

จำนวนจีโอดติกของกราฟ $S(K_m^m)$ และ $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$
(The Geodetic Numbers of the Graphs $S(K_m^m)$ and $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$)

นางสาวชุติกัญจน์ สิงห์ไผ่แก้ว
รหัส 590510537

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

จำนวนจีโอดติกของกราฟ $S(K_m^m)$ และ $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$
(The Geodetic Numbers of the Graphs $S(K_m^m)$ and $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$)

ชุตिकाญจน์ สิงห์ไผ่แก้ว

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:



..... ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลีรัตนาวลี)



..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์)

วันที่ 3 เดือน เมษายน พ.ศ. 2565

จำนวนจีโอดติกของกราฟ $S(K_m^m)$ และ $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$
(The Geodetic Numbers of the Graphs $S(K_m^m)$ and $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$)

นางสาวชุติกานุจน์ สิงห์ไฟแก้ว
รหัส 590510537

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษากระบวนวิชา 206499 (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาสาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้ศึกษาค้นคว้าอิสระในหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่องจำนวนจีโอเดติกของกราฟเชิงเดียว $S(K_m^m)$ ซึ่งเป็นกราฟที่เกิดจากการซับดีไวต์เส้นเชื่อมทั้งหมดของมัลติกราฟ K_m^m รวมทั้งศึกษาจำนวนจีโอเดติกของกราฟผลคูณคาร์ทีเซียน $P_2 \times S(K_m^m)$

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลีธิตานวลี ประธานกรรมการสอบในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ต่าง ๆ เกี่ยวกับการทำงานค้นคว้าอิสระ ติดตามความก้าวหน้าในการดำเนินการ รวมถึงการนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องของการค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำ รวมถึงตรวจสอบความถูกต้อง ในการค้นคว้าอิสระนี้ให้มีความสำเร็จให้ดียิ่งขึ้น

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจในการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้ความกรุณาอบรมสั่งสอนและมอบความรู้ทั้งใน และนอกตำราให้แก่ข้าพเจ้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้

และสุดท้ายนี้หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชม หรือเกิดประโยชน์ประการใด ข้าพเจ้าขอมอบคำชื่นชมและความคุณดินนั้นให้แก่ บิดา มารดา อาจารย์ที่ปรึกษา คณาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนข้าพเจ้า หากมีข้อผิดพลาดประการใดที่อาจเกิดขึ้น ข้าพเจ้าขอน้อมรับแต่เพียงผู้เดียวและยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา และต้องขอภัยไว้ ณ ที่นี้

ชุติกากัญจน์ สิงห์ไผ่แก้ว

หัวข้อ (ภาษาไทย)	จำนวนจีโอดติกของกราฟ $S(K_m^m)$ และ $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$
(ภาษาอังกฤษ)	The Geodetic Numbers of the Graphs $S(K_m^m)$ and $P_2 \times S(K_m^m), m \geq 2$
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นางสาวชุตติกาญจน์ สิงห์ไผ่แก้ว รหัสนักศึกษา 590510537
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลีธวัจนาวลี
ชื่อกรรมการสอบ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์

บทคัดย่อ

ให้ G เป็นกราฟ สำหรับจุดยอด u, v ใดๆของกราฟ G เซต $I[u, v]$ ประกอบด้วยจุดยอดทั้งหมดที่อยู่บนจีโอดติก $u - v$ สำหรับเซต S ที่เป็นเซตย่อยของ $V(G)$ เราจะนิยามเซตช่วง $I[S]$ ว่าเป็นเซตที่สร้างจากยูเนียนของ $I[u, v]$ สำหรับทุก $u, v \in S$ หาก $I[S] = V(G)$ แล้วจะเรียก S ว่าเซตจีโอดติกของ G จำนวนจีโอดติก $g(G)$ ของกราฟ G คือจำนวนสมาชิกของเซตจีโอดติกของกราฟ G ที่มีขนาดเล็กที่สุด ในงานวิจัยนี้เราทำการศึกษานับจำนวนจีโอดติกของกราฟ $S(K_m^m)$ ซึ่งเป็นกราฟที่ไม่มีเซตจีโอดติกเชิงเส้นและเซตจีโอดติกบริบูรณ์ นอกจากนั้นเราจะศึกษานับจำนวนจีโอดติกของกราฟผลคูณคาร์ทีเซียน $P_2 \times S(K_m^m)$

คำสำคัญ : ผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ, จำนวนจีโอดติก, ทฤษฎีกราฟ

Abstract

Let G be a graph. For any two vertices u and v of G , the set $I[u, v]$ consists of all vertices lying on some $u-v$ geodesic in G . If S is a subset of vertices of G , then $I[S]$ is the union of all sets $I[u, v]$ for all u, v in S . The geodetic number $g(G)$ of graph G is the minimum cardinality among all the subsets S of $V(G)$ for which $I[S] = V(G)$. In this paper, we study the geodetic number of the graph $S(K_m^m)$ which admits neither a linear geodetic set nor a complete geodetic set. We also study the geodetic number of the Cartesian product graph $P_2 \times S(K_m^m)$.

Keywords : Cartesian product of graphs, geodetic numbers, graph theory

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
3 ผลการศึกษา (Results)	15
3.1 จำนวนจีโอเดติกของกราฟ $S(K_m^m)$	15
3.2 จำนวนจีโอเดติกของกราฟ $P_2 \times S(K_m^m)$	22
4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	24
บรรณานุกรม	25

