \cos(t)\vec{i} + \frac{3r}{2} \sin(t)\vec{j} + \text{CenterReuleaux}(t)$$



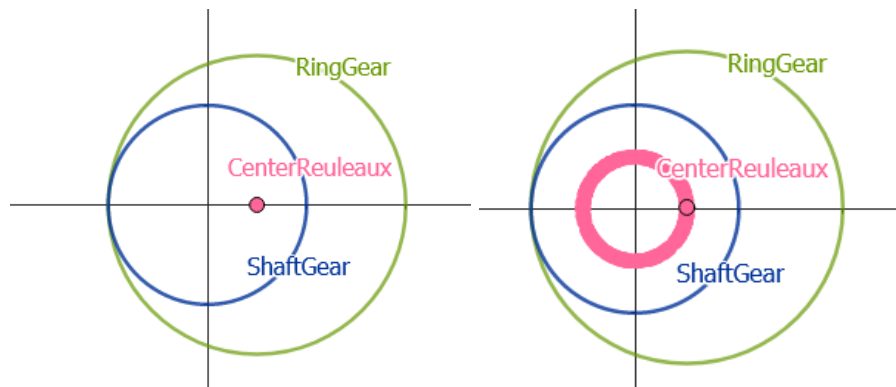
**ขั้นตอนที่ 4** สร้างฟังก์ชันการเคลื่อนที่จุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ

กำหนดให้  $\text{CenterReuleaux}(t)$  เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่จุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ จะเป็นวงกลมรัศมี  $\frac{r}{2}$  หน่วย ตามเข็มนาฬิกา

เราจึงได้ว่า

$$\text{CenterReuleaux}(t) = \frac{r}{2} \cos(t)\vec{i} + \frac{r}{2} \sin(t)\vec{j}$$

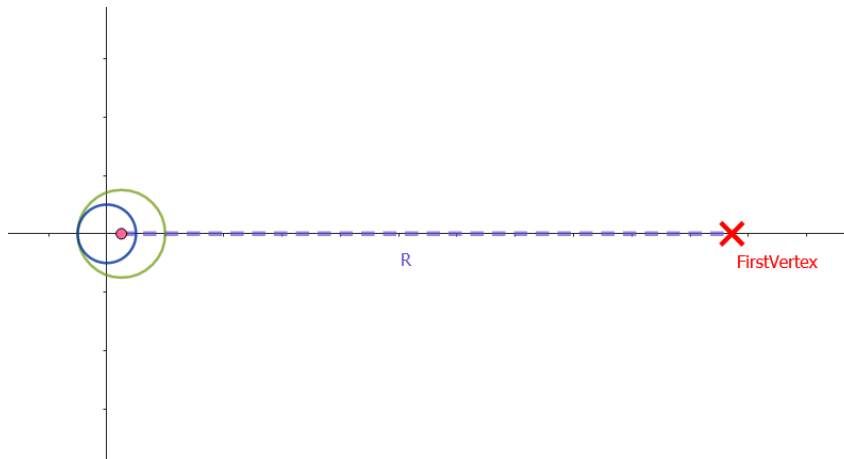


**ขั้นตอนที่ 5** กำหนดให้  $R$  คือ ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมแรกของห้าเหลี่ยมรูโลซ ในที่นี้เรียกว่า FirstVertex

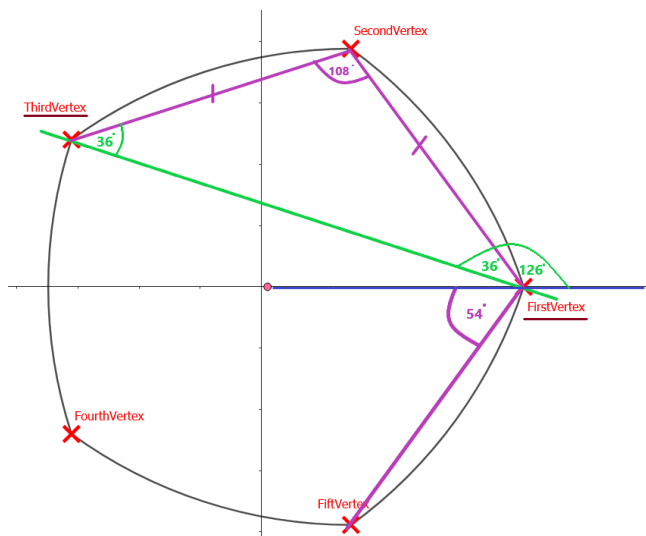
จากขั้นตอนที่ 4 จำลองการเคลื่อนที่ของ FirstVertex ได้ฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}\text{FirstVertex}(t) &= \left[ R \cos\left(\frac{t}{5}\right) \vec{i} + R \sin\left(\frac{t}{5}\right) \vec{j} \right] + \text{CenterReuleaux}(t) \\ &= \left[ R \cos\left(\frac{t}{5}\right) \vec{i} + R \sin\left(\frac{t}{5}\right) \vec{j} \right] + \frac{r}{2} \cos f(t) \vec{i} + \frac{r}{2} \sin f(t) \vec{j} \\ &= \left[ R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} + \left[ R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j}\end{aligned}$$

