

ตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d
(Some types of filters in d-algebras)

นางสาวปิยธิดา อุ่นบ้าน
610510786

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

ตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d
(Some types of filters in d-algebras)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

..... **ปรียานุช โพนเนียม** ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปรียานุช โพนเนียม)

..... **ธนดล** กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนดล ชวบ้านเกาะ)

วันที่ 16 มีนาคม 2566

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง ตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริยานุช โหนแหยม ประธานกรรมการสอบในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา อธิบายให้ความรู้ คำแนะนำเกี่ยวกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องของการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนดล ขาวบ้านเกาะ กรรมการคุมสอบที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้คำแนะนำและตรวจสอบความถูกต้อง ในการค้นคว้าอิสระให้มีความสำเร็จลุล่วงเรียบร้อย

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอ ตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำรา ให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึง ที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ และให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

และสุดท้ายนี้ หากงานค้นคว้าอิสระนี้ได้รับการชื่นชมยินดี หรือเป็นคุณประโยชน์ในการใด ๆ ขอมอบสิ่งนั้นเป็นเกียรติยศและเป็นกุศลแด่อาจารย์ที่ปรึกษา คณาจารย์ บิดามารดา ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน หากมีความผิดพลาดประการใด ผู้ค้นคว้าต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และผู้ค้นคว้าขอน้อมรับไว้แต่เพียงผู้เดียว

ปิยธิดา อุ่นบ้าน

หัวข้อ : (ภาษาไทย)	ตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d
(ภาษาอังกฤษ)	Some types of filters in d -algebras
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ :	นางสาวปิยธิดา อุ่นบ้าน
รหัสประจำตัวนักศึกษา :	610510786
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา :	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริยานุช โหนดเนียม
ชื่อกรรมการสอบ :	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนดล ชาวบ้านเกาะ

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษานิยามและสมบัติบางประการของพีชคณิต d และพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยเราได้ศึกษาสมบัติของพีชคณิตย่อย d ตัวกรองในพีชคณิต d หน่วยในพีชคณิต d ที่มีขอบเขต ฟังก์ชันสาคีสฐานในพีชคณิต d และตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d ที่มีขอบเขต ได้แก่ ตัวกรอง d ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ ตัวกรอง crazy และตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ นอกจากนี้เราได้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวกรองที่ได้กล่าวถึงในพีชคณิต d และพีชคณิต d ที่มีขอบเขต

Abstract

In this independent study, we study the definitions and some properties of d -algebras and bounded d -algebras. We study properties of subalgebras d , filters in d -algebras, unit in bounded d -algebra, homomorphism in d -algebras and some new types of filters in bounded d -algebras, such as d -filters, complete d -filters, crazy filters and complete crazy filters. Moreover, we consider the relationship among them that are discussed in d -algebras and bounded d -algebras.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
2.1 ความสัมพันธ์ (Relations)	2
2.2 ฟังก์ชัน (Functions)	4
2.3 การดำเนินการทวิภาค (Binary operations)	6
บทที่ 3 พีชคณิต d (d-algebras)	7
3.1 บทนิยามและตัวอย่างพีชคณิต d	7
3.2 ตัวกรองในพีชคณิต d (Filters in d-algebras)	11
3.3 หน่วยและพีชคณิต d ที่มีขอบเขต (Unit and bounded d-algebras)	15
3.4 ตัวกรอง d (d-filters)	18
3.5 ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ (Complete d-filters)	23
3.6 ตัวกรอง crazy (Crazy filters)	27
3.7 ตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ (Complete crazy-filters)	29
3.8 ฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมในพีชคณิต d (Homomorphisms in d-algebras)	33
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusions)	39
บรรณานุกรม	41

บทที่ 1

บทนำ

(Introduction)

แนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิต d (d -algebra) ได้ริเริ่มโดย Neggers และ Kim ในปี 1999 [4] รวมถึงได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติบางประการของพีชคณิต d ต่อมาในปี 2012 Muhammad และ Faisal [3] ได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับตัวคูณในพีชคณิต d และสมบัติบางประการของตัวคูณในพีชคณิต d นอกจากนี้ในปี 2016 Abdullah และ Radhy [1] ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิต BCK (BCK-algebra) ซึ่งเป็นคลาสย่อยแท้ของพีชคณิต d โดยได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของพีชคณิต BCK และตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต BCK สำหรับพีชคณิต d ยังไม่มีผู้ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องตัวกรองชนิดต่าง ๆ มากนัก ด้วยเหตุผลดังกล่าว ในการค้นคว้าอิสระนี้จึงเป็นการศึกษาเกี่ยวกับตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d

การศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับนิยามและสมบัติบางประการของพีชคณิต d และพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยเริ่มต้นจากการศึกษานิยามของพีชคณิต d และพีชคณิต d ที่มีขอบเขต พร้อมทั้งยกตัวอย่าง และศึกษาตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d และพีชคณิต d ที่มีขอบเขต

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และการดำเนินการทวิภาค

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาเกี่ยวกับนิยามของพีชคณิต d และพีชคณิต d ที่มีขอบเขต พร้อมทั้งยกตัวอย่างพีชคณิต d ทั้งเซตจำกัดและเซตอนันต์ นอกจากนี้ได้ศึกษาสมบัติบางประการของพีชคณิต d ได้แก่ พีชคณิตย่อย d ตัวกรองในพีชคณิต d หน่วยในพีชคณิต d ที่มีขอบเขต ฟังก์ชันสาคีสัญฐานในพีชคณิต d และศึกษาตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d ที่มีขอบเขต ได้แก่ ตัวกรอง d ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ ตัวกรอง crazy และตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่าง และหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวกรองต่าง ๆ ที่กล่าวมา

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

(Preliminaries)

2.1 ความสัมพันธ์ (Relations)

บทนิยาม 2.1.1: ให้ A และ B เป็นเซต ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian products) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ กำหนดโดย

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

เรียก (a, b) ว่าคู่อันดับ โดยมี a เป็นพิกัดแรก และ b เป็นพิกัดหลัง

ถ้า A หรือ B เป็นเซตว่าง แล้ว $A \times B$ เป็นเซตว่าง

ตัวอย่าง 2.1.2: ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{4, 5\}$ จะได้

$$A \times B = \{(a, 4), (a, 5), (b, 4), (b, 5), (c, 4), (c, 5)\}$$

บทนิยาม 2.1.3: ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จะกล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B (relation from A to B) ก็ต่อเมื่อ $r \subseteq A \times B$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้วสามารถเขียนแทน $(a, b) \in r$ ด้วย $a r b$ จะเรียกความสัมพันธ์จาก A ไป A ว่า ความสัมพันธ์บน A (relation on A)

ตัวอย่าง 2.1.4: ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{4, 5\}$ และให้ $r = \{(a, 4), (b, 4), (c, 4)\}$

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และได้ว่า $a r 4, b r 4$ และ $c r 4$

บทนิยาม 2.1.5: ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ r เป็นความสัมพันธ์บน A

- (1) r มีสมบัติสะท้อน (reflexive) ก็ต่อเมื่อ $x r x$ สำหรับทุก $x \in A$
- (2) r มีสมบัตินิสมมาตร (symmetric) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x r y$ แล้ว $y r x$ สำหรับทุก $x, y \in A$
- (3) r มีสมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x r y$ และ $y r x$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in A$
- (4) r มีสมบัติถ่ายทอด (transitive) ถ้า $x r y$ และ $y r z$ แล้ว $x r z$ สำหรับทุก $x, y, z \in A$

บทนิยาม 2.1.6: ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) บน A ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน สมบัติสมมาตร และสมบัติถ่ายทอด

ตัวอย่าง 2.1.7: ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ และกำหนด

$$\begin{aligned} a r b &\Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m} \\ &\Leftrightarrow m \mid a - b \end{aligned}$$

(1) ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จาก $a - a = 0$ ทำให้ได้ว่า $m \mid a - a$

จะได้ว่า $a \equiv a \pmod{m}$ นั่นคือ $a r a$

ดังนั้น r มีสมบัติสะท้อน

(2) ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$

สมมติให้ $a r b$

จะได้ว่า $a \equiv b \pmod{m}$

ดังนั้น $m \mid a - b$ นั่นคือ $a - b = mk$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$

ได้ว่า $b - a = m(-k)$ โดยที่ $-k \in \mathbb{Z}$ ได้ว่า $m \mid b - a$ นั่นคือ $b r a$

ดังนั้น r มีสมบัติสมมาตร

(3) ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$

สมมติให้ $a r b$ และ $b r c$

จะได้ว่า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $b \equiv c \pmod{m}$

ดังนั้น $m \mid a - b$ และ $m \mid b - c$

นั่นคือ $a - b = ml$ และ $b - c = mp$ สำหรับบาง $l, p \in \mathbb{Z}$

จะได้ $a - c = ml + mp = m(l + p)$ โดยที่ $l + p \in \mathbb{Z}$

จะเห็นว่า $m \mid a - c$ นั่นคือ $a \equiv c \pmod{m}$

ได้ว่า $a r c$

ดังนั้น r มีสมบัติถ่ายทอด

จาก (1) – (3) สรุปได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 2.1.8: ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียก r ว่าเป็น อันดับบางส่วน (partially order) บน A ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน สมบัติปฏิสมมาตร และสมบัติถ่ายทอด

ตัวอย่าง 2.1.9: ให้ r เป็นความสัมพันธ์ $\leq$ บน N

(1) จะเห็นว่า $a \leq a$ สำหรับทุก $a \in N$ ดังนั้น r มีสมบัติสะท้อน

(2) ให้ $a, b, c \in N$

สมมติให้ $a \leq b$ และ $b \leq c$

ได้ว่า $a \leq b \leq c$ นั่นคือ $a \leq c$

ดังนั้น r มีสมบัติถ่ายทอด

(3) ให้ $a, b \in N$

สมมติให้ $a \leq b$ และ $b \leq a$

ได้ว่า $a = b$

ดังนั้น r มีสมบัติปฏิสมมาตร

จาก (1) – (3) สรุปได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบน N

2.2 ฟังก์ชัน (Functions)