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

ในปีค.ศ. 1993 Frank Harary, Emmanuel Loukakis และ Constantine Tsouros ได้ให้นิยามของเซตจีโอเดติกเป็นครั้งแรกในบทความเรื่อง The geodetic number of a graph [5] ไว้ดังนี้ เซตจีโอเดติกคือเซต S ที่มีสมาชิกเป็นจุดยอดของกราฟหนึ่ง โดยที่วิถีที่สั้นที่สุดระหว่างจุดยอดใดๆในเซตจะต้องผ่านจุดยอดทุกๆจุดของกราฟนั้น นอกจากนี้ยังได้ให้นิยามของจำนวนจีโอเดติกของกราฟไว้ดังนี้ จำนวนจีโอเดติกของกราฟคือจำนวนสมาชิกของเซตจีโอเดติกที่มีขนาดเล็กที่สุด ต่อมาในปีค.ศ. 1997 Gary Chartrand, Frank Harary และ Ping Zhang [4] ได้ทำการศึกษาขอบเขตของจำนวนจีโอเดติกของกราฟที่เกิดจากผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟใดๆกับกราฟ K_2 หลังจากนั้นในปีค.ศ. 2004 การหาขอบเขตของจำนวนจีโอเดติกของกราฟที่เกิดจากผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟสองกราฟใดๆได้ถูกศึกษาโดย Tao Jiang, Ignacio Pelayo และ Dan Pritikin [6] ทำให้ได้ขอบเขตล่างของจำนวนจีโอเดติก ต่อมาในปีค.ศ. 2007 Boštjan Brešar, Sandi Klavžar และ Aleksandra Tepeh Horvat [2] ได้นำเสนอขอบเขตของจำนวนจีโอเดติกที่มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากขึ้นสำหรับกราฟที่มีเซตจีโอเดติกเชิงเส้นและเซตจีโอเดติกแบบบริบูรณ์ และได้ยกตัวอย่างกราฟซึ่งไม่มีทั้งเซตจีโอเดติกเชิงเส้นและเซตจีโอเดติกแบบบริบูรณ์ในบทความเรื่อง On the geodetic number and related metric sets in Cartesian product graphs โดยกราฟที่ได้นำเสนอมีลักษณะคล้ายกับกราฟที่ Gary Chartrand และคณะได้ศึกษาในบทความเรื่อง Geodetic sets in graphs [3] ในปีค.ศ. 2000 และได้ใช้สัญลักษณ์ $S(K_m^m)$ แทนกราฟที่มีลักษณะดังกล่าว ผู้ศึกษาจึงมีความสนใจในการหาจำนวนจีโอเดติกของกราฟในตระกูล $S(K_m^m)$ ที่ Klavžar และคณะได้นำเสนอโดยการขยายแนวคิดของ Gary Chartrand และคณะ และหาขอบเขตบนของจำนวนจีโอเดติกของกราฟ $P_2 \times S(K_m^m)$

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ในบทนี้เราจะให้บทนิยามพื้นฐานในทฤษฎีกราฟที่จำเป็นต่อการศึกษาในเรื่อง การหาจำนวนจีโอเดติกของกราฟ $S(K_m^m)$ และกราฟ $S(K_m^m) \times P_2$ พร้อมทั้งให้ตัวอย่างเพื่อความเข้าใจได้ชัดเจนยิ่งขึ้น ดังนี้

บทนิยาม 2.1 กราฟ (graph)

กราฟ G ประกอบไปด้วยเซตจำกัดสองเซตเขียนแทนด้วย $V(G)$ และ $E(G)$ โดย $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกสมาชิกของ $V(G)$ ว่า **จุดยอด (vertices)** และ $E(G)$ เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิกเป็น **คู่อันดับ (unordered pair)** ของสมาชิกของ $V(G)$ เรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่า **เส้นเชื่อม (edges)**

โดยทั่วไปแล้วจะแทนกราฟด้วยแผนภาพซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้นโดยที่จุดแต่ละจุดของแผนภาพแทนสมาชิกแต่ละสมาชิกของ $V(G)$ และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดของแผนภาพแทนสมาชิกของ $E(G)$

นั่นคือ ถ้า $v_1, v_2 \in V(G)$ และ $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ แล้วเราจะลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด v_1 และจุดยอด v_2 ในแผนภาพ

เพื่อความสะดวกเราจะแทนเส้นเชื่อม $\{v_1, v_2\}$ ด้วยสัญลักษณ์ v_1v_2 และจะถือว่าเส้นเชื่อม v_1v_2 และเส้นเชื่อม v_2v_1 เป็นเส้นเดียวกัน

สำหรับจุดยอด $v_1, v_2 \in V(G)$ ถ้า $v_1v_2 \in E(G)$ แล้วจะกล่าวว่า v_1 และ v_2 เป็น **จุดยอดประชิดกัน (adjacent vertices)** ในทำนองเดียวกันจะกล่าวว่าเส้นเชื่อมสองเส้นประชิดกันถ้าเส้นเชื่อมทั้งสองมีจุดยอดร่วมกันจุดหนึ่ง และกล่าวว่าจุดยอด v_1 และ v_2 **ตกกระทบ (incident)** กับเส้นเชื่อม v_1v_2 หรือกล่าวว่าเส้นเชื่อม v_1v_2 ตกกระทบกับจุดยอด v_1 และจุดยอด v_2

สำหรับจุดยอด v ใดๆของกราฟ G เราจะเรียกจำนวนเส้นเชื่อมที่ตกกระทบกับจุดยอดว่า **ระดับชั้น (degree)** ของจุดยอด v เขียนแทนด้วย $\deg(v)$ และเรียกจุดยอดที่มีระดับชั้นเท่ากับ 1 ว่า **จุดปลาย (end vertex)**

เราจะเรียกจำนวนจุดยอดทั้งหมดของกราฟ G ว่า**อันดับ (order)** ของกราฟ G และเรียกจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดในกราฟ G ว่า**ขนาด (size)** ของกราฟ G

ตัวอย่าง 2.2 ให้ G เป็นกราฟที่ประกอบด้วย

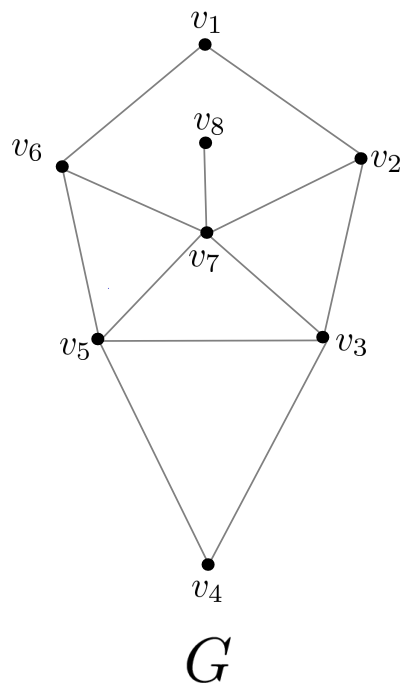
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_7,$$

$$v_3v_4, v_3v_5, v_3v_7, v_4v_5,$$

$$v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7, v_7v_8\}$$

จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ G ได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1: แผนภาพตัวแทนเชิงกราฟ G