**หมายเหตุ** เนื่องจาก FirstVertex เคลื่อนที่กลับมายังจุดเริ่มต้น สัมพันธ์กับ CenterReuleaux เคลื่อนที่ผ่านจุดกำเนิด 5 ครั้ง จึงต้องใช้  $\frac{f(t)}{5}$



**ขั้นตอนที่ 6** จำลอง ThirdVertex

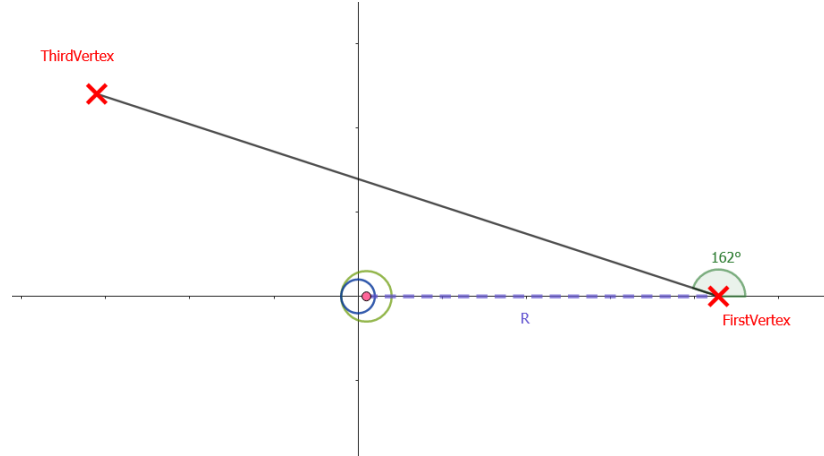


เนื่องจาก ThirdVertex เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบ FirstVertex โดยมีขนาด  $R$  หน่วย และมีขนาดมุม  $\frac{9\pi}{10}$  และ



จากขั้นตอนที่ 5 จึงทำให้ได้ฟังก์ชัน ดังนี้

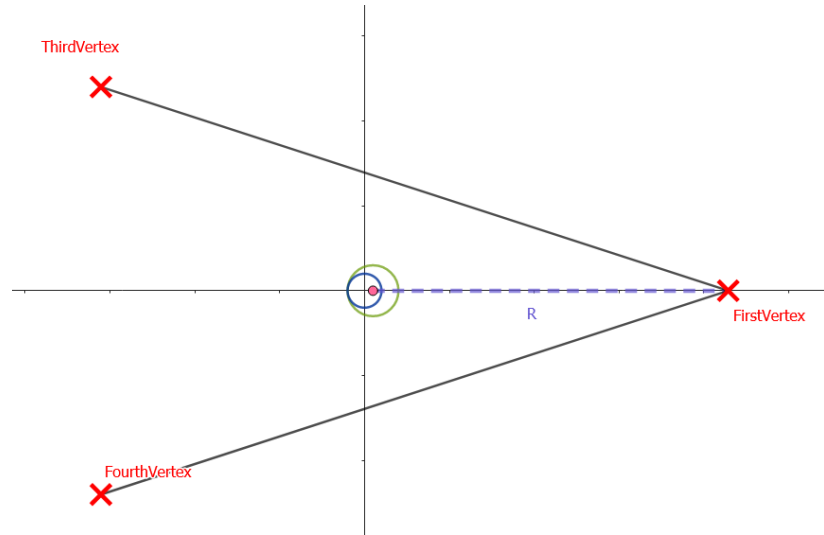
$$\begin{aligned}
 \text{ThirdVertex}(t) &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) \vec{j} \right] \\
 &+ \text{FirstVertex}(t) \\
 &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) \vec{j} \right] \\
 &+ \left[ R \cos \left( \frac{f(t)}{5} \right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} + \left[ R \sin \left( \frac{f(t)}{5} \right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) \right] \vec{i} \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) \right] \vec{j} \\
 &+ \left[ R \cos \left( \frac{f(t)}{5} \right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} + \left[ R \sin \left( \frac{f(t)}{5} \right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) + R \cos \left( \frac{f(t)}{5} \right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin \left( \frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10} \right) + R \sin \left( \frac{f(t)}{5} \right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j}
 \end{aligned}$$



**ขั้นตอนที่ 7** จำลองจุดยอดที่ 4 ของห้าเหลี่ยมรูโลซ

ในทำนองเดียวกัน ForthVertex เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบ FirstVertex โดยมีขนาด  $R$  หน่วย และมีมุม  $-\frac{9\pi}{10}$  และจากขั้นตอนที่ 5 จึงได้สมการการเคลื่อนที่ ดังนี้