บทนิยาม 2.2.1: ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

(1) f เป็นฟังก์ชัน (function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a \in A$ และ $b, c \in B$ ถ้า $(a, b) \in f$ และ $(a, c) \in f$ แล้ว $b = c$

(2) f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A to B) เขียนแทนด้วย $f: A \rightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน และสำหรับทุก $a \in A$ จะมี $b \in B$ ซึ่ง $(a, b) \in f$

ให้ f เป็นฟังก์ชัน จะเรียกเซต $\{a \in A \mid (a, b) \in f \text{ สำหรับบาง } b \in B\}$ ว่าโดเมน (domain) ของ f เขียนแทนด้วย D_f และเรียกเซต $\{b \in B \mid (a, b) \in f \text{ สำหรับบาง } a \in A\}$ ว่าเรนจ์ (range) ของ f เขียนแทนด้วย R_f

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน และ $D_f = A$ และจะเขียนแทน $(x, y) \in f$ ด้วย $y = f(x)$

บทนิยาม 2.2.2: ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

(1) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B (one-to-one function from A to B) เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in A$

(2) f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไป B (function from A onto B) เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $y \in B$ จะมี $x \in A$ ซึ่ง $f(x) = y$ นั่นคือ $R_f = B$

บทนิยาม 2.2.3: ให้ A, B, C เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$

กำหนดฟังก์ชันประกอบ (composite function) ของ f และ g ดังนี้

ให้ $g \circ f: A \rightarrow C$ กำหนดโดย

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

สำหรับทุก $x \in A$

บทนิยาม 2.2.4: ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

ความสัมพันธ์ผกผัน (inverse relation) ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A กำหนดโดย

$$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\}$$

บทนิยาม 2.2.5: ให้ $f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน และ f^{-1} เป็นความสัมพันธ์ผกผันของ f ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เราเรียก f^{-1} ว่า ฟังก์ชันผกผัน (inverse function) ของ f

ดังนั้น ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน แล้ว $f^{-1}(y) = x$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$

ทฤษฎีบท 2.2.6 [6]: ให้ $f: A \rightarrow B$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f^{-1}: B \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม 2.2.7: ให้ $f: A \rightarrow B$ จะเรียก เรนจ์ของ f ว่า ภาพ หรือ อิมเมจ (image) ของ f เขียนแทนด้วย $Im(f)$ นั่นคือ

$$Im(f) = \{b \in B \mid b = f(a) \exists a \in A\} = \{f(a) \mid a \in A\}$$

บทนิยาม 2.2.8: ให้ $f: A \rightarrow B, X \subseteq A$ และ $Y \subseteq B$

(1) อิมเมจของ X ภายใต้ f (image of X under f) เขียนแทนด้วย $f(X)$ คือ เซต

$$f(X) = \{b \in B \mid b = f(x) \exists x \in X\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

นั่นคือ $b \in f(X)$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = b \exists x \in X$

(2) อินเวอร์สอิมเมจ (บุพภาพ หรือ พร้ออิมเมจ) ของ Y ภายใต้ f (inverse image of Y under f)

เขียนแทนด้วย $f^{-1}(Y)$ คือ เซต

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

นั่นคือ $a \in f^{-1}(Y)$ ก็ต่อเมื่อ $f(a) \in Y$

จะได้ว่า 1. $f(X) \subseteq R_f$ และ $f(A) = Im(f) = R_f \subseteq B$

2. $f^{-1}(Y) \subseteq D_f$ และ $f^{-1}(B) = D_f = A$

ทฤษฎีบท 2.2.9: ให้ $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และให้ $X \subseteq A$ จะได้ว่า

ถ้า $x \in f(X)$ แล้ว $f^{-1}(x) \in X$

พิสูจน์ ให้ $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และให้ $X \subseteq A$

สมมติให้ $x \in f(X)$

จะได้ว่ามี $z \in X$ ซึ่ง $x = f(z)$

จาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและหนึ่งต่อหนึ่ง โดยทฤษฎีบท 2.2.6 ได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $f^{-1}(x) = z$

นั่นคือ $f^{-1}(x) \in X$ ■

บทนิยาม 2.2.10: ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้ $i_A: A \rightarrow A$ กำหนดโดย $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in A$ เราเรียก i_A ว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity) บน A

ทฤษฎีบท 2.2.11 [6]: ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก R_f ไป A จะได้ว่า

$$(1) f^{-1} \circ f = i_A$$

$$(2) f \circ f^{-1} = i_{R_f}$$

2.3 การดำเนินการทวิภาค (Binary operations)

บทนิยาม 2.3.1: ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง

การดำเนินการทวิภาค (binary operation) * บนเซต A คือ ฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไป A (นั่นคือ $* : A \times A \rightarrow A$)

สำหรับ $a, b \in A$ จะเขียนแทน $*(a, b)$ ด้วย $a * b$

จะได้ว่า * เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a, b \in A$ ได้ว่า $a * b$ หาค่าได้เสมอ และมีเพียงค่าเดียวใน A

ให้ $\emptyset \neq B \subseteq A$ และ $* : A \times A \rightarrow A$

ถ้า $a * b \in B$ ทุก $a, b \in B$ แล้วจะเรียก B มีสมบัติการปิด (closure property) ภายใต้ * ในกรณีที่ B มีสมบัติปิดภายใต้ * เราจะได้ว่า * เป็นการดำเนินการทวิภาคบน B และเรียก * ว่าเป็น การดำเนินการที่ถูกเหนี่ยวนำ (induced operation) ของ * บน B

บทที่ 3

พีชคณิต d

(d-algebras)

3.1 บทนิยามและตัวอย่างพีชคณิต d

บทนิยาม 3.1.1: ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $0 \in X$ โดยที่ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X, *, 0)$ (หรือ X) ว่าเป็น **พีชคณิต d** (d-algebra) ถ้ามีสมบัติดังต่อไปนี้

$$(d1) \quad x * x = 0$$

$$(d2) \quad 0 * x = 0$$

$$(d3) \quad \text{ถ้า } x * y = 0 \text{ และ } y * x = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

บทตั้ง 3.1.2: ให้ X เป็นพีชคณิต d และ $x \in X$ จะได้ว่า ถ้า $x * 0 = 0$ แล้ว $x = 0$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d และ $x \in X$

$$\text{สมมติให้ } x * 0 = 0$$

$$\text{จาก (d2) ได้ว่า } 0 * x = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x * 0 = 0 \text{ และ } 0 * x = 0$$

$$\text{จาก (d3) จะได้ว่า } x = 0$$

■

ตัวอย่าง 3.1.3: ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

*	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	1	1	0

จากตารางได้ว่า $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

จากตารางจะเห็นว่า

$$1 * 0 = 2 \neq 0, \quad 2 * 0 = 1 \neq 0, \quad 1 * 2 = 2 \neq 0 \quad \text{และ} \quad 2 * 1 = 1 \neq 0$$

นั่นคือ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

ตัวอย่าง 3.1.4: ให้ $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังนี้

$$x * y := \begin{cases} 0, & x \leq y \\ 1, & x > y \end{cases}$$

ให้ $x \in X$ จาก $x \leq x$ จะได้ว่า $x * x = 0$

และจาก $0 \leq x$ จะได้ว่า $0 * x = 0$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า

ถ้า $x < y$ แล้ว $y * x = 1 \neq 0$

และถ้า $x > y$ แล้ว $x * y = 1 \neq 0$

ได้ว่า ถ้า $x \neq y$ แล้ว $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

นั่นคือ ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

บทนิยาม 3.1.5: ให้ X เป็นพีชคณิต d จะนิยามความสัมพันธ์ $\leq$ บน X ดังนี้

$$x \leq y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x * y = 0 \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

ตัวอย่าง 3.1.6: ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	2	0	0
3	3	3	3	0

จากตารางได้ว่า $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

จากตารางจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} 1 * 0 &= 1 \neq 0, & 2 * 0 &= 2 \neq 0, & 3 * 0 &= 3 \neq 0, & 2 * 1 &= 2 \neq 0, \\ 1 * 3 &= 1 \neq 0, & 3 * 1 &= 3 \neq 0 & \text{และ} & 3 * 2 &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

จาก $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จะได้ว่า $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $0 \leq 2$, $0 \leq 3$, $1 \leq 1$, $2 \leq 2$ และ $3 \leq 3$

จากตารางจะเห็นได้ว่า $1 * 2 = 0$ และ $2 * 3 = 0$ ดังนั้น $1 \leq 2$ และ $2 \leq 3$

จากตัวอย่าง 3.1.6 จะเห็นว่า $\leq$ ไม่มีสมบัติสมมาตร เนื่องจาก $0 \leq 1$ แต่ $1 \not\leq 0$ และ $\leq$ ไม่มีสมบัติถ่ายทอด เนื่องจาก $1 \leq 2$ และ $2 \leq 3$ แต่ $1 \not\leq 3$

บทตั้ง 3.1.7: ให้ X เป็นพีชคณิต d จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้จริง

- (1) $\leq$ มีสมบัติสะท้อน
- (2) $\leq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร
- (3) $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d

- (1) จาก (d1) ได้ว่า $x * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $x \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$

นั่นคือ $\leq$ มีสมบัติสะท้อน

- (2) ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $x \leq y$ และ $y \leq x$

จะได้ว่า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$

จาก (d3) ได้ว่า $x = y$

ดังนั้น $\leq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร

- (3) จาก (d2) ได้ว่า $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$



บทนิยาม 3.1.8: ให้ X เป็นพีชคณิต d และ I เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก I ว่าเป็น **พีชคณิตย่อย d** (d -subalgebra) ของ X ถ้า $x * y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in I$

ตัวอย่าง 3.1.9: ให้ $X = \{0,1,2\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	1	1	0