บทนิยาม 2.3 แนวเดิน (walk)

แนวเดินเกิดจากการเคลื่อนที่จากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งที่อยู่ประชิดกันในกราฟซึ่ง เมื่อทำการเคลื่อนที่แบบนี้ซ้ำไปเรื่อยๆ จะทำให้เกิดลำดับ (sequence) ของจุดยอดขึ้นซึ่งอาจเขียนได้เป็น $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \dots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n$ หรือเขียนแบบสั้นได้เป็น $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ ซึ่งเรียกว่าแนวเดิน $v_0 - v_n$ โดยแนวเดินอาจมีจุดยอดซ้ำกันหรือเส้นเชื่อมซ้ำกันได้

เราจะเรียกแนวเดินที่ไม่มีเส้นเชื่อมซ้ำกันว่ารอยเดิน (trail)

เรียกแนวเดินที่ไม่มีจุดยอดซ้ำกันว่าวิถี (path) และเรียกแนวเดินปิดที่ไม่มีจุดยอดซ้ำกันว่าวัฏจักร (cycle)

สำหรับแนวเดิน รอยเดิน หรือวิถี $v_0 - v_n$ ใดๆ ถ้า v_0 และ v_n เป็นจุดยอดเดียวกันเราจะเรียกว่าแนวเดินปิด รอยเดินปิด หรือวิถีปิดตามลำดับ และถ้า v_0 และ v_n ไม่เป็นจุดยอดเดียวกันเราจะเรียกว่าแนวเดินเปิด รอยเดินเปิด หรือวิถีเปิดตามลำดับ ความยาว (length) ของแนวเดิน รอยเดิน วิถี หรือวัฏจักรคือจำนวนเส้นเชื่อมที่ปรากฏในแนวเดิน รอยเดิน วิถีหรือวัฏจักรนั้นๆ

ระยะทาง (distance) ให้ $v_1, v_2 \in V(G)$ ระยะทางระหว่างจุดยอด v_1 และจุดยอด v_2 คือความยาวของวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดยอด v_1 และจุดยอด v_2 บนกราฟ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $d(v_1, v_2)$

ตัวอย่าง 2.4 ให้ G เป็นกราฟที่มีตัวแทนเชิงกราฟดังรูปที่ 2.2

ตัวอย่างของวิถี $v_1 - v_9$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 2 เช่น

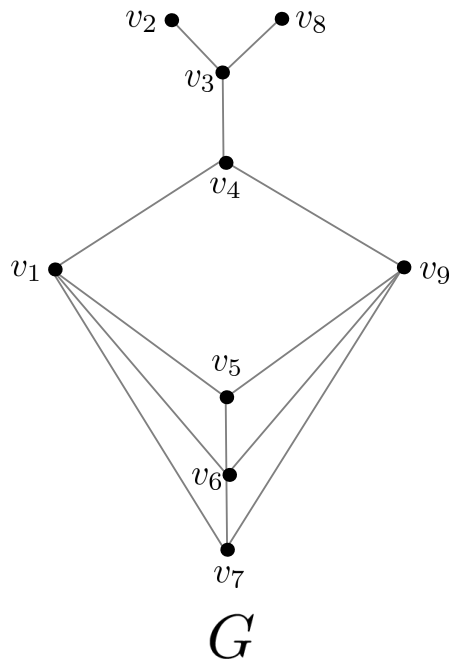
$$v_1, v_4, v_9$$

ตัวอย่างของรอยเดินปิด $v_7 - v_7$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 4 เช่น

$$v_7, v_6, v_5, v_1, v_7$$

ตัวอย่างของแนวเดิน $v_1 - v_9$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 4 เช่น

$$v_9, v_7, v_6, v_5, v_1$$



รูปที่ 2.2: ภาพตัวแทนเชิงกราฟของกราฟ G ซึ่งจะใช้เป็นตัวอย่างในการนำเสนอการเคลื่อนที่บนกราฟในลำดับต่อไป

บทนิยาม 2.5 จีโอดเซสิก $v_1 - v_2$ ($v_1 - v_2$ geodesic)

ให้ $v_1, v_2 \in V(G)$ จีโอดเซสิก $v_1 - v_2$ หมายถึงวิถี $v_1 - v_2$ ที่มีความยาวเท่ากับระยะทางระหว่างจุดยอด v_1 และจุดยอด v_2

ตัวอย่าง 2.6 ให้ G เป็นกราฟที่มีตัวแทนเชิงกราฟดังรูปที่ 2.2

จากการที่ $d(v_1, v_9) = 2$ ดังนั้นจีโอดเซสิก $v_1 - v_9$ มีจำนวน 4 วิถีได้แก่

$$v_1, v_4, v_9$$

$$v_1, v_5, v_9$$

$$v_1, v_6, v_9$$

$$v_1, v_7, v_9$$

และในทำนองเดียวกันจากการที่ $d(v_1, v_8) = 3$ ดังนั้นจีโอดเซสิก $v_1 - v_8$ มีเพียงวิถีเดียวได้แก่

$$v_1, v_4, v_3, v_8$$

บทนิยาม 2.7 เยื้องศูนย์กลาง (eccentricity)

ให้ $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(G)$ ใช้สัญลักษณ์ $e(v_i)$ แทนค่าเยื้องศูนย์กลางของจุดยอด v_i นิยามโดย

$$e(v_i) = \max\{d(v_i, v_1), d(v_i, v_2), \dots, d(v_i, v_n)\}$$
 เมื่อพิจารณาค่าเยื้องศูนย์กลางของจุดยอดทุกๆจุดในกราฟ G

แล้วค่าเยื้องศูนย์กลางที่มีค่าต่ำที่สุดจะถูกเรียกว่ารัศมี (radius) ของกราฟ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $rad(G)$ และค่าเยื้องศูนย์กลางที่มีค่าสูงที่สุดจะถูกเรียกว่าเส้นผ่านกลาง (diameter) ของกราฟ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $diam(G)$