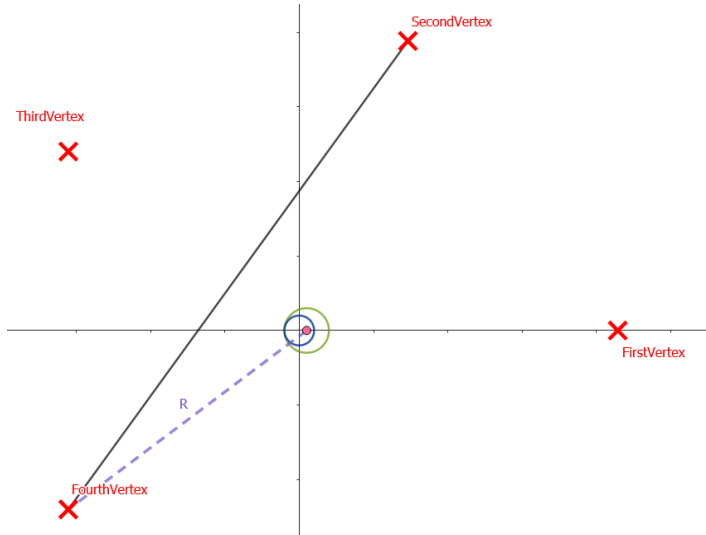
$$\begin{aligned}
 \text{ForthVertex}(t) &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) \vec{j} \right] \\
 &\quad + \text{FirstVertex}(t) \\
 &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) \vec{i} + \left(\sin \frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) \vec{j} \right] \\
 &\quad + \left[ R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} + \left[ R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) \right] \vec{j} \\
 &\quad + \left[ R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} + \left[ R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j}
 \end{aligned}$$



**ขั้นตอนที่ 8** จำลองจุดยอดที่ 2 ของห้าเหลี่ยมรูโลซ

เนื่องจาก SecondVertex เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด ForthVertex โดยมีระยะทาง  $R$  และมุม  $\frac{3\pi}{10}$  และจากขั้นตอนที่ 7 จึงได้สมการการเคลื่อนที่ ดังนี้

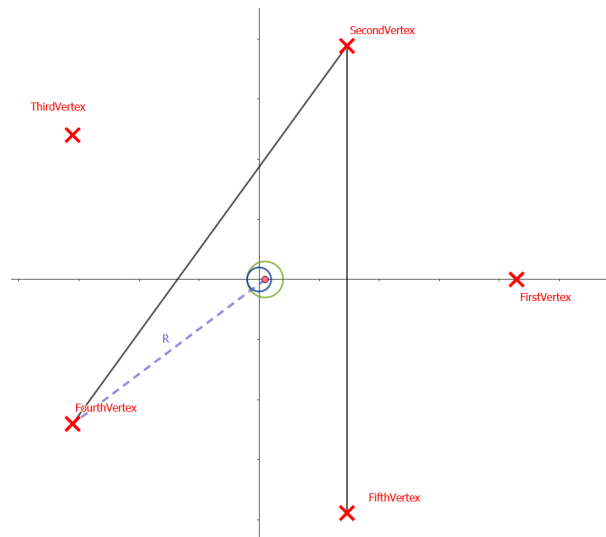
$$\begin{aligned}
 \text{SecondVertex}(t) &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) \vec{j} \right] \\
 &\quad + \text{ForthVertex} \\
 &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) \vec{j} \right] \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) \right] \vec{j} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right. \\
 &\quad \left. + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right. \\
 &\quad \left. + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j}
 \end{aligned}$$



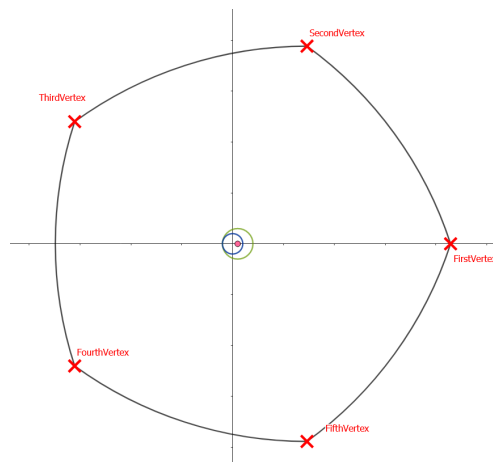
**ขั้นตอนที่ 9** จำลองจุดยอดที่ 5 ของห้าเหลี่ยมรูโลซ โดยมีจุดหมุนอยู่ที่ ForthVertex

ในทำนองเดียวกัน FifthVertex เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด ForthVertex โดยมีระยะทาง  $R$  และมุม  $-\frac{3\pi}{10}$  และจากขั้นตอนที่ 7 จึงได้สมการการเคลื่อนที่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{FifthVertex}(t) &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \vec{j} \right] \\
 &+ \text{ForthVertex}(t) \\
 &= R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \left[ \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \vec{j} \right] \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \right] \vec{i} \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \right] \vec{j} \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 &= \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &+ \left[ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j}
 \end{aligned}$$