จากตัวอย่าง 3.1.3 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต d

ให้ $I_1 = \{0\}$, $I_2 = \{0,2\}$ และ $I_3 = \{1,2\}$

พิจารณา $I_1 = \{0\}$

ได้ว่า $0 * 0 = 0 \in I_1$

จะเห็นว่า $x * y \in I_1$ สำหรับทุก $x, y \in I_1$

ดังนั้น I_1 เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

พิจารณา $I_2 = \{0,2\}$

จะเห็นว่า $2 * 0 = 1 \notin I_2$

ดังนั้น I_2 ไม่เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

พิจารณา $I_3 = \{1,2\}$

จะเห็นว่า $1 * 1 = 0 \notin I_3$

ดังนั้น I_3 ไม่เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

บทตั้ง 3.1.10: ให้ X เป็นพีชคณิต d และ I เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X จะได้ว่า $0 \in I$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d และ I เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

ดังนั้น $I \neq \emptyset$ จะได้ว่ามี $x \in I$

จาก (d1) ได้ว่า $x * x = 0$

จาก I เป็นพีชคณิตย่อย d จะได้ว่า $x * x \in I$

ดังนั้น $0 \in I$



บทตั้ง 3.1.11: ให้ X เป็นพีชคณิต d และ I เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X จะได้ว่า I เป็นพีชคณิต d

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d และ I เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

ได้ว่า $I \neq \emptyset$ และ $x * y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in I$

ดังนั้น I มีสมบัติปิดภายใต้ $*$

จาก $I \subseteq X$ ได้ว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน I

และจากบทตั้ง 3.1.10 ได้ว่า $0 \in I$

ให้ $x, y \in I$ จะได้ว่า $x, y \in X$

ดังนั้น I สอดคล้องกับ (d1)-(d3)

นั่นคือ I เป็นพีชคณิต d ■

บทตั้ง 3.1.12: ให้ X เป็นพีชคณิต d จะได้ว่า

(1) X เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

(2) $\{0\}$ เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d

(1) จะแสดงว่า X เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

เห็นได้ชัดว่า $X \subseteq X$ และ $X \neq \emptyset$

ให้ $x, y \in X$ ได้ว่า $x * y \in X$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้น X เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

(2) จะแสดงว่า $\{0\}$ เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

เห็นได้ว่า $\{0\} \subseteq X$ และ $\{0\} \neq \emptyset$

ให้ $x, y \in \{0\}$ ได้ว่า $x = 0 = y$

จาก (d1) ได้ว่า $x * y = 0 * 0 = 0 \in \{0\}$

ดังนั้น $\{0\}$ เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X ■

3.2 ตัวกรองในพีชคณิต d (Filters in d -algebras)

บทนิยาม 3.2.1: ให้ X เป็นพีชคณิต d และ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง

จะเรียก F ว่าเป็น **ตัวกรอง** (filter) ของ X ถ้า

(F1) $0 \in F$

(F2) ถ้า $x * y \in F$ และ $y \in F$ แล้ว $x \in F$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ตัวอย่าง 3.2.2: ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	2	0	0
3	3	3	3	0

จากตัวอย่าง 3.1.6 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต d

ให้ $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \{0,1\}$ และ $F_3 = \{0,2\}$

พิจารณา $F_1 = \{0\}$

เห็นได้ชัดว่า $0 \in F_1$

นั่นคือ (F1) เป็นจริง

สมมติให้ $x * y \in F_1$ และ $y \in F_1$

จะได้ว่า $x * y = 0$ และ $y = 0$

ดังนั้น $x * 0 = 0$

จากตารางจะได้ว่า $x = 0 \in F_1$

นั่นคือ (F2) เป็นจริง

ดังนั้น F_1 เป็นตัวกรองของ X

พิจารณา $F_2 = \{0,1\}$

เห็นได้ชัดว่า $0 \in F_2$

นั่นคือ (F1) เป็นจริง

จะแสดงว่า ถ้า $x * y \in F_2$ และ $y \in F_2$ แล้ว $x \in F_2$

โดยจะแสดงว่า ถ้า $x \notin F_2$ แล้ว $x * y \notin F_2$ หรือ $y \notin F_2$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \notin F_2$ และ $y \in F_2$

ได้ว่า $x \in \{2,3\}$ และ $y \in \{0,1\}$

จากตารางได้ว่า

$$2 * 0 = 2 \notin F_2, 2 * 1 = 2 \notin F_2, 3 * 0 = 3 \notin F_2 \text{ และ } 3 * 1 = 3 \notin F_2$$

ดังนั้น $x * y \notin F_2$ สำหรับทุก $x \notin F_2$ และ $y \in F_2$

นั่นคือ ถ้า $x * y \in F_2$ และ $y \in F_2$ แล้ว $x \in F_2$ สำหรับทุก $x, y \in X$

นั่นคือ (F2) เป็นจริง

ดังนั้น F_2 เป็นตัวกรองของ X

พิจารณา $F_3 = \{0, 2\}$

จาก $1 * 2 = 0 \in F_3$ และ $2 \in F_3$ แต่ $1 \notin F_3$

ได้ว่า (F2) ไม่เป็นจริง

ดังนั้น F_3 ไม่เป็นตัวกรองของ X

ตัวอย่าง 3.2.3: ให้ $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังนี้

$$x * y := \begin{cases} 0, & x \leq y \\ 1, & x > y \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 3.1.4 จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต d

กำหนดให้ $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \{0, 1\}$ และ $\{0, 1\} \subsetneq F_3 \subseteq X$

พิจารณา $F_1 = \{0\}$

จากบทตั้ง 3.1.12 (2) ได้ว่า $F_1 = \{0\}$ เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

เห็นได้ชัดว่า $0 \in F_1$ นั่นคือ (F1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x * y \in F_1$ และ $y \in F_1$

ได้ว่า $x * y = 0$ และ $y = 0$ นั่นคือ $x * 0 = 0$

จะได้ว่า $x \leq 0$

ดังนั้น $x = 0 \in F_1$

นั่นคือ (F2) เป็นจริง

ดังนั้น F_1 เป็นตัวกรองของ X

พิจารณา $F_2 = \{0, 1\}$

จะเห็นได้ว่า $\{0, 1\} \subseteq X$ และ $\{0, 1\} \neq \emptyset$

พิจารณา $0 * 0 = 0$, $0 * 1 = 0$, $1 * 0 = 1$ และ $1 * 1 = 0$

นั่นคือ $x * y \in F_2$ สำหรับทุก $x, y \in F_2$

ดังนั้น $F_2 = \{0, 1\}$ เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

จาก $2 * 1 = 1 \in F_2$ และ $1 \in F_2$ แต่ $2 \notin F_2$

นั่นคือ (F2) ไม่เป็นจริง

ดังนั้น F_2 ไม่เป็นตัวกรองของ X

พิจารณา F_3 โดยที่ $\{0, 1\} \subsetneq F_3 \subseteq X$

ให้ $x, y \in F_3$

จะได้ว่า $x * y \in \{0, 1\} \subsetneq F_3$

ดังนั้น F_3 เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X

ให้ m เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดใน F_3

จาก $m + 1 > 1$ ได้ว่า $(m + 1) * 1 = 1 \in F_3$

จะเห็นว่า $1 \in F_3$ แต่ $m + 1 \notin F_3$

ได้ว่า (F2) ไม่เป็นจริง

ดังนั้น F_3 ไม่เป็นตัวกรองของ X

บทตั้ง 3.2.4: ให้ X เป็นพีชคณิต d จะได้ว่า

(1) X เป็นตัวกรองของ X

(2) $\{0\}$ เป็นตัวกรองของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d

(1) จะแสดงว่า X เป็นตัวกรองของ X

จาก $0 \in X$ ได้ว่า (F1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า ถ้า $x * y \in X$ และ $y \in X$ แล้ว $x \in X$

นั่นคือ (F2) เป็นจริง

ดังนั้น X เป็นตัวกรองของ X

(2) จะแสดงว่า $\{0\}$ เป็นตัวกรองของ X

เห็นได้ชัดว่า $0 \in \{0\}$ นั่นคือ (F1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $x * y \in \{0\}$ และ $y \in \{0\}$

ได้ว่า $x * 0 = 0$

จากบทตั้ง 3.1.2 ได้ว่า $x = 0$ นั่นคือ $x \in \{0\}$

จะได้ว่า (F2) เป็นจริง

ดังนั้น $\{0\}$ เป็นตัวกรองของ X



3.3 หน่วยและพีชคณิต d ที่มีขอบเขต (Unit and bounded d-algebras)

บทนิยาม 3.3.1: ให้ X เป็นพีชคณิต d และ $e \in X$ จะเรียก e ว่าเป็น หน่วย (unit) ของ X ถ้า $x \leq e$ (กล่าวคือ $x * e = 0$) สำหรับทุก $x \in X$ และจะเรียกพีชคณิต d ที่มีหน่วยว่า พีชคณิต d ที่มีขอบเขต (bounded d-algebra)

จะเขียนแทน $e * x$ ด้วย x^* สำหรับทุก $x \in X$

บทตั้ง 3.3.2: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว จะได้ว่า $e \neq 0$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว สมมติให้ $e = 0$

จาก e เป็นหน่วย ได้ว่า $x * e = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จาก X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว ได้ว่า มี $a \in X$ โดยที่ $a \neq 0$

ดังนั้น $a * e = 0$

จาก $e = 0$ และ (d2) ได้ว่า $e * a = 0 * a = 0$

จะได้ว่า $a * e = 0$ และ $e * a = 0$

จาก (d3) ได้ว่า $a = e = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง

สรุปได้ว่า $e \neq 0$ ■

ตัวอย่าง 3.3.3: ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	1	0	0
3	3	2	1	0

จากตารางได้ว่า $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

จากตารางจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} 1 * 0 &= 1 \neq 0, & 2 * 0 &= 2 \neq 0, & 3 * 0 &= 3 \neq 0, \\ 2 * 1 &= 1 \neq 0, & 3 * 1 &= 2 \neq 0 & \text{และ} & 3 * 2 &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

จากตารางจะเห็นว่า $x * 3 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ได้ว่า 3 เป็นหน่วยของ X

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต

ต่อไปจะพิจารณา x^* โดยที่ $x \in X$

จากตารางได้ว่า $0^* = 3 * 0 = 3, \quad 1^* = 3 * 1 = 2,$
 $2^* = 3 * 2 = 1 \quad \text{และ} \quad 3^* = 3 * 3 = 0$