ตัวอย่าง 2.8 ให้ G เป็นกราฟดังตัวอย่างที่ 2.2

เมื่อพิจารณาระยะทางระหว่างจุดยอดทุกๆคู่ใน $V(G)$ จะได้ว่า

$$e(v_1) = 3 \quad e(v_2) = 4 \quad e(v_3) = 3 \quad e(v_4) = 2$$

$$e(v_5) = 4 \quad e(v_6) = 4 \quad e(v_7) = 4 \quad e(v_8) = 4$$

$$e(v_9) = 3$$

ทำให้ $rad(G) = 2$ และ $diam(G) = 4$

บทนิยาม 2.9 ช่วง $[v_1, v_2]$ ($[v_1, v_2]$ interval)

ให้ $v_1, v_2 \in V(G)$ ช่วง $[v_1, v_2]$ คือเซตของจุดยอดทุกจุดที่อยู่บนจีโอเดซิก $v_1 - v_2$ โดยรวมจุดยอด v_1 และจุดยอด v_2 เข้าไปด้วยและเขียนแทนช่วง $[v_1, v_2]$ ด้วยสัญลักษณ์ $I[v_1, v_2]$

ตัวอย่าง 2.10 ให้ G เป็นกราฟดังตัวอย่างที่ 2.2

พิจารณาช่วง $I[v_1, v_9]$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} I[v_1, v_9] &= \{v_1, v_4, v_9\} \cup \{v_1, v_5, v_9\} \cup \{v_1, v_6, v_9\} \cup \{v_1, v_7, v_9\} \\ &= \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9\} \end{aligned}$$

พิจารณาช่วง $I[v_1, v_8]$ ได้ว่า

$$I[v_1, v_8] = \{v_1, v_3, v_4, v_8\}$$

บทนิยาม 2.11 เซตช่วง $I(S)$ ($I(S)$ interval set)

สำหรับแต่ละเซต $S \subseteq V(G)$ นิยามเซตช่วง $I[S] = \bigcup_{u,v \in S} I[u, v]$

ตัวอย่าง 2.12 ให้ G เป็นกราฟดังตัวอย่างที่ 2.2

ให้ $S = \{v_1, v_8, v_9\}$ เซตช่วงของ S คือ

$$\begin{aligned} I[S] &= I(v_1, v_8) \cup I(v_1, v_9) \cup I(v_8, v_9) \\ &= \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \end{aligned}$$

บทนิยาม 2.13 เซตจีโอเดติก (geodetic sets)

จะเรียกเซต $S \subseteq V(G)$ ว่าเซตจีโอเดติกถ้าหาก $I[S] = V(G)$

บทนิยาม 2.14 เซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุด (minimum geodetic set)

เมื่อพิจารณาเซตจีโอเดติกทั้งหมดที่เป็นไปได้ของกราฟ G แล้วเราจะเรียกเซตจีโอเดติกที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดว่าเซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุด

บทนิยาม 2.15 จำนวนจีโอเดติก (geodetic number)

จำนวนจีโอเดติกของกราฟ G คือจำนวนสมาชิกของเซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุดของกราฟ G และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g(G)$

ตัวอย่าง 2.16 ให้ G เป็นกราฟดังตัวอย่างที่ 2.2

ให้ $S_1, S_2 \subset V(G)$

$$S_1 = \{v_2, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

$$S_2 = \{v_1, v_2, v_8, v_9\}$$

จากการที่ $I[S_1] = V(G)$ และ $I[S_2] = V(G)$ ทำให้ S_1 และ S_2 เป็นเซตจีโอเดติกของกราฟ G แต่ $|S_1| > |S_2|$

และเมื่อเราพิจารณาเซตจีโอเดติกทั้งหมดของกราฟ G แล้วเห็นว่าไม่มีเซตจีโอเดติกใดของ G มีจำนวนสมาชิกน้อยกว่า S_2 ทำให้ S_2 เป็นเซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุดของกราฟ G ส่งผลให้ $g(G) = |S_2| = 4$

บทนิยาม 2.17 กราฟบริบูรณ์ (complete graphs)

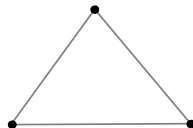
ให้ G เป็นกราฟ เราจะเรียก G ว่ากราฟบริบูรณ์ถ้าทุกๆสองจุดยอดที่แตกต่างกันของกราฟมีเส้นเชื่อม

และใช้สัญลักษณ์ K_n แทนกราฟบริบูรณ์ที่มีอันดับ n

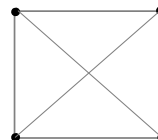
K_1 : •

K_2 : • — •

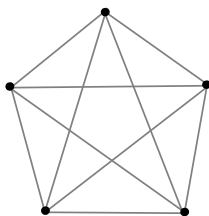
K_3 :



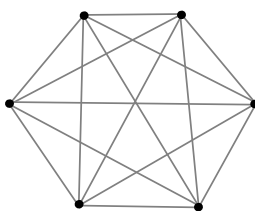
K_4 :



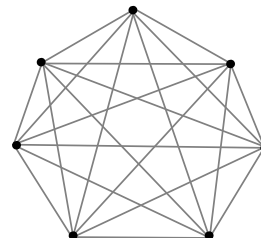
K_5 :



K_6 :



K_7 :



รูปที่ 2.3: กราฟบริบูรณ์ที่มีอันดับตั้งแต่ 1 ถึง 7

บทนิยาม 2.18 กราฟวิถี (path graph) ให้ G เป็นกราฟและ $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตจุดยอดของกราฟ G เราจะเรียกกราฟ G ว่ากราฟวิถีหาก G ไม่มีวัฏจักรและ $d(v_1) = d(v_n) = 1$ โดยที่ $d(v_x) = 2$ สำหรับทุก $2 \leq x \leq n-1$ ใช้สัญลักษณ์ P_n แทนกราฟวิถีที่มีจุดยอด n จุด

P_1 •
 v_1

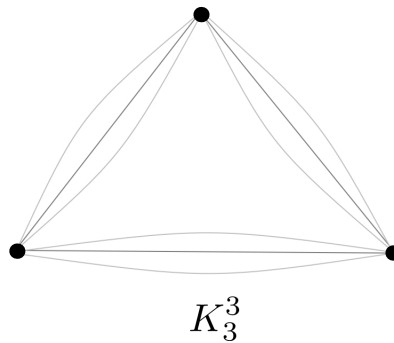
P_2 •————•
 v_1 v_2

P_3 •————•————•
 v_1 v_2 v_3

P_n •————• •————•
 v_1 v_2 v_{n-1} v_n

รูปที่ 2.4: กราฟวิถีที่มีอันดับตั้งแต่ 1 ถึง n

บทนิยาม 2.19 มัลติกราฟ (multigraph) ให้ G เป็นกราฟ เราจะเรียกกราฟ G ว่ามัลติกราฟหาก G มีเส้นเชื่อมที่
 ตกกระทบบนจุดยอดคู่เดียวกันมากกว่าหนึ่งเส้น ใช้สัญลักษณ์ K_m^m แทนมัลติกราฟที่มีจุดยอด m จุดและมีเส้นเชื่อม m เส้น
 ตกกระทบบนจุดยอดทุกคู่ของมัลติกราฟ