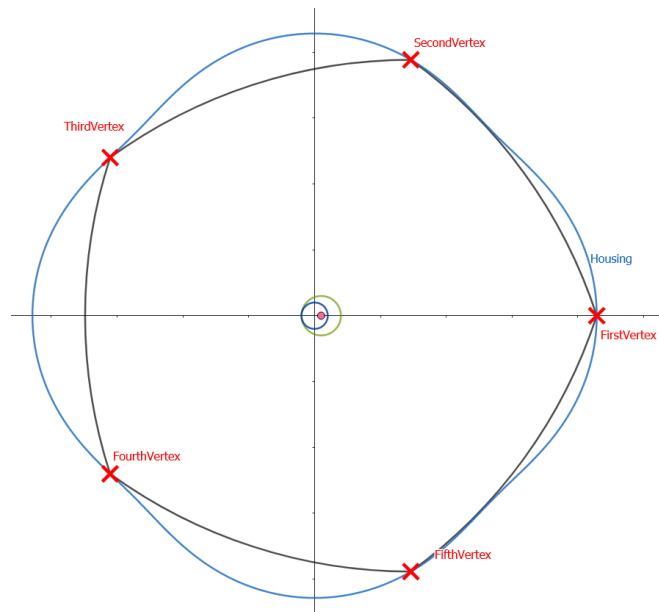
ขั้นตอนที่ 10 สร้างเส้นโค้งเชื่อมจุดยอดทั้ง 5 จุดยอด จะได้ห้าเหลี่ยมรูโลซ



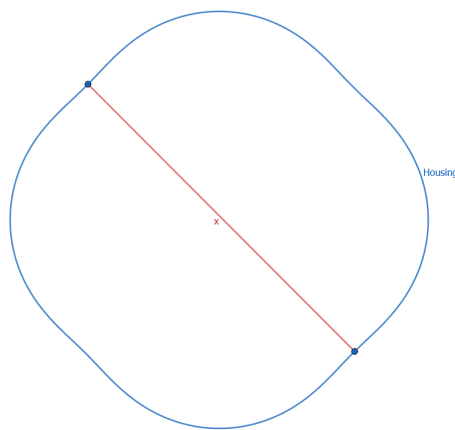
ขั้นตอนที่ 11 จำลองห้องเผาไหม้ของเครื่องยนต์โรตารี

ทั้ง 5 มุมของห้าเหลี่ยมรูโลซ มีการเคลื่อนที่ชิดกับขอบของห้องเผาไหม้ คือ กราฟของห้องเผาไหม้ ดังนั้น จึงได้สมการห้องเผาไหม้ ดังนี้

$$x = R \cos \left( \frac{t}{5} \right) + \cos(t), \quad y = R \sin \left( \frac{t}{5} \right) + \sin(t)$$



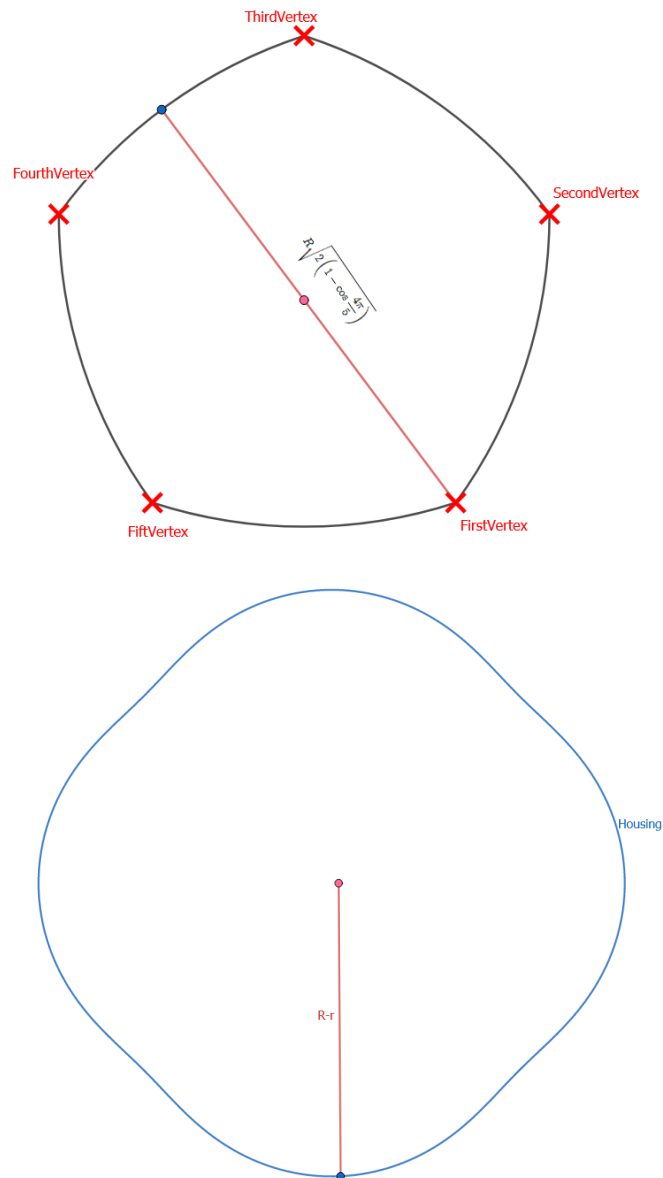
กำหนดให้  $x$  คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ ที่อยู่ตรงข้ามกัน นั่นคือ ระยะของเส้นตรง ดังรูป