ตัวอย่าง 3.3.4: ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	1	1	0

จากตัวอย่าง 3.1.3 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต d

จะเห็นว่า ไม่มีสมาชิก $e \in X$ ที่ทำให้ $x * e = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

นั่นคือ X ไม่มีหน่วย

ดังนั้น X ไม่เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต

บทตั้ง 3.3.5: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต จะได้ว่า หน่วยจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต จะได้ว่า X มีหน่วย

สมมติให้ e_1, e_2 เป็นหน่วยของ X

ดังนั้น $x \leq e_1$ และ $x \leq e_2$ สำหรับทุก $x \in X$

นั่นคือ $x * e_1 = 0$ และ $x * e_2 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จาก $e_1, e_2 \in X$ ได้ว่า $e_2 * e_1 = 0$ และ $e_1 * e_2 = 0$

จาก (d3) จะได้ว่า $e_1 = e_2$

นั่นคือ หน่วยจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น



บทตั้ง 3.3.6: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย จะได้ว่า

- (1) $e^* = 0$
- (2) $e^* * x = 0$
- (3) ถ้า $x^* = 0$ แล้ว $x = e$ (นั่นคือ ถ้า $x \neq e$ แล้ว $x^* \neq 0$)
- (4) ถ้า X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว แล้ว $(e^* * x^*)^* \neq 0$

สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ $x \in X$

- (1) จะแสดงว่า $e^* = 0$

จาก (d1) ได้ว่า $e^* = e * e = 0$

ดังนั้น $e^* = 0$

- (2) จะแสดงว่า $e^* * x = 0$

พิจารณา $e^* * x = 0 * x$ (จากข้อ (1))

$$= 0 \quad (\text{จาก (d2)})$$

ดังนั้น $e^* * x = 0$

- (3) จะแสดงว่า ถ้า $x^* = 0$ แล้ว $x = e$

สมมติให้ $x^* = 0$ ได้ว่า $e * x = 0$

จาก e เป็นหน่วย ได้ว่า $x * e = 0$

โดยสมบัติ (d3) ได้ว่า $x = e$

- (4) สมมติให้ X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว จะแสดงว่า $(e^* * x^*)^* \neq 0$

พิจารณา $(e^* * x^*)^* = e * [(e * e) * (e * x)]$

$$= e * [0 * (e * x)] \quad (\text{จาก (d1)})$$

$$= e * 0 \quad (\text{จาก (d2)})$$

$$\neq 0 \quad (\text{จาก } e \neq 0 \text{ และบทตั้ง 3.1.2})$$

ดังนั้น $(e^* * x^*)^* \neq 0$ ■

บทตั้ง 3.3.7: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรองของ X

ถ้า $e \in F$ แล้ว $F = X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรองของ X

สมมติให้ $e \in F$

ให้ $x \in X$

จาก e เป็นหน่วย ได้ว่า $x * e = 0$

จาก F เป็นตัวกรอง โดย (F1) ได้ว่า $0 \in F$

ดังนั้น $x * e \in F$

จาก $x * e \in F$ และ $e \in F$ โดย (F2) ได้ว่า $x \in F$

นั่นคือ $X \subseteq F$ สรุปได้ว่า $X = F$ ■

3.4 ตัวกรอง d (d-filters)

บทนิยาม 3.4.1: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก F ว่าเป็น **ตัวกรอง d** (d-filter) ของ X ถ้า

(dF1) $e \in F$

(dF2) ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F$ และ $y \in F$ แล้ว $x \in F$ สำหรับทุก $x, y \in X$

หมายเหตุ: $(x^* * y^*)^* = e * [(e * x) * (e * y)]$

ตัวอย่าง 3.4.2: ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	1	0	0
3	3	2	1	0

จากตารางได้ว่า $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

จากตารางจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} 1 * 0 = 1 \neq 0, \quad 2 * 0 = 2 \neq 0, \quad 3 * 0 = 3 \neq 0, \quad 1 * 2 = 1 \neq 0, \\ 2 * 1 = 1 \neq 0, \quad 3 * 1 = 2 \neq 0 \text{ และ } 3 * 2 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

จากตารางจะเห็นว่า $x * 3 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ นั่นคือ 3 เป็นหน่วยของ X

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี 3 เป็นหน่วย

กำหนดให้ $F_1 = \{1,3\}$ และ $F_2 = \{2,3\}$

พิจารณา $F_1 = \{1,3\}$

จะเห็นว่า $3 \in F_1$

นั่นคือ (dF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ จะแสดงว่า ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F_1$ และ $y \in F_1$ แล้ว $x \in F_1$

สมมติให้ $x \notin F_1$ และ $y \in F_1$ ได้ว่า $x \in \{0,2\}$ และ $y \in \{1,3\}$

จะแสดงว่า $(x^* * y^*)^* \notin F_1$

พิจารณา $(0^* * 1^*)^* = 3 * ((3 * 0) * (3 * 1)) = 3 * (3 * 2) = 3 * 1 = 2 \notin F_1$

$(0^* * 3^*)^* = 3 * ((3 * 0) * (3 * 3)) = 3 * (3 * 0) = 3 * 3 = 0 \notin F_1$

$(2^* * 1^*)^* = 3 * ((3 * 2) * (3 * 1)) = 3 * (1 * 2) = 3 * 1 = 2 \notin F_1$

$(2^* * 3^*)^* = 3 * ((3 * 2) * (3 * 3)) = 3 * (1 * 0) = 3 * 1 = 2 \notin F_1$

ดังนั้น $(x^* * y^*)^* \notin F_1$

นั่นคือ ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F_1$ และ $y \in F_1$ แล้ว $x \in F_1$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า (dF2) เป็นจริง

ดังนั้น F_1 เป็นตัวกรอง d ของ X

พิจารณา $F_2 = \{2,3\}$

เนื่องจากมี $2 \in F_2$ และ

$(1^* * 2^*)^* = 3 * ((3 * 1) * (3 * 2)) = 3 * (2 * 1) = 3 * 1 = 2 \in F_2$

แต่ $1 \notin F_2$

นั่นคือ (dF2) ไม่เป็นจริง

ดังนั้น F_2 ไม่เป็นตัวกรอง d ของ X

จะเห็นว่าตัวกรอง d ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวกรอง ดังตัวอย่าง 3.4.2 F_1 เป็นตัวกรอง d แต่ไม่เป็นตัวกรอง เนื่องจาก $0 \notin F_1$

บทตั้ง 3.4.3: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย จะได้ว่า X เป็นตัวกรอง d ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย

จาก $e \in X$ ได้ว่า (dF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า ถ้า $(x^* * y^*)^* \in X$ และ $y \in X$ แล้ว $x \in X$

นั่นคือ (dF2) เป็นจริง

ดังนั้น X เป็นตัวกรอง d ของ X ■

บทแทรก 3.4.4: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง d ของ X

ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว $F = X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง d ของ X

สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X

จาก (dF1) ได้ว่า $e \in F$

โดยบทตั้ง 3.3.7 ได้ว่า $F = X$ ■

ข้อสังเกต: มีเซต X เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่เป็นทั้งตัวกรองและตัวกรอง d ของ X

ทฤษฎีบท 3.4.5: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย ถ้า F_1 และ F_2 เป็นตัวกรอง d ของ X

แล้ว $F_1 \cap F_2$ เป็นตัวกรอง d ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และ F_1, F_2 เป็นตัวกรอง d ของ X

จาก (dF1) ได้ว่า $e \in F_1$ และ $e \in F_2$ จะได้ว่า $e \in F_1 \cap F_2$

นั่นคือ $F_1 \cap F_2$ สอดคล้องกับสมบัติ (dF1)

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $(x^* * y^*)^* \in F_1 \cap F_2$ และ $y \in F_1 \cap F_2$

จะได้ว่า $(x^* * y^*)^* \in F_1$ และ $(x^* * y^*)^* \in F_2$

และได้ว่า $y \in F_1$ และ $y \in F_2$

จาก F_1 และ F_2 เป็นตัวกรอง d ของ X

จะได้ว่า $x \in F_1$ และ $x \in F_2$ นั่นคือ $x \in F_1 \cap F_2$

ได้ว่า $F_1 \cap F_2$ สอดคล้องกับสมบัติ (dF2)

ดังนั้น $F_1 \cap F_2$ เป็นตัวกรอง d ของ X ■

ถ้า F_1 และ F_2 เป็นตัวกรอง d ของพีชคณิต d ที่มีขอบเขต แล้ว $F_1 \cup F_2$ ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวกรอง d ของ X ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.4.6: ให้ $X = \{0,1,2,3,4\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	2	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	3	2	0

จากตารางได้ว่า $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

จากตารางจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} 1 * 0 &= 1 \neq 0, & 2 * 0 &= 2 \neq 0, & 3 * 0 &= 3 \neq 0, & 4 * 0 &= 4 \neq 0, \\ 1 * 2 &= 1 \neq 0, & 2 * 1 &= 2 \neq 0, & 3 * 1 &= 3 \neq 0, & 4 * 1 &= 4 \neq 0, \\ 2 * 3 &= 2 \neq 0, & 3 * 2 &= 3 \neq 0, & 4 * 2 &= 3 \neq 0 \text{ และ } 4 * 3 &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

จากตารางจะเห็นว่า $x * 4 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ นั่นคือ 4 เป็นหน่วยของ X

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี 4 เป็นหน่วย

กำหนดให้ $F_1 = \{2,4\}$ และ $F_2 = \{3,4\}$

พิจารณา $F_1 = \{2,4\}$

จะเห็นว่า $4 \in F_1$

นั่นคือ (dF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $x \notin F_1$ และ $y \in F_1$ ได้ว่า $x \in \{0,1,3\}$ และ $y \in \{2,4\}$