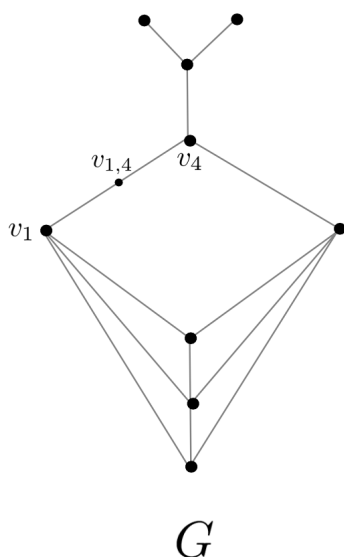


รูปที่ 2.5: มัลติกราฟ K_3^3 มีจุดยอด 3 จุดและมีเส้นเชื่อม 3 เส้นระหว่างจุดยอดทุกๆคู่

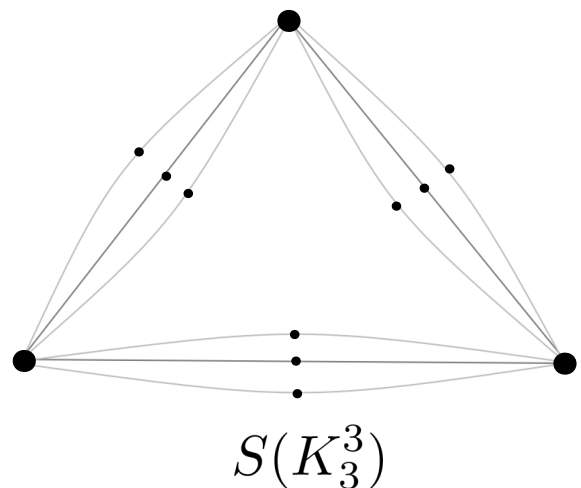
บทนิยาม 2.20 การซับดีไวต์เส้นเชื่อม (edge subdivision)

ให้ $v_1v_2 \in E(G)$ การซับดีไวต์เส้นเชื่อม v_1v_2 คือการลบเส้นเชื่อม v_1v_2 ออกจากกราฟ G และเพิ่มจุดยอด $v_{1,2}$ หนึ่ง
 จุดเข้าไปในกราฟ G และลากเส้นเชื่อมใหม่สองเส้น คือเส้นเชื่อม $v_1v_{1,2}$ และเส้นเชื่อม $v_2v_{1,2}$

ใช้สัญลักษณ์ $S(G)$ แทนการซับดีไวต์เส้นเชื่อมทุกๆเส้นของกราฟ G



รูปที่ 2.6: การซับดีไวต์เส้นเชื่อม v_1 และเส้นเชื่อม v_4
 ของกราฟ G



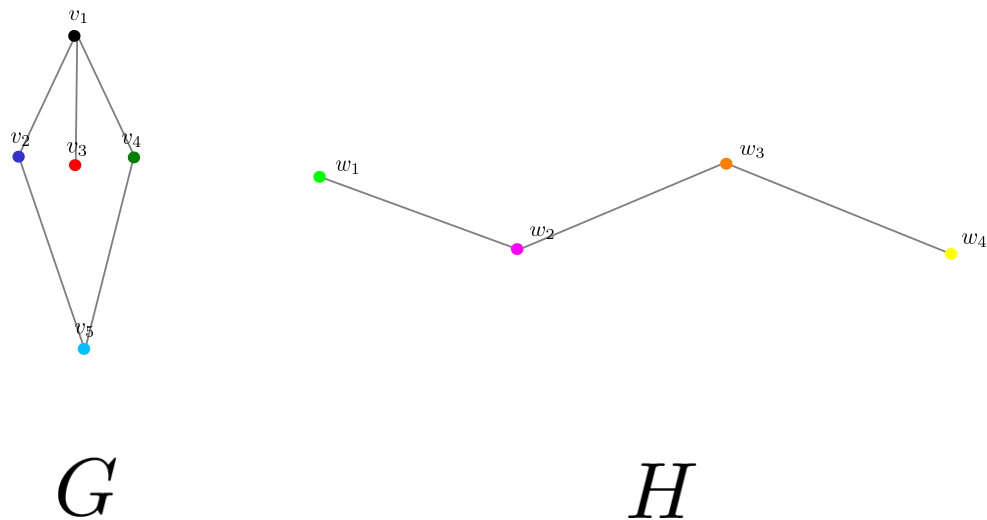
รูปที่ 2.7: กราฟ $S(K_3^3)$ ซึ่งเกิดจากการซับดีไวต์เส้นเชื่อม
 ทุกเส้นของกราฟ K_3^3

บทนิยาม 2.21 ผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ (Cartesian product of graphs)

ให้ G และ H เป็นกราฟ ให้ $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ และ $V(H) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