**บทนิยาม 3.6** รัศมีที่เหมาะสม คือ  $R$  ที่ทำให้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกัน กับ เส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ เท่ากัน

**ทฤษฎีบท 3.7** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาใด ๆ จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของห้า

เหลี่ยมรูโลซ  $R$  ที่เหมาะสม คือ 
$$\frac{2r}{2 - \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}}$$



บทพิสูจน์. ข้อสังเกตจากรูป เส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)}$  และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายังขอบของห้องเผาไหม้ เท่ากับ  $R - r$  ดังนั้นระยะทางจากขอบของห้องเผาไหม้มายังขอบ

ห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกันมีค่าเท่ากับ  $2(R - r)$

$$\begin{aligned}
 R\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)} &= 2(R - r) \\
 R\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} &= 2R - 2r \\
 2R - R\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} &= 2r \\
 R\left(2 - \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\right) &= 2r \\
 R &= \frac{2r}{2 - \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}}
 \end{aligned}$$

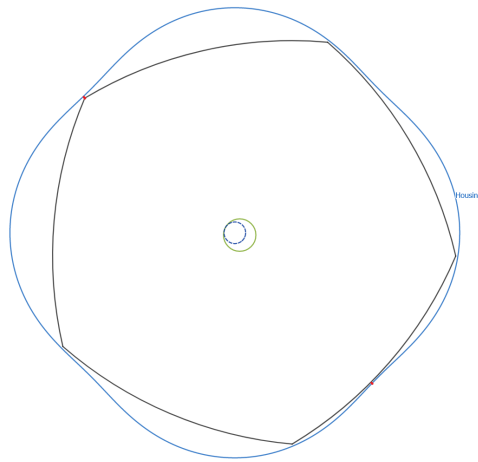
□

เพื่อให้โรเตอร์สามารถหมุนได้ภายในห้องเผาไหม้ เราจึงเพิ่มช่องว่างขนาดเล็กระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ โดยกำหนดให้  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ จากนั้นพิจารณาหาค่า  $R$  ที่เหมาะสม

**ทฤษฎีบท 3.8** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาดูใด ๆ และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของห้าเหลี่ยมรูโลซ  $R$  ที่เหมาะสม คือ

$$\frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{5}\right)} - 2}$$



บทพิสูจน์. เมื่อกำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาดูใด ๆ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ ทำให้ได้ว่า เส้นผ่านศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{5}\right)}$  และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายังขอบ



ของห้องเผาไหม้ เท่ากับ  $R - \frac{r}{2} + \varepsilon$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} &= 2\left(R - \frac{r}{2} + \varepsilon\right) \\ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} &= 2R - r + 2\varepsilon \\ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} - 2R &= -r + 2\varepsilon \\ R\left[\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} - 2\right] &= -r + 2\varepsilon \\ R &= \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} - 2} \end{aligned}$$

□

**บทแทรก 3.9** ฟังก์ชัน FirstVertex, SecondVertex, ThirdVertex, ForthVertex, FifthVertex คือ

$$\begin{aligned} \text{FirstVertex}(t) &= \left[R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t)\right] \vec{i} + \left[R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t)\right] \vec{j} \\ \text{SecondVertex}(t) &= \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t)\right] \vec{i} \\ &\quad + \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t)\right] \vec{j} \\ \text{ThirdVertex}(t) &= \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t)\right] \vec{i} \\ &\quad + \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t)\right] \vec{j} \\ \text{ForthVertex}(t) &= \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t)\right] \vec{i} \\ &\quad + \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t)\right] \vec{j} \\ \text{FifthVertex}(t) &= \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t)\right] \vec{i} \\ &\quad + \left[R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t)\right] \vec{j} \end{aligned}$$

และสมการห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์รูปห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ

$$x = R \cos\left(\frac{t}{5}\right) + \cos(t), \quad y = R \sin\left(\frac{t}{5}\right) + \sin(t)$$

$$\text{เมื่อ } R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} - 2}$$

### 3.4 แบบจำลองสำหรับเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ (Model for Reuleaux Heptagon)

เนื่องจากการสร้างห้องเผาไหม้และโรเตอร์ สามารถพิจารณาได้จาก FirstVertex สำหรับ  $n$  เหลี่ยมใด ๆ จึงพิจารณาเพียง FirstVertex Housing และ  $R$  ที่เหมาะสม