จะแสดงว่า $(x * y)^* \notin F_1$

พิจารณา $(0 * 2)^* = 4 * ((4 * 0) * (4 * 2)) = 4 * (4 * 3) = 4 * 2 = 3 \notin F_1$

$$(0 * 4)^* = 4 * ((4 * 0) * (4 * 4)) = 4 * (4 * 0) = 4 * 4 = 0 \notin F_1$$

$$(1 * 2)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 2)) = 4 * (4 * 3) = 4 * 2 = 3 \notin F_1$$

$$(1 * 4)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 4)) = 4 * (4 * 0) = 4 * 4 = 0 \notin F_1$$

$$(3^* * 2^*)^* = 4 * ((4 * 3) * (4 * 2)) = 4 * (2 * 3) = 4 * 2 = 3 \notin F_1$$

$$(3^* * 4^*)^* = 4 * ((4 * 3) * (4 * 4)) = 4 * (2 * 0) = 4 * 2 = 3 \notin F_1$$

ดังนั้น $(x^* * y^*)^* \notin F_1$

นั่นคือ ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F_1$ และ $y \in F_1$ แล้ว $x \in F_1$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า (dF2) เป็นจริง

ดังนั้น F_1 เป็นตัวกรอง d ของ X

พิจารณา $F_2 = \{3,4\}$

จะเห็นว่า $4 \in F_2$

นั่นคือ (dF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $x \notin F_2$ และ $y \in F_2$ ได้ว่า $x \in \{0,1,2\}$ และ $y \in \{3,4\}$

จะแสดงว่า $(x^* * y^*)^* \notin F_2$

พิจารณา $(0^* * 3^*)^* = 4 * ((4 * 0) * (4 * 3)) = 4 * (4 * 2) = 4 * 3 = 2 \notin F_2$

$$(0^* * 4^*)^* = 4 * ((4 * 0) * (4 * 4)) = 4 * (4 * 0) = 4 * 4 = 0 \notin F_2$$

$$(1^* * 3^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 3)) = 4 * (4 * 2) = 4 * 3 = 2 \notin F_2$$

$$(1^* * 4^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 4)) = 4 * (4 * 0) = 4 * 4 = 0 \notin F_2$$

$$(2^* * 3^*)^* = 4 * ((4 * 2) * (4 * 3)) = 4 * (3 * 2) = 4 * 3 = 2 \notin F_2$$

$$(2^* * 4^*)^* = 4 * ((4 * 2) * (4 * 4)) = 4 * (3 * 0) = 4 * 3 = 2 \notin F_2$$

ดังนั้น $(x^* * y^*)^* \notin F_2$

นั่นคือ ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F_2$ และ $y \in F_2$ แล้ว $x \in F_2$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า (dF2) เป็นจริง

ดังนั้น F_2 เป็นตัวกรอง d ของ X

พิจารณา $F_1 \cup F_2 = \{2,3,4\}$ จะได้ว่า มี $2 \in F_1 \cup F_2$ และ

$$(0^* * 2^*)^* = 4 * ((4 * 0) * (4 * 2)) = 4 * (4 * 3) = 4 * 2 = 3 \in F_1 \cup F_2$$

แต่ $0 \notin F_1 \cup F_2$

ดังนั้น ขาดสมบัติ (dF2) สรุปได้ว่า $F_1 \cup F_2$ ไม่เป็นตัวกรอง d ของ X

3.5 ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ (Complete d-filters)

บทนิยาม 3.5.1: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก F ว่าเป็น **ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์** (complete d-filter) ของ X ถ้า

$$(cF1) \quad e \in F$$

$$(cF2) \quad \text{ถ้า } (x^* * y^*)^* \in F \text{ สำหรับทุก } y \in F \text{ แล้ว } x \in F$$

ตัวอย่าง 3.5.2: ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	1	0	0
3	3	2	1	0

จากตัวอย่าง 3.3.3 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี 3 เป็นหน่วย

กำหนดให้ $F = \{1,3\}$

จะได้ว่า $3 \in F$

นั่นคือ (cF1) เป็นจริง

ให้ $x \notin F$ ได้ว่า $x \in \{0,2\}$

จะแสดงว่า $(x^* * y^*)^* \notin F$ สำหรับบาง $y \in F$

ถ้า $x = 0$ แล้ว จะมี $y = 1 \in F$ ซึ่ง

$$(x^* * y^*)^* = (0^* * 1^*)^* = 3 * [(3 * 0) * (3 * 1)] = 3 * (3 * 2) = 3 * 1 = 2 \notin F$$

ถ้า $x = 2$ แล้ว จะมี $y = 3 \in F$ ซึ่ง

$$(x^* * y^*)^* = (2^* * 3^*)^* = 3 * [(3 * 2) * (3 * 3)] = 3 * (1 * 0) = 3 * 1 = 2 \notin F$$

ดังนั้น $(x^* * y^*)^* \notin F$ สำหรับบาง $y \in F$

นั่นคือ ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$ แล้ว $x \in F$

จะได้ว่า (cF2) เป็นจริง

ดังนั้น F เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

แต่ F ไม่เป็นตัวกรอง d ของ X เนื่องจากมี $1 \in F$ และ

$$(2^* * 1^*)^* = 3 * [(3 * 2) * (3 * 1)] = 3 * (1 * 2) = 3 * 0 = 3 \in F$$

แต่ $2 \notin F$

ตัวอย่าง 3.5.3: ให้ $X = \{0,1,2\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0

จากตารางได้ว่า $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

จากตารางจะเห็นว่า

$$1 * 0 = 1 \neq 0, 2 * 0 = 2 \neq 0 \text{ และ } 2 * 1 = 2 \neq 0$$

นั่นคือ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

จากตารางจะเห็นว่า $x * 2 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ได้ว่า 2 เป็นหน่วยของ X

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต

ให้ $F = \{0,2\}$ จะได้ว่า F ไม่เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

เนื่องจาก $(1 * 0^*)^* = 2 * [(2 * 1) * (2 * 0)] = 2 * (2 * 2) = 2 * 0 = 2 \in F$

และ $(1 * 2^*)^* = 2 * [(2 * 1) * (2 * 2)] = 2 * (2 * 0) = 2 * 2 = 0 \in F$

แต่ $1 \notin F$ (นั่นคือ $(1 * y^*)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$ แต่ $1 \notin F$)

และได้ว่า F ไม่เป็นตัวกรอง d ของ X เนื่องจากมี $0 \in F$ และ

$$(1 * 0^*)^* = 2 * [(2 * 1) * (2 * 0)] = 2 * (2 * 2) = 2 * 0 = 2 \in F$$

แต่ $1 \notin F$

นอกจากนี้ได้ว่า F ไม่เป็นตัวกรองของ X เนื่องจาก $1 * 2 = 0 \in F$ และ $2 \in F$ แต่ $1 \notin F$

ถ้า F_1 และ F_2 เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X แล้ว ไม่จำเป็นที่ $F_1 \cap F_2$ และ $F_1 \cup F_2$ จะเป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5.4: ให้ $X = \{0,1,2,3,4\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	2	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	3	2	0

จากตัวอย่าง 3.4.6 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี 4 เป็นหน่วย

กำหนดให้ $F_1 = \{0,2,4\}$ และ $F_2 = \{0,3,4\}$

พิจารณา $F_1 = \{0,2,4\}$

จะเห็นว่า $4 \in F_1$

นั่นคือ (cF1) เป็นจริง

ให้ $x \notin F_1$ ได้ว่า $x \in \{1,3\}$

จะแสดงว่า $(x * y)^* \notin F_1$ สำหรับบาง $y \in F_1$

ถ้า $x = 1$ แล้ว จะมี $y = 2 \in F_1$ ซึ่ง

$$(x * y)^* = (1 * 2)^* = 4 * [(4 * 1) * (4 * 2)] = 4 * (4 * 3) = 4 * 2 = 3 \notin F_1$$

ถ้า $x = 3$ แล้ว จะมี $y = 4 \in F_1$ ซึ่ง

$$(x * y)^* = (3 * 4)^* = 4 * [(4 * 3) * (4 * 4)] = 4 * (2 * 0) = 4 * 2 = 3 \notin F_1$$

ดังนั้น $(x * y)^* \notin F_1$ สำหรับบาง $y \in F_1$

นั่นคือ ถ้า $(x * y)^* \in F_1$ สำหรับทุก $y \in F_1$ แล้ว $x \in F_1$

จะได้ว่า (cF2) เป็นจริง

ดังนั้น F_1 เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

พิจารณา $F_2 = \{0,3,4\}$

จะเห็นว่า $4 \in F_2$

นั่นคือ (cF1) เป็นจริง

ให้ $x \notin F_2$ ได้ว่า $x \in \{1,2\}$

จะแสดงว่า $(x * y)^* \notin F_2$ สำหรับบาง $y \in F_2$

ถ้า $x = 1$ แล้ว จะมี $y = 3 \in F_2$ ซึ่ง

$$(x * y)^* = (1 * 3)^* = 4 * [(4 * 1) * (4 * 3)] = 4 * (4 * 2) = 4 * 3 = 2 \notin F_2$$

ถ้า $x = 2$ แล้ว จะมี $y = 4 \in F_2$ ซึ่ง

$$(x * y^*)^* = (2^* * 4^*)^* = 4 * [(4 * 2) * (4 * 4)] = 4 * (3 * 0) = 4 * 3 = 2 \notin F_2$$

ดังนั้น $(x^* * y^*)^* \notin F_2$ สำหรับบาง $y \in F_2$

นั่นคือ ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F_2$ สำหรับทุก $y \in F_2$ แล้ว $x \in F_2$

จะได้ว่า (cF2) เป็นจริง

ดังนั้น F_2 เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

พิจารณา $F_1 \cap F_2 = \{0, 4\}$ ได้ว่า $F_1 \cap F_2$ ไม่เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X เนื่องจาก

$$(1^* * 0^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 0)) = 4 * (4 * 4) = 4 * 0 = 4 \in F_1 \cap F_2$$

$$(1^* * 4^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 4)) = 4 * (4 * 0) = 4 * 4 = 0 \in F_1 \cap F_2$$

แต่ $1 \notin F_1 \cap F_2$ (นั่นคือ $(1^* * y^*)^* \in F_1 \cap F_2$ สำหรับทุก $y \in F_1 \cap F_2$ แต่ $1 \notin F_1 \cap F_2$)