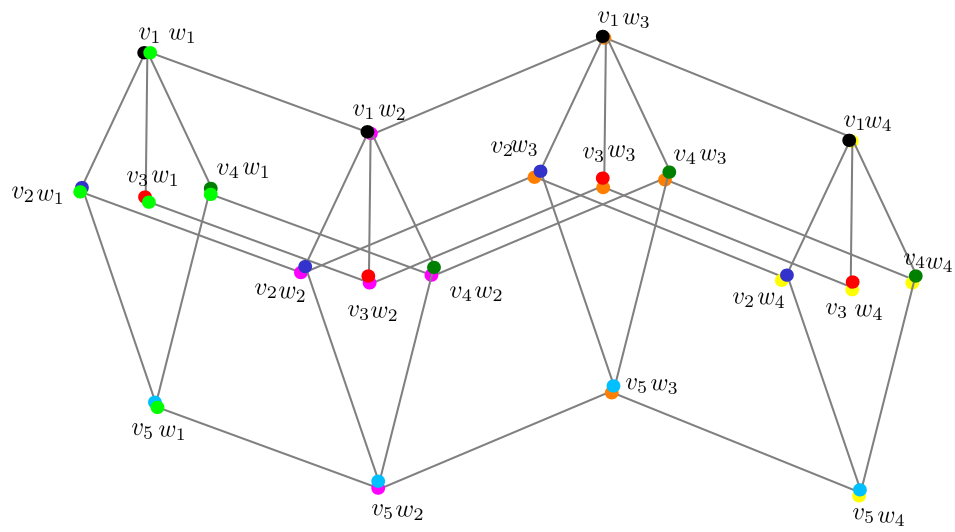
ผลคูณคาร์ทีเซียนของ G และ H เขียนแทนด้วย $G \times H$ โดยที่ $G \times H$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วย $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ และสำหรับ $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V(G \times H)$ จุดยอด (v_1, w_1) จะประชิดกับจุดยอด (v_2, w_2) ก็ต่อเมื่อ $v_1 = v_2$ และ $w_1 w_2 \in E(H)$ หรือเมื่อ $w_1 = w_2$ และ $v_1 v_2 \in E(G)$

ตัวอย่าง 2.22 ให้ G และ H เป็นกราฟดังรูป



รูปที่ 2.8: กราฟ G และกราฟ H

กราฟ $G \times H$ จะมีตัวแทนเชิงกราฟดังนี้



$$G \times H$$

รูปที่ 2.9: กราฟผลคูณคาร์ทีเซียน $G \times H$

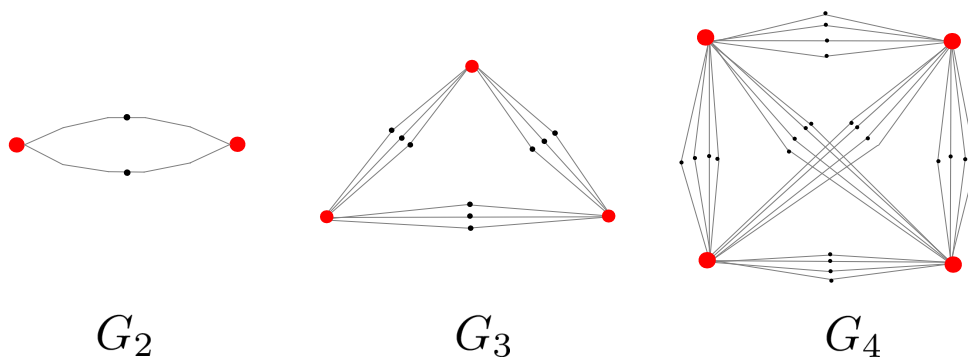
บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

3.1 จำนวนจีโอเดติกของกราฟ $S(K_m^m)$

ข้อคาดการณ์ 3.1.1 ให้ K_m^m โดยที่ $m \geq 2 \in \mathbb{N}$ เป็นมัลติกราฟที่มีจุดยอด m จุดและมีเส้นเชื่อม m เส้นตกระทบจุดยอดทุกคู่ของกราฟ ให้ $G_m = S(K_m^m)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการซบตีไวด์เส้นเชื่อมทุกๆเส้นของกราฟ G_m ได้ว่า $g(G_m) = m$

พิสูจน์. เมื่อพิจารณากราฟ G_2 และกราฟ G_3 เราสามารถเห็นได้ชัดว่า $V(K_2^2)$ และ $V(K_3^3)$ เป็นเซตจีโอเดติกของกราฟ G_2 และกราฟ G_3 ตามลำดับ ในกรณีที่ $m \geq 4$ เราจะใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์แสดงว่า $g(G_m) = m$ โดยเริ่มต้นที่กรณี $m \geq 4$ และแสดงว่า $V(K_m^m)$ เป็นเซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุดของกราฟ G_m



รูปที่ 3.1: เซตจีโอเดติกของกราฟ G_2 กราฟ G_3 และ G_4

จากภาพที่ 3.1 เราสามารถเห็นได้ชัดว่า $V(K_4^4)$ ซึ่งในที่นี้คือจุดยอดที่ได้ถูกระบายสีแดงเป็นเซตจีโอเดติกของกราฟ G_4 และต่อไปนี้จะทำให้สีแดงแสดงถึงจุดยอดเป็นสมาชิกของเซตจีโอเดติก จากการที่ $I[V(K_4^4)] = V(G_m)$ ดังนั้น $g(G_4) = 4$ ให้ $V(K_m^m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ แทนเซตจุดยอดของกราฟ K_m^m เราจะกำหนดสัญลักษณ์เพื่อใช้แทนจุดยอดที่เกิดขึ้นจากการซบตีไวด์เส้นเชื่อมของกราฟ K_m^m ดังนี้ สำหรับ i, j และ $1 \leq i \neq j \leq m$ และ $1 \leq p \leq m$ เราจะใช้สัญลักษณ์ $v_{i,j}^p$ แทนจุดยอดที่เกิดจากการซบตีไวด์เส้นเชื่อมที่ตกระทบกับจุดยอด v_i และจุดยอด v_j เส้นที่ p เราจะเริ่มพิสูจน์ข้อคาดการณ์โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์โดยเริ่มที่กรณี $m = 4$ และให้ $g(G_{m-1}) = m - 1$ เป็น

จริงและจะพิสูจน์ว่า $g(G_m) = m$ โดยการตั้งสมมติฐานแย้งว่า $g(G_m) = n < m$ โดยให้ W เป็นเซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุดของกราฟ G_m และ $|W| \leq n$ เราจะพิจารณาโครงสร้างของกราฟ W และแยกการพิสูจน์เป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1: $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\} \subset V(G_m)$ นั่นคือ W บรรจุจุดยอด n จุดซึ่งเป็นสมาชิกของ $V(K_m^m)$

กรณีที่ 2: $W = \{v_{i,j}^1, v_{i,j}^2, \dots, v_{i,j}^{n-1}, v_{i,j}^n\}$ นั่นคือ W บรรจุจุดยอด n จุดซึ่งเกิดจากการจับดีไวต์เส้นเชื่อมซึ่งประชิดกับจุดยอด v_i และจุดยอด v_j