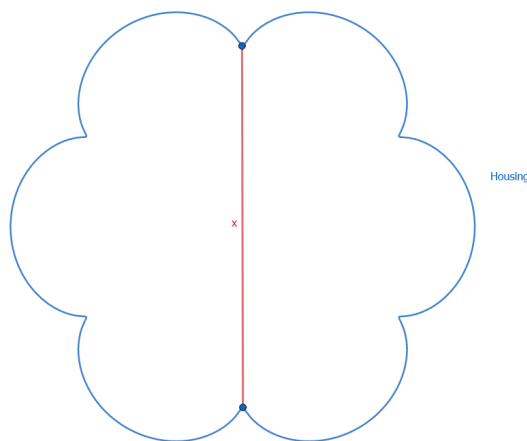
**ทฤษฎีบท 3.10** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลลา จะได้ว่า

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{7} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{7} \right) \right] \vec{j}$$

และสมการห้องเผาไหม้ Housing

$$x = R \cdot \cos \left( \frac{t}{7} \right) + \cos(t), \quad y = R \cdot \sin \left( \frac{t}{7} \right) + \sin(t)$$

กำหนดให้  $x$  คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ ที่อยู่ตรงข้ามกัน นั่นคือ ระยะของเส้นตรง ดังรูป



**บทนิยาม 3.11** รัศมีที่เหมาะสม คือ  $R$  ที่ทำให้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกัน กับเส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ เท่ากัน

**ทฤษฎีบท 3.12** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลลาใด ๆ จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของ

เจ็ดเหลี่ยมรูโลซ  $R$  ที่เหมาะสม คือ 
$$R = \frac{2r}{\left(2 - \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{6\pi}{7} \right)}\right)}$$

บทพิสูจน์. เส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right)}$  และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายังขอบของห้องเผาไหม้เท่ากับ  $R - r$  ดังนั้นระยะทางจากขอบของห้องเผาไหม้มายังขอบของห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกัน มีค่าเท่ากับ  $2(R - r)$

$$\begin{aligned} R\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right)} &= 2(R - r) \\ R\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)} &= 2R - 2r \\ 2R - R\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)} &= 2r \\ R\left(2 - \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}\right) &= 2r \\ R &= \frac{2r}{2 - \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}} \end{aligned}$$

□

ในการทำงานเดียวกันกับโรเตอร์ห้าเหลี่ยมรูโลซ เพื่อให้โรเตอร์สามารถหมุนได้ภายในห้องเผาไหม้ เราจึงเพิ่มช่องว่างขนาดเล็กกระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ โดยกำหนดให้  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กกระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ จากนั้นพิจารณาหาค่า  $R$  ที่เหมาะสม

**ทฤษฎีบท 3.13** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาดิใด ๆ และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ

$$R \text{ ที่เหมาะสม คือ } \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right)} - 2}$$

บทพิสูจน์. เมื่อกำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลาดิใด ๆ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กกระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ ทำให้ได้ว่า เส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right)}$  และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายัง

ขอบของห้องเผาไหม้เท่ากับ  $R - \frac{r}{2} + \varepsilon$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right)} &= 2\left(R - \frac{r}{2} + \varepsilon\right) \\ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right)} &= 2R - r + 2\varepsilon \\ R\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right)} - 2R &= -r + 2\varepsilon \\ R\left[\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right)} - 2\right] &= -r + 2\varepsilon \\ R &= \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right)} - 2} \end{aligned}$$

□

**บทแทรก 3.14** ฟังก์ชัน FirstVertex และสมการ Housing

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{7} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{7} \right) \right] \vec{j}$$

และสมการห้องเผาไหม้ คือ

$$x(t) = R \cos \left( \frac{t}{7} \right) + \cos(t), \quad y(t) = R \cdot \sin \left( \frac{t}{7} \right) + \sin(t)$$

เมื่อ  $R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right)} - 2}$

### 3.5 แบบจำลองสำหรับ $n$ เหลี่ยมรูโลซ (Model for Reuleaux Polygonal)

จากการจำลองการเคลื่อนที่ของโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมรูโลซ, โรเตอร์รูปห้าเหลี่ยมรูโลซ และ โรเตอร์รูปเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ ทำให้ได้ฟังก์ชันของโรเตอร์รูป  $n$  เหลี่ยมรูโลซ ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.15** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลลา จะได้ว่า

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{n} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{n} \right) \right] \vec{j}$$

และสมการห้องเผาไหม้ คือ

$$x = R \cos \left( \frac{t}{n} \right) + \cos(t), \quad y = R \sin \left( \frac{t}{n} \right) + \sin(t)$$

โดย  $n$  เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหนึ่ง

กำหนดให้  $x$  คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ ที่อยู่ตรงข้ามกัน