พิจารณา $F_1 \cup F_2 = \{0, 2, 3, 4\}$ ได้ว่า $F_1 \cup F_2$ ไม่เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X เนื่องจาก

$$(1^* * 0^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 0)) = 4 * (4 * 4) = 4 * 0 = 4 \in F_1 \cup F_2$$

$$(1^* * 2^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 2)) = 4 * (4 * 3) = 4 * 2 = 3 \in F_1 \cup F_2$$

$$(1^* * 3^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 3)) = 4 * (4 * 2) = 4 * 3 = 2 \in F_1 \cup F_2$$

$$(1^* * 4^*)^* = 4 * ((4 * 1) * (4 * 4)) = 4 * (4 * 0) = 4 * 4 = 0 \in F_1 \cup F_2$$

แต่ $1 \notin F_1 \cup F_2$ (นั่นคือ $(1^* * y^*)^* \in F_1 \cup F_2$ สำหรับทุก $y \in F_1 \cup F_2$ แต่ $1 \notin F_1 \cup F_2$)

ทฤษฎีบท 3.5.5: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง ได้ว่า ถ้า F เป็นตัวกรอง d ของ X แล้ว F เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และสมมติให้ F เป็นตัวกรอง d ของ X

จาก (dF1) เป็นจริง ได้ว่า $e \in F$ ดังนั้น (cF1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า (cF2) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $(x^* * y^*)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$

ได้ว่า $(x^* * y^*)^* \in F$ และ $y \in F$

จาก (dF2) ได้ว่า $x \in F$

ดังนั้น ถ้า $(x^* * y^*)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$ แล้ว $x \in F$

นั่นคือ (cF2) เป็นจริง

สรุปได้ว่า F เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X ■

บทกลับของบทตั้ง 3.5.5 ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่าง 3.5.2 จะเห็นว่า F เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X แต่ F ไม่เป็นตัวกรอง d ของ X

บทตั้ง 3.5.6: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย

จะได้ว่า X เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย

จาก $e \in X$ ได้ว่า (cF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า ถ้า $(x * y)^* \in X$ สำหรับทุก $y \in X$ แล้ว $x \in X$

นั่นคือ (cF2) เป็นจริง

ดังนั้น X เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X ■

บทแทรก 3.5.7: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว $F = X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X

จาก (cF1) ได้ว่า $e \in F$

โดยบทตั้ง 3.3.7 ได้ว่า $F = X$ ■

ข้อสังเกต: มีเซต X เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่เป็นทั้งตัวกรอง ตัวกรอง d และตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X

3.6 ตัวกรอง crazy (Crazy filters)

บทนิยาม 3.6.1: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก F ว่าเป็น **ตัวกรอง crazy** (crazy filter) ของ X ถ้า

(zF1) $e \in F$

(zF2) ถ้า $(y * x)^* \in F$ และ $y \in F$ แล้ว $x \in F$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ตัวอย่าง 3.6.2: ให้ $X = \{0,1,2,3,4\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	2	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	3	2	0

จากตัวอย่าง 3.4.6 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี 4 เป็นหน่วย

กำหนดให้ $F_1 = \{2,4\}$ และ $F_2 = \{0,3,4\}$

พิจารณา $F_1 = \{2,4\}$

จะเห็นว่า $4 \in F_1$

นั่นคือ (zF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $x \notin F_1$ และ $y \in F_1$ ได้ว่า $x \in \{0,1,3\}$ และ $y \in \{2,4\}$

จะแสดงว่า $(y * x)^* \notin F_1$

พิจารณา $(2 * 0)^* = 2^* = 4 * 2 = 3 \notin F_1$

$(2 * 1)^* = 2^* = 4 * 2 = 3 \notin F_1$

$(2 * 3)^* = 2^* = 4 * 2 = 3 \notin F_1$

$(4 * 0)^* = 4^* = 4 * 4 = 0 \notin F_1$

$(4 * 1)^* = 4^* = 4 * 4 = 0 \notin F_1$

$(4 * 3)^* = 2^* = 4 * 2 = 3 \notin F_1$

ดังนั้น $(y * x)^* \notin F_1$

นั่นคือ ถ้า $(y * x)^* \in F_1$ และ $y \in F_1$ แล้ว $x \in F_1$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า (zF2) เป็นจริง

ดังนั้น F_1 เป็นตัวกรอง crazy ของ X

พิจารณา $F_2 = \{0,3,4\}$

จาก $0 \in F_2$ และ $(0 * 1)^* = 0^* = 4 * 0 = 4 \in F_2$ แต่ $1 \notin F_2$

ดังนั้น (zF2) ไม่เป็นจริง

นั่นคือ F_2 ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X

บทตั้ง 3.6.3: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย จะได้ว่า X เป็นตัวกรอง crazy ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย

จาก $e \in X$ ได้ว่า (zF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า ถ้า $(y * x)^* \in X$ และ $y \in X$ แล้ว $x \in X$

นั่นคือ (zF2) เป็นจริง

ดังนั้น X เป็นตัวกรอง crazy ของ X

■

บทแทรก 3.6.4: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง crazy ของ X ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว $F = X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง crazy ของ X สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X

จาก (zF1) ได้ว่า $e \in F$

โดยบทตั้ง 3.3.7 ได้ว่า $F = X$ ■

ทฤษฎีบท 3.6.5: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย โดยมีเงื่อนไขว่า $0^* = e$ และให้ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $F \neq X$ ถ้า $0 \in F$ แล้ว F ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย โดยมีเงื่อนไขว่า $0^* = e$ และให้ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $F \neq X$

สมมติให้ $0 \in F$

ถ้า $e \notin F$ แล้วได้ว่า F ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X

ดังนั้น จะพิจารณากรณี $e \in F$

จาก $F \neq X$ จะได้ว่า มี $a \notin F$

จาก (d2) ได้ว่า $0 * a = 0$

ดังนั้น $(0 * a)^* = 0^* = e \in F$

ได้ว่า $(0 * a)^* \in F$ และ $0 \in F$ แต่ $a \notin F$

ดังนั้น (zF2) ไม่เป็นจริง

นั่นคือ F ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X ■

3.7 ตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ (Complete crazy-filters)

บทนิยาม 3.7.1: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก F ว่าเป็น ตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ (complete crazy-filter) ของ X ถ้า

(czF1) $e \in F$

(czF2) ถ้า $(y * x)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$ แล้ว $x \in F$

ตัวอย่าง 3.7.2: ให้ $X = \{0,1,2,3,4\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	3	4	1	0

จากตารางได้ว่า $x * x = 0$ และ $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น X สอดคล้องกับสมบัติ (d1) และ (d2) ตามลำดับ

จากตารางจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} 1 * 0 &= 1 \neq 0, & 2 * 0 &= 2 \neq 0, & 3 * 0 &= 3 \neq 0, & 4 * 0 &= 4 \neq 0, \\ 1 * 2 &= 1 \neq 0, & 2 * 1 &= 2 \neq 0, & 3 * 1 &= 3 \neq 0, & 4 * 1 &= 3 \neq 0, \\ 3 * 2 &= 3 \neq 0, & 4 * 2 &= 4 \neq 0 & \text{และ} & 4 * 3 &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ ได้ว่า $x * y \neq 0$ หรือ $y * x \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า X สอดคล้องกับสมบัติ (d3)

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d

จากตารางจะเห็นว่า $x * 4 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ นั่นคือ 4 เป็นหน่วย

ดังนั้น X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี 4 เป็นหน่วย

กำหนดให้ $F = \{1,4\}$

พิจารณา $F = \{1,4\}$

จะเห็นว่า $4 \in F$

นั่นคือ (czF1) เป็นจริง

ให้ $x \notin F$ ได้ว่า $x \in \{0,2,3\}$

จะแสดงว่า $(y * x)^* \notin F$ สำหรับบาง $y \in F$

ถ้า $x = 0$ แล้วจะมี $y = 1 \in F$ ซึ่ง

$$(y * x)^* = (1 * 0)^* = 1^* = 4 * 1 = 3 \notin F$$

ถ้า $x = 2$ แล้วจะมี $y = 4 \in F$ ซึ่ง

$$(y * x)^* = (4 * 2)^* = 4^* = 4 * 4 = 0 \notin F$$

ถ้า $x = 3$ แล้วจะมี $y = 4 \in F_1$ ซึ่ง

$$(y * x)^* = (4 * 3)^* = 1^* = 4 * 1 = 3 \notin F$$

ดังนั้น $(y * x)^* \notin F_1$ สำหรับบาง $y \in F$

นั่นคือ ถ้า $(y * x)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$ แล้ว $x \in F$

จะได้ว่า (czF2) เป็นจริง

ดังนั้น F เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X

และได้ว่า F ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X เนื่องจากมี $1 \in F$ และ

$$(1 * 3)^* = 4 * 0 = 4 \in F$$

แต่ $3 \notin F$

ตัวอย่าง 3.7.3: ให้ $X = \{0,1,2\}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0

จากตัวอย่าง 3.5.3 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี 2 เป็นหน่วย

ให้ $F = \{0,2\}$ จะได้ว่า F ไม่เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X

เนื่องจาก $(0 * 1)^* = 0^* = 2 * 0 = 2 \in F$

และ $(2 * 1)^* = 2^* = 2 * 2 = 0 \in F$

แต่ $1 \notin F$ (นั่นคือ $(y * 1)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$ แต่ $1 \notin F$)

และได้ว่า F ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X เนื่องจากมี $0 \in F$ และ

$$(0 * 1)^* = 0^* = 2 * 0 = 2 \in F$$

แต่ $1 \notin F$

บทตั้ง 3.7.4: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย

จะได้ว่า X เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย

จาก $e \in X$ ได้ว่า (czF1) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า ถ้า $(y * x)^* \in X$ สำหรับทุก $y \in X$ แล้ว $x \in X$

นั่นคือ (czF2) เป็นจริง

ดังนั้น X เป็นตัวกรอง crazy ของ X



บทแทรก 3.7.5: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว $F = X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และให้ F เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X