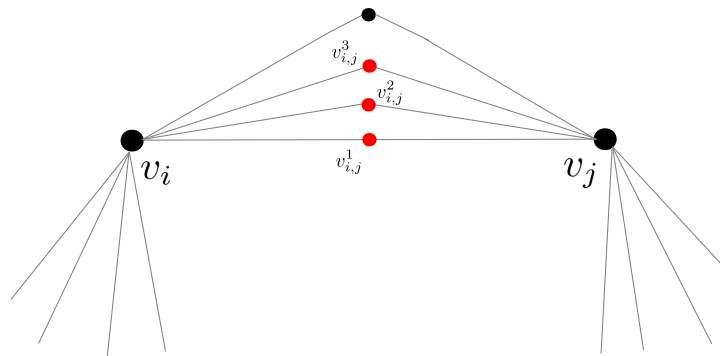
กรณีที่ 3: $v_{i,j}^p \in W$ และ $v_{i,j}^q \notin W$ โดยที่ $1 \leq p < q \leq m$ นั่นคือ W บรรจุจุดยอดอย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งเกิดจากการจับดีไวต์เส้นเชื่อมซึ่งประชิดกับจุดยอด v_i และจุดยอด v_j

เราสามารถพิสูจน์ข้อคาดการณ์ได้สำหรับกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 และสามารถพิสูจน์ข้อคาดการณ์สำหรับ กรณีย่อยบางกรณีของกรณีที่ 3 ดังที่จะแสดงในขั้นต่อไป ให้ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m\}$ แทนเซตจุดยอดของกราฟ K_m^m จากการที่ $I[S] = V(G_m)$ ได้ว่า S เป็นเซตจีโอเดติกของกราฟ G_m ส่งผลให้ $g(G_m) \leq m$

ต่อไปจะแสดงว่า $g(G_m) = m$ โดยสมมติฐานแย้งว่า $g(G_m) = n < m$ และให้ $W = \{w_1, w_2 \dots w_n\}$ เป็นเซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุดของกราฟ G_m เราพิจารณากรณีย่อยอีก 3 กรณีคือ

กรณีที่ 1: $W \subset V(K_m^m)$ ในที่นี้ได้ผลลัพธ์ว่า $W = V(K_n^n)$ และ $I[W] = V(G_n)$ เห็นได้ชัดว่า $I[W] \neq V(G_m)$ W จึงไม่ใช่เซตจีโอเดติกของ G_m ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 2: $W = \{v_{i,j}^1, v_{i,j}^2, \dots, v_{i,j}^n\}$ โดยที่ $1 \leq i < j \leq m$ ในที่นี้ได้ผลลัพธ์ว่า $I[W] = W \cup \{v_i, v_j\} \subset V(G_m)$ ดังนั้น W จึงไม่ใช่เซตจีโอเดติกของ G_m ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง



รูปที่ 3.2: การเลือกจุดยอดแบบกรณีที่ 2 บนกราฟ G_4

กรณีที่ 3: กำหนดให้ $v_{i,j}^p \in W$ และ $v_{i,j}^q \notin W$ โดยที่ $1 \leq i < j \leq m$ และ $1 \leq p < q \leq m$ จากการที่ $I[W] = V(G_m)$ แสดงว่าต้องมี $x, y \in W$ โดยที่ $v_{i,j}^q \in I[x, y]$ และ $2 \leq d(x, y) \leq 4$ เนื่องจาก $\text{diam}(G_m) = 4$ สำหรับ $m \geq 4$

สามารถแยกกรณีย่อยได้อีก 3 กรณีคือ

กรณีที่ 3.1: $d(x, y) = 2$

กรณีที่ 3.2: $d(x, y) = 3$

กรณีที่ 3.3: $d(x, y) = 4$

กรณีที 3.1: $d(x, y) = 2$

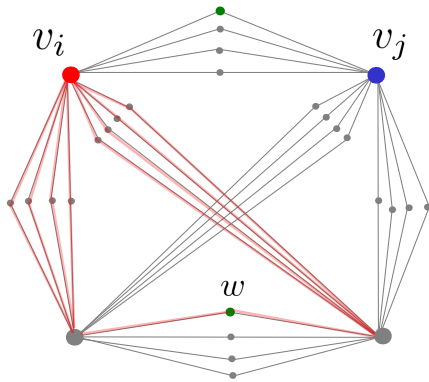
เริ่มต้นที่การสมมติว่า $d(x, y) = 2$ เราจะแสดงว่า

$$I[W] = I[W - \{v_{i,j}^p\}]$$

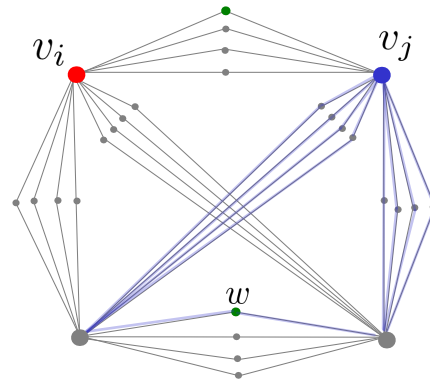
ถ้า $d(x, y) = 2$ และ $v_{i,j}^q \in I[x, y]$ แล้วได้ว่า $\{x, y\} = \{v_i, v_j\}$ เมื่อพิจารณาจีโอเดซิก $x - y$ จะเห็นว่า จุดยอด $v_{i,j}^q$ อยู่บนจีโอเดซิก $v_i, v_{i,j}^q, v_j$ และจุดยอด $v_{i,j}^p$ ก็อยู่บนจีโอเดซิก $v_i, v_{i,j}^p, v_j$ เช่นเดียวกัน เราจึงต้องพิจารณาจุดยอด $v \notin W$ ที่อยู่บนจีโอเดซิก $v_{i,j}^p - w$ ใดๆ โดยที่ $w \in W$ หาก $d(v_{i,j}^p, w) = 2$ ได้ว่า $v \in \{v_i, v_j\}$ เกิดข้อขัดแย้งกับการที่ $v \notin W$ หาก $d(v_{i,j}^p, w) = 3$ ได้ว่าจุดยอด v ต้องอยู่บนจีโอเดซิก v_i, v, w หรือจีโอเดซิก v_j, v, w และสำหรับกรณีที่ $d(v_{i,j}^p, w) = 4$ เราจะตั้งข้อสังเกตต่อไปนี้