**บทนิยาม 3.16** รัศมีที่เหมาะสม คือ  $R$  ที่ทำให้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างขอบของห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกันกับเส้นผ่านศูนย์กลางของโรเตอร์  $n$  เหลี่ยมรูโลซ เท่ากัน

**ทฤษฎีบท 3.17** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลลาใด ๆ จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของ  $n$

เหลี่ยมรูโลซ  $R$  ที่เหมาะสม คือ  $R = \frac{2r}{2 - \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right)}}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหนึ่ง

**บทพิสูจน์.** เส้นผ่านศูนย์กลางของ  $n$  เหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R \sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหนึ่ง และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายังขอบของห้องเผาไหม้เท่ากับ  $R - r$  ดังนั้นระยะทางจากขอบของห้องเผาไหม้มายังขอบของห้องเผาไหม้ที่อยู่ตรงข้ามกัน มีค่าเท่ากับ  $2(R - r)$  จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} R \sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} &= 2(R - r) \\ R \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right)} &= 2R - 2r \\ 2R - R \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right)} &= 2r \\ R \left( 2 - \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right)} \right) &= 2r \\ R &= \frac{2r}{2 - \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right)}} \end{aligned}$$



เพื่อให้โรเตอร์สามารถหมุนได้ภายในห้องเผาไหม้ เราจึงเพิ่มช่องว่างขนาดเล็กระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ โดยกำหนดให้  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ จากนั้นพิจารณาหาค่า  $R$  ที่เหมาะสม

**ทฤษฎีบท 3.18** กำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลลาใด ๆ และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด CenterReuleaux ไปยังมุมของ  $n$  เหลี่ยมรูโลซ

$$R \text{ ที่เหมาะสม คือ } \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} - 2}$$

**บทพิสูจน์.** เมื่อกำหนดให้  $r$  คือ รัศมีของเพลลาใด ๆ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้ ทำให้ได้ว่า เส้นผ่านศูนย์กลางของ  $n$  เหลี่ยมรูโลซ มีขนาดเท่ากับ  $R\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)}$  และระยะทางจากจุดศูนย์กลางมายังขอบของห้องเผาไหม้เท่ากับ  $R - \frac{r}{2} + \varepsilon$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} R\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} &= 2 \left( R - \frac{r}{2} + \varepsilon \right) \\ R\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} &= 2R - r + 2\varepsilon \\ R\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} - 2R &= -r + 2\varepsilon \\ R \left[ \sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} - 2 \right] &= -r + 2\varepsilon \\ R &= \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} - 2} \end{aligned}$$



**บทแทรก 3.19** ฟังก์ชัน FirstVertex คือ

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos f(t) + R \cos \left( \frac{f(t)}{n} \right) \right] \vec{i} + \left[ \sin f(t) + R \sin \left( \frac{f(t)}{n} \right) \right] \vec{j}$$

และสมการห้องเผาไหม้สำหรับโรเตอร์  $n$  เหลี่ยมรูโลซ คือ

$$x = R \cos \left( \frac{t}{n} \right) + \cos(t), \quad y = R \sin \left( \frac{t}{n} \right) + \sin(t)$$

เมื่อ  $R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right)} - 2}$  และ  $n$  เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1

## บทที่ 4

# สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

### 4.1 สรุปผลการศึกษา

จากการศึกษาการเคลื่อนที่ของโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ภายในเครื่องยนต์โรตารี นำไปสู่การสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ภายในเครื่องยนต์โรตารี พบว่า

สมการการเคลื่อนที่ของจุดยอดทั้ง 3 ของโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos(t) + R \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{i} + \left[ \sin(t) + R \sin\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \text{SecondVertex}(t) = & \left[ R\sqrt{3} \cos\left(\frac{t}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos(t) + R \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{i} \\ & + \left[ R\sqrt{3} \sin\left(\frac{t}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + \sin(t) + R \sin\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ThirdVertex}(t) = & \left[ R\sqrt{3} \cos\left(\frac{t}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + \cos(t) + R \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{i} \\ & + \left[ R\sqrt{3} \sin\left(\frac{t}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin(t) + R \sin\left(\frac{t}{3}\right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

และจะได้สมการห้วงเฝ้าใหม่สำหรับโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้

$$x = R \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos(t), \quad y = R \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin(t)$$

โดยที่  $R$  ที่เหมาะสมสำหรับสมการของโรเตอร์รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ  $R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{3} - 2}$

เมื่อ  $r$  คือ รัศมีของเพลลา และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กกระหว่างโรเตอร์และห้วงเฝ้าใหม่