จาก (czF1) ได้ว่า $e \in F$

โดยบทตั้ง 3.3.7 ได้ว่า $F = X$ ■

จากบทแทรก 3.4.4, 3.5.7, 3.6.4 และ 3.7.5 สรุปได้ว่า มีเซต X เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่เป็นทั้งตัวกรองตัวกรอง d ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ ตัวกรอง crazy และตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X

บทตั้ง 3.7.6: ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย และ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง ถ้า F เป็นตัวกรอง crazy ของ X แล้ว F เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และสมมติให้ F เป็นตัวกรอง crazy ของ X

จาก (zf1) เป็นจริง ได้ว่า $e \in F$ ดังนั้น (czF1) เป็นจริง

ต่อไปนี้จะแสดงว่า (czF2) เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $(y * x)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$

ดังนั้น $(y * x)^* \in F$ และ $y \in F$

จาก (zf2) ได้ว่า $x \in F$

ดังนั้น ถ้า $(y * x)^* \in F$ สำหรับทุก $y \in F$ แล้ว $x \in F$

นั่นคือ (czF2) เป็นจริง

สรุปได้ว่า F เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X ■

บทกลับของบทตั้ง 3.7.6 ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่าง 3.7.2 จะเห็นว่า F เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X แต่ F ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X

3.8 ฟังก์ชันสาคิสต์ฐานในพีชคณิต d (Homomorphisms in d-algebras)

บทนิยาม 3.8.1: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d และ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y จะเรียก f ว่าเป็น

- (1) ฟังก์ชันสาคิสต์ฐาน (homomorphism) ถ้า

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

- (2) ฟังก์ชันอุปรีสต์ฐาน (epimorphism) ถ้า f เป็นฟังก์ชันสาคิสต์ฐานและฟังก์ชันทั่วถึง
 (3) ฟังก์ชันเอกส่ฐาน (monomorphism) ถ้า f เป็นฟังก์ชันสาคิสต์ฐานและฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 (4) ฟังก์ชันสมส่ฐาน (isomorphism) ถ้า f เป็นฟังก์ชันอุปรีสต์ฐานและฟังก์ชันเอกส่ฐาน

ทฤษฎีบท 3.8.2: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d และ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y

ถ้า f เป็นฟังก์ชันสมส่ฐาน แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันสมส่ฐาน

พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d และ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y

สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันสมส่ฐานจาก X ไป Y

ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและหนึ่งต่อหนึ่งจาก X ไป Y

จากทฤษฎีบท 2.2.6 ได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและหนึ่งต่อหนึ่งจาก Y ไป X

ต่อไปจะแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันสาคิสต์ฐาน

ให้ $a, b \in Y$ จะแสดงว่า $f^{-1}(a) * f^{-1}(b) = f^{-1}(a * b)$

จาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่า มี $x, y \in X$ ซึ่ง $f(x) = a$ และ $f(y) = b$

จะได้ว่า $f^{-1}(a) = x$ และ $f^{-1}(b) = y$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } f^{-1}(a * b) &= f^{-1}(f(x) * f(y)) \\ &= f^{-1}(f(x * y)) && (\text{จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสาคิสต์ฐาน}) \\ &= (f^{-1} \circ f)(x * y) \\ &= i_X(x * y) && (\text{จากทฤษฎีบท 2.2.11 (1)}) \\ &= x * y \\ &= f^{-1}(a) * f^{-1}(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันสาคิสต์ฐาน

สรุปได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันสมส่ฐาน ■

บทตั้ง 3.8.3: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d และ f เป็นฟังก์ชันสาคิสต์ฐานจาก X ไป Y จะได้ว่า

- (1) $f(0) = 0$
 (2) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d และ f เป็นฟังก์ชันสาคิสต์ฐาน จาก X ไป Y

(1) จะแสดงว่า $f(0) = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา} \quad f(0) &= f(0 * 0) && \text{(จาก (d1))} \\
 &= f(0) * f(0) && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐาน)} \\
 &= 0 && \text{(จาก (d1))}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(0) = 0$

(2) จะแสดงว่า ถ้า $x \leq y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ให้ $x, y \in X$ สมมติให้ $x \leq y$ นั่นคือ $x * y = 0$

จะแสดงว่า $f(x) \leq f(y)$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา} \quad f(x) * f(y) &= f(x * y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐาน)} \\
 &= f(0) && \text{(จาก } x * y = 0) \\
 &= 0 && \text{(จากข้อ (1))}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x) * f(y) = 0$

นั่นคือ $f(x) \leq f(y)$ ■

บทตั้ง 3.8.4: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และให้ f เป็นฟังก์ชันอุปรีฐานจาก X ไป Y จะได้ว่า $f(e_x) = e_y$ โดยที่ e_x และ e_y เป็นหน่วยของ X และ Y ตามลำดับ

พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d และให้ f เป็นฟังก์ชันอุปรีฐานจาก X ไป Y

ให้ e_x และ e_y เป็นหน่วยของ X และ Y ตามลำดับ

จะแสดงว่า $f(e_x)$ เป็นหน่วยของ Y นั่นคือ จะแสดงว่า $y * f(e_x) = 0$ สำหรับทุก $y \in Y$

ให้ $y \in Y$

จาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่า มี $x \in X$ ที่ทำให้ $f(x) = y$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา} \quad y * f(e_x) &= f(x) * f(e_x) \\
 &= f(x * e_x) && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐาน)} \\
 &= f(0) && \text{(จาก } e_x \text{ เป็นหน่วยของ } X) \\
 &= 0 && \text{(จากบทตั้ง 3.8.3 (1))}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y * f(e_x) = 0$ สำหรับทุก $y \in Y$

นั่นคือ $f(e_x)$ เป็นหน่วยของ Y

จากบทตั้ง 3.3.5 ได้ว่า หน่วยใน Y มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ได้ว่า $f(e_x) = e_y$ ■

บทแทรก 3.8.5: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e_x และ e_y เป็นหน่วยของ X และ Y ตามลำดับ และให้ f เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานจาก X ไป Y จะได้ว่า $f^{-1}(e_y) = e_x$

พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e_x และ e_y เป็นหน่วยของ X และ Y ตามลำดับ และให้ f เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานจาก X ไป Y

จาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

โดยทฤษฎีบท 2.2.6 ได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก Y ไป X

จากบทตั้ง 3.8.4 ได้ว่า $f(e_x) = e_y$

ดังนั้น $f^{-1}(e_y) = e_x$ ■

บทตั้ง 3.8.6: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e_x และ e_y เป็นหน่วยของ X และ Y ตามลำดับ และให้ f เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานจาก X ไป Y จะได้ว่า

$$(1) f(x^*) = (f(x))^* \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

$$(2) f^{-1}(y^*) = (f^{-1}(y))^* \text{ สำหรับทุก } y \in Y$$

พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e_x และ e_y เป็นหน่วยของ X และ Y ตามลำดับ และให้ f เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานจาก Y ไป X

จากบทตั้ง 3.8.2 จะได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานจาก Y ไป X

$$(1) \text{ จะแสดงว่า } f(x^*) = (f(x))^* \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

ให้ $x \in X$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f(e_x * x) \\ &= f(e_x) * f(x) && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสชาติสัณฐาน)} \\ &= e_y * f(x) && \text{(จากบทตั้ง 3.8.4)} \\ &= (f(x))^* \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x^*) = (f(x))^*$ สำหรับทุก $x \in X$

$$(2) \text{ จะแสดงว่า } f^{-1}(y^*) = (f^{-1}(y))^* \text{ สำหรับทุก } y \in Y$$

ให้ $y \in Y$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} f^{-1}(y^*) &= f^{-1}(e_y * y) \\ &= f^{-1}(e_y) * f^{-1}(y) && \text{(จาก } f^{-1} \text{ เป็นฟังก์ชันสชาติสัณฐาน)} \\ &= e_x * f^{-1}(y) && \text{(จากบทแทรก 3.8.5)} \\ &= (f^{-1}(y))^* \end{aligned}$$

ดังนั้น $f^{-1}(y^*) = (f^{-1}(y))^*$ สำหรับทุก $y \in Y$ ■

ทฤษฎีบท 3.8.7: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และให้ f เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานจาก X ไป Y จะได้ว่า

- (1) อิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d
- (2) อิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy

พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และให้ f เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานจาก X ไป Y

- (1) จะแสดงว่า อิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d

ให้ F เป็นตัวกรอง d ของ X ได้ว่า $e_x \in F$ จะแสดงว่า $f(F)$ เป็นตัวกรอง d ของ Y

จากบทตั้ง 3.8.4 ได้ว่า $e_y = f(e_x) \in f(F)$

ดังนั้น (dF1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า (dF2) เป็นจริง ให้ $x, y \in Y$

สมมติให้ $(x^* * y^*)^* \in f(F)$ และ $y \in f(F)$ จะแสดงว่า $x \in f(F)$

จาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 2.2.9 ได้ว่า

$$f^{-1}((x^* * y^*)^*) \in F \text{ และ } f^{-1}(y) \in F$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } f^{-1}((x^* * y^*)^*) &= (f^{-1}(x^* * y^*))^* && \text{(จากบทตั้ง 3.8.6 (2))} \\ &= (f^{-1}(x^*) * f^{-1}(y^*))^* && \text{(จาก } f^{-1} \text{ เป็นฟังก์ชันสัทิสสัณฐาน)} \\ &= ((f^{-1}(x))^* * (f^{-1}(y))^*)^* && \text{(จากบทตั้ง 3.8.6 (2))} \end{aligned}$$

ดังนั้น $((f^{-1}(x))^* * (f^{-1}(y))^*)^* \in F$ และ $f^{-1}(y) \in F$

จาก F เป็นตัวกรอง d ของ X ได้ว่า $f^{-1}(x) \in F$ นั่นคือ $x \in f(F)$

ดังนั้น (dF2) เป็นจริง นั่นคือ $f(F)$ เป็นตัวกรอง d ของ Y

สรุปได้ว่า อิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d

- (2) จะแสดงว่า อิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy

ให้ F เป็นตัวกรอง crazy ของ X ได้ว่า $e_x \in F$ จะแสดงว่า $f(F)$ เป็นตัวกรอง crazy ของ Y