สมการการเคลื่อนที่ของจุดยอดทั้งหมดของโรเตอร์รูปห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ

$$\begin{aligned}
 \text{FirstVertex}(t) &= \left[ R \cos\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t}{2} \cos(t) \right] \vec{i} + \left[ R \sin\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t}{2} \sin(t) \right] \vec{j} \\
 \text{SecondVertex}(t) &= \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 \text{ThirdVertex}(t) &= \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} + \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 \text{ForthVertex}(t) &= \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j} \\
 \text{FifthVertex}(t) &= \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \cos\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + R \cos\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \cos f(t) \right] \vec{i} \\
 &\quad + \left[ R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} 2 \sin\left(\frac{f(t)}{5} - \frac{3\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) + R \sin\left(\frac{f(t)}{5}\right) + \frac{r}{2} \sin f(t) \right] \vec{j}
 \end{aligned}$$

และสมการห้วงเผาไหม้สำหรับโรเตอร์รูปห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ

$$x = R \cos\left(\frac{t}{5}\right) + \cos(t), \quad y = R \sin\left(\frac{t}{5}\right)$$

โดยที่  $R$  ที่เหมาะสมสำหรับสมการของโรเตอร์ห้าเหลี่ยมรูโลซ คือ

$$R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)} - 2}$$

เมื่อ  $r$  คือ รัศมีของเพลลา และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กกระหว่างโรเตอร์และห้องเผาไหม้

สำหรับโรเตอร์รูปเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ จะได้สมการการเคลื่อนที่ของจุดยอดที่หนึ่ง และห้องเผาไหม้ ดังนี้

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos(t) + R \cos\left(\frac{t}{7}\right) \right] \vec{i} + \left[ \sin(t) + R \sin\left(\frac{t}{7}\right) \right] \vec{j}$$



และสมการหองเผาไหม้สำหรับโรเตอร์รูปเจ็ดเหลี่ยมรูโลซ คือ

$$x = R \cos\left(\frac{t}{7}\right) + \cos(t), \quad y = R \sin\left(\frac{t}{7}\right)$$

และ  $R$  ที่เหมาะสม คือ 
$$R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right)} - 2}$$

เมื่อ  $r$  คือ รัศมีของเพลลา และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กกระหว่างโรเตอร์และหองเผาไหม้

และสุดท้ายจะได้สมการสำหรับโรเตอร์รูป  $n$  เหลี่ยมรูโลซ เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหนึ่ง ดังนี้

$$\text{FirstVertex}(t) = \left[ \cos(t) + R \cos\left(\frac{t}{n}\right) \right] \vec{i} + \left[ \sin(t) + R \sin\left(\frac{t}{n}\right) \right] \vec{j}$$

และสมการหองเผาไหม้สำหรับโรเตอร์รูป  $n$  เหลี่ยมรูโลซ คือ

$$x = R \cos\left(\frac{t}{n}\right) + \cos(t), \quad y = R \sin\left(\frac{t}{n}\right)$$

และ  $R$  ที่เหมาะสมสำหรับสมการของโรเตอร์รูป  $n$  เหลี่ยมรูโลซ ใด ๆ คือ 
$$R = \frac{-r + 2\varepsilon}{\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2}\right)\right)} - 2}$$

เมื่อ  $r$  คือ รัศมีของเพลลา และ  $\varepsilon$  คือ ช่องว่างขนาดเล็กกระหว่างโรเตอร์และหองเผาไหม้

# บรรณานุกรม

- [1] TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN.//(2023).//**Franz Reuleaux established mechanical engineering on the principles of mathematics and the natural sciences.**// สืบค้นเมื่อ 14 กุมภาพันธ์ 2566 จาก/ [https:// library.ethz.ch/ en/ locations-and-media/ platforms/ short-portraits/ franz-reuleaux-1829-1905-.html](https://library.ethz.ch/en/locations-and-media/platforms/short-portraits/franz-reuleaux-1829-1905-.html)
- [2] ชีระศักดิ์ อุไรจินานนท์.//(2012).//**แคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร.**//สกายบุ๊กส์,บจก.
- [3] John B. Hege.//(2006).//**The Wankel Rotary Engine: A History.**//Paperback
- [4] ว่าที่ ร.ต. ชัยยง ศิริพรมงคลชัย.//(2015).//**เครื่องยนต์สันดาปภายใน เครื่องยนต์สันดาปภายใน.**//โอเดียนสโตร์, สนพ.
- [5] Karim Nice .//(2021).//**How Rotary Engines Work.**// สืบค้นเมื่อ 14 กุมภาพันธ์ 2566 จาก/ [https:// auto.howstuffworks.com/rotary-engine.htm](https://auto.howstuffworks.com/rotary-engine.htm)
- [6] Monchanok Admin .//(2021).//**หลักการทำงานของ เครื่องยนต์ 4 จังหวะ.**// สืบค้นเมื่อ 14 กุมภาพันธ์ 2566 จาก/ <https://www.yukonlubricants.com/4-stroke-engine/>
- [7] Alexandru Radu Chis, Tudor Serban.//(2022).//**How Wankel's Rotary Engine Works.**// สืบค้นเมื่อ 14 กุมภาพันธ์ 2566 จาก/ <https://www.autoevolution.com/news/how-wankels-rotary-engine-works-19241.html>