จากบทตั้ง 3.8.4 ได้ว่า $e_y = f(e_x) \in f(F)$

ดังนั้น (zF1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า (zF2) เป็นจริง ให้ $x, y \in Y$

สมมติให้ $(y * x)^* \in f(F)$ และ $y \in f(F)$ จะแสดงว่า $x \in f(F)$

จาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 2.2.9 ได้ว่า

$$f^{-1}((y * x)^*) \in F \text{ และ } f^{-1}(y) \in F$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } f^{-1}((y * x)^*) &= (f^{-1}(y * x))^* && \text{(จากบทตั้ง 3.8.6 (2))} \\ &= (f^{-1}(y) * f^{-1}(x))^* && \text{(จาก } f^{-1} \text{ เป็นฟังก์ชันสัทิสสัณฐาน)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(f^{-1}(y) * f^{-1}(x))^* \in F$ และ $f^{-1}(y) \in F$

จาก F เป็นตัวกรอง crazy ของ X ได้ว่า $f^{-1}(x) \in F$ นั่นคือ $x \in f(F)$

ดังนั้น (zF2) เป็นจริง นั่นคือ $f(F)$ เป็นตัวกรอง crazy ของ Y

สรุปได้ว่า อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy ■

ทฤษฎีบท 3.8.8: ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และให้ f เป็นฟังก์ชันอุปรีฐานฐานจาก X ไป Y จะได้ว่า

- (1) อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d
- (2) อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy

พิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และให้ f เป็นฟังก์ชันอุปรีฐานฐานจาก X ไป Y

- (1) จะแสดงว่า อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d

ให้ F เป็นตัวกรอง d ของ Y ได้ว่า $e_y \in F$ จะแสดงว่า $f^{-1}(F)$ เป็นตัวกรอง d ของ X

จากบทตั้ง 3.8.4 ได้ว่า $f(e_x) = e_y \in F$ นั่นคือ $e_x \in f^{-1}(F)$

ดังนั้น (dF1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า (dF2) เป็นจริง ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $(x^* * y^*)^* \in f^{-1}(F)$ และ $y \in f^{-1}(F)$ จะแสดงว่า $x \in f^{-1}(F)$

ได้ว่า $f((x^* * y^*)^*) \in F$ และ $f(y) \in F$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad f((x^* * y^*)^*) &= (f(x^* * y^*))^* && \text{(จากบทตั้ง 3.8.6 (1))} \\ &= (f(x^*) * f(y^*))^* && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันอุปรีฐานฐาน)} \\ &= ((f(x))^* * (f(y))^*)^* && \text{(จากบทตั้ง 3.8.6 (1))} \end{aligned}$$

ดังนั้น $((f(x))^* * (f(y))^*)^* \in F$ และ $f(y) \in F$

จาก F เป็นตัวกรอง d ของ Y ได้ว่า $f(x) \in F$ นั่นคือ $x \in f^{-1}(F)$

ดังนั้น (dF2) เป็นจริง นั่นคือ $f^{-1}(F)$ เป็นตัวกรอง d ของ X

สรุปได้ว่า อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d

- (2) จะแสดงว่า อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy

ให้ F เป็นตัวกรอง crazy ของ Y ได้ว่า $e_y \in F$ จะแสดงว่า $f^{-1}(F)$ เป็นตัวกรอง crazy ของ X

จากบทตั้ง 3.8.4 ได้ว่า $f(e_x) = e_y \in F$ นั่นคือ $e_x \in f^{-1}(F)$

ดังนั้น (zF1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า (zF2) เป็นจริง ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $(y * x)^* \in f^{-1}(F)$ และ $y \in f^{-1}(F)$ จะแสดงว่า $x \in f^{-1}(F)$

ได้ว่า $f((y * x)^*) \in F$ และ $f(y) \in F$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad f((y * x)^*) &= (f(y * x))^* && \text{(จากบทตั้ง 3.8.6 (1))} \\ &= (f(y) * f(x))^* && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสาคาส์สัณฐาน)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(f(y) * f(x))^* \in F$ และ $f(y) \in F$

จาก F เป็นตัวกรอง crazy ของ Y ได้ว่า $f(x) \in F$ นั่นคือ $x \in f^{-1}(F)$

ดังนั้น (ZF2) เป็นจริง นั่นคือ $f^{-1}(F)$ เป็นตัวกรอง crazy ของ X

สรุปได้ว่า อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy

■

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

(Conclusions)

ในการค้นคว้าอิสระ เราศึกษาเกี่ยวกับตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d ซึ่งพีชคณิต d มีนิยามดังนี้
ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $0 \in X$ โดยที่ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X
จะเรียก $(X, *, 0)$ (หรือ X) ว่าเป็น **พีชคณิต d** (d -algebra) ถ้ามีสมบัติดังต่อไปนี้

$$(d1) \quad x * x = 0$$

$$(d2) \quad 0 * x = 0$$

$$(d3) \quad \text{ถ้า } x * y = 0 \text{ และ } y * x = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

เราได้ศึกษาสมบัติบางประการของพีชคณิต d และพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยได้ศึกษาสมบัติของ
พีชคณิตย่อย d ตัวกรองในพีชคณิต d หน่วยในพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และศึกษาเกี่ยวกับตัวกรองบางชนิดใน
พีชคณิต d ได้แก่ ตัวกรองของพีชคณิต d ตัวกรอง d ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ ตัวกรอง crazy ตัวกรอง crazy
แบบบริบูรณ์ และฟังก์ชันสาคูพื้นฐานในพีชคณิต d

เราได้เริ่มต้นศึกษาเกี่ยวกับพีชคณิตย่อย d และสมบัติของตัวกรองในพีชคณิต d ได้ผลการศึกษาดังนี้

ให้ X เป็นพีชคณิต d จะได้ว่า

1) ถ้า I เป็นพีชคณิตย่อย d ของ X แล้วจะได้ว่า

$$1.1) \quad 0 \in I$$

$$1.2) \quad I \text{ เป็นพีชคณิต } d$$

2) X เป็นพีชคณิตย่อย d และตัวกรองของ X

3) $\{0\}$ เป็นพีชคณิตย่อย d และตัวกรองของ X

นอกจากนี้ได้ศึกษาสมบัติของหน่วยและพีชคณิต d ที่มีขอบเขต และตัวกรองบางชนิดในพีชคณิต d ที่มี
ขอบเขต ได้แก่ ตัวกรอง d ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ ตัวกรอง crazy และตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ ซึ่งได้ผล
การศึกษาดังนี้

ให้ X เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e เป็นหน่วย จะได้ว่า

1) ถ้า X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว จะได้ว่า $e \neq 0$

2) หน่วยจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

3) ถ้า F เป็นตัวกรองของ X และ $e \in F$ แล้ว $F = X$

4) X เป็นตัวกรอง d ตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ ตัวกรอง crazy และตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X

- 5) ถ้า F_1 และ F_2 เป็นตัวกรอง d ของ X แล้ว $F_1 \cap F_2$ เป็นตัวกรอง d ของ X
- 6) ถ้า F เป็นตัวกรอง d ของ X แล้ว F เป็นตัวกรอง d แบบบริบูรณ์ของ X
- 7) ถ้า F เป็นตัวกรอง crazy ของ X แล้ว F เป็นตัวกรอง crazy แบบบริบูรณ์ของ X
- 8) ถ้า $0 \in F \subsetneq X$ และ $0^* = e$ แล้ว F ไม่เป็นตัวกรอง crazy ของ X

สุดท้ายเราได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันสาคูพื้นฐานในพีชคณิต d และได้ผลการศึกษาดังต่อไปนี้

ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d และ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y

- 1) ถ้า f เป็นฟังก์ชันสมมูลฐาน แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันสมมูลฐาน
- 2) ถ้า f เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐาน แล้วจะได้ว่า

$$2.1) f(0) = 0$$

$$2.2) \text{ ถ้า } x \leq y \text{ แล้ว } f(x) \leq f(y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

ให้ X และ Y เป็นพีชคณิต d ที่มีขอบเขต โดยมี e_x และ e_y เป็นหน่วยของ X และ Y ตามลำดับ และให้ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y จะได้ว่า

- 1) ถ้า f เป็นฟังก์ชันอุปรีฐาน แล้วจะได้ว่า

$$1.1) f(e_x) = e_y$$

$$1.2) \text{ อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d}$$

$$1.3) \text{ อินเวอร์สอิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy}$$

- 2) ถ้า f เป็นฟังก์ชันสมมูลฐาน แล้วจะได้ว่า

$$2.1) f(x^*) = (f(x))^* \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

$$2.2) f^{-1}(y^*) = (f^{-1}(y))^* \text{ สำหรับทุก } y \in Y$$

$$2.3) \text{ อิมเมจของตัวกรอง d เป็นตัวกรอง d}$$

$$2.4) \text{ อิมเมจของตัวกรอง crazy เป็นตัวกรอง crazy}$$

บรรณานุกรม

- [1] H. K. Abdullah and K. T. Radhy, Some new types of filters in BCK-algebra, *International J. of Pure & Engg. Mathematics (IJPEM)*, Vol. 4, No.2 (2016), 135-144.
- [2] H. K. Abdullah and H. S. Salman, New types of filters in Q-algebra, *International J. of Engineering and Information Systems (IJEAIS)*, Vol. 3, No. 11 (2019), 15-22.
- [3] A. C. Muhammad and A. Faisal, Multipliers in d-algebras, *World Applied Science J.*, **18** (11) (2012), 1649-1653.
- [4] J. Neggers and H. S. Kim, On d-algebras, *Math. Slovaca*. **49** (1999), No.1, 19-26.
- [5] S. Pelyan, Homomorphism theorems on dual ideal in BCK-algebras, *Soochow J. of Math.*, **26** (3) (2000), 309-316.
- [6] ปรรณนา ใจผ่อง. แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์. หน่วยพิมพ์เอกสาร คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.