ข้อสังเกต 3.1 ให้ $w \in V(G_m)$ โดยที่ $d(v_{i,j}^p, w) = 4$ ได้ว่า

$$I[v_{i,j}^p, w] = I[v_i, w] \cup I[v_j, w] \cup \{v_{i,j}^p\}$$



รูปที่ 3.3: จีโอเดซิก $v_i - w$

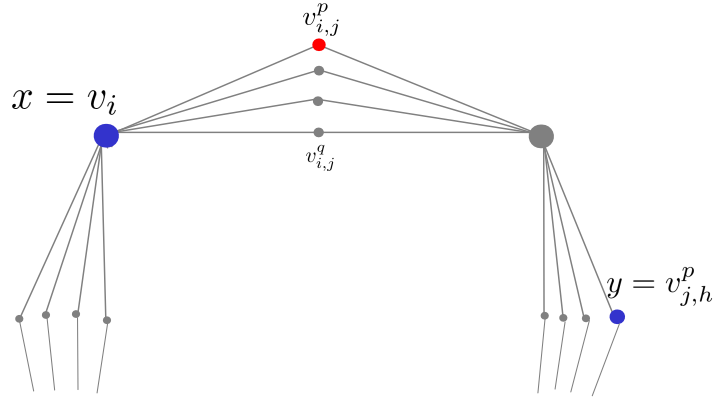


รูปที่ 3.4: จีโอเดซิก $v_j - w$

จากข้อสังเกต 3.1 เราเห็นว่าจุดยอด v ต้องถูกบรรจุในเซตช่วง $I[x, w]$ หรือ $I[y, w]$ เพราะฉะนั้น $I[W] = I[W - \{v_{i,j}^p\}]$ เกิดข้อขัดแย้งกับการที่ W เป็นเซตจีโอเดติกที่เล็กที่สุดของกราฟ G_m

กรณี 3.2: $d(x, y) = 3$

หาก $d(x, y) = 3$ ได้ว่าจุดยอด x หรือ y จุดใดจุดหนึ่งอยู่ใน $\{v_i, v_j\}$ โดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปจะกำหนดให้เป็น $x = v_i$ และ $y = v_{j,h}^p$ เป็นจุดยอดที่เกิดจากการซัดไวด์เส้นเชื่อม $v_j v_h$ โดยที่ $1 \leq h \neq i \leq m$



รูปที่ 3.5: จุดยอด x, y ในกรณีที่ $d(x, y) = 3$

ในที่นี้เมื่อพิจารณาจีโอเดซิก $x - y$ แล้วเห็นว่าจุดยอด $v_{i,j}^p$ และจุดยอด $v_{i,j}^q$ ล้วนอยู่บนจีโอเดซิก $x - y$ ด้วยซึ่งก็คือวิถี $x, v_{i,j}^p, v_j, y$ และวิถี $x, v_{i,j}^q, v_j, y$ ตามลำดับ

ต่อมาเราจะพิจารณาจุดยอด $v \notin W$ ที่อยู่บนจีโอเดซิก $v_{i,j}^p - w$ โดยที่ $w \in W$ หาก $d(v_{i,j}^p, w) = 2$ ได้ว่า $v = v_i$ หรือ $v = v_j$ แต่ v_i และ v_j ล้วนอยู่ในจีโอเดซิก $x - y$ ที่กล่าวไว้ข้างต้นซึ่งหมายความว่า v ถูกบรรจุในช่วง $I[x, y]$ อยู่แล้ว

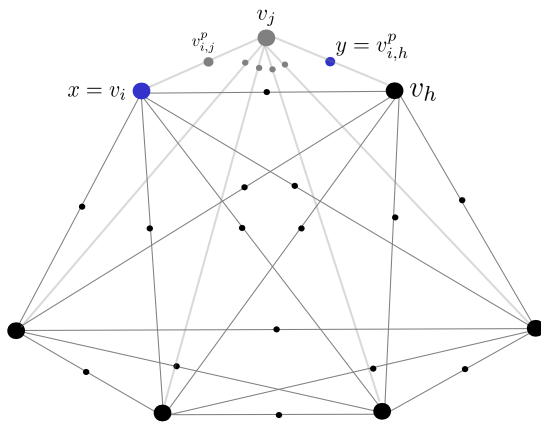
เราจึงพิจารณากรณีที่ $d(v_{i,j}^p, w) = 3$ ต่อ โดยในที่นี้ได้ว่า $w \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ โดยกำหนดให้ $w = v_h$ เราจะแสดงว่าสามารถสร้างเซตจีโอเดติกของกราฟ G_{m-1} เรียกว่า W' ที่เล็กกว่า W ได้ โดยจะนิยามเซต W' ดังนี้

$$W' = W - (W \cap \{v_{i,j}^l, v_{j,h}^l : 1 \leq l \leq m\})$$

จากที่ $v_{i,j}^p, v_{j,h}^p \notin W'$ แสดงว่า $|W'| \leq m - 2$ ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างกราฟ G_6 และ G_5 เพื่อให้เห็นโครงสร้างของเซต $|W'|$

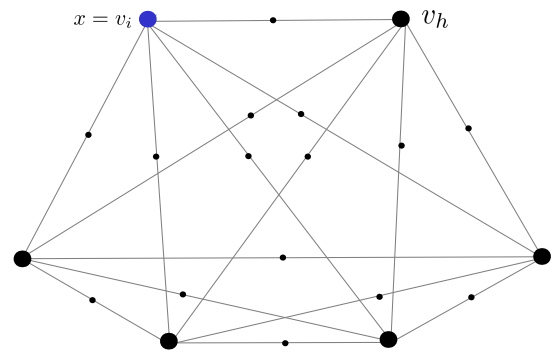
ตัวอย่าง 3.2 ในที่นี้จะเขียนจุดยอดที่เกิดจากการซบตีไวด์เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดแต่ละคู่เพียงหนึ่งจุดเพื่อทำให้ง่าย

ต่อการดู



รูปที่ 3.6: กราฟ G_6

และจุดยอดที่อาจถูกเลือกให้เป็นสมาชิกของ $|W|$



รูปที่ 3.7: กราฟ G_5

และจุดยอดที่อาจถูกเลือกให้เป็นสมาชิกของ $|W'|$

จากที่ $v_{i,j}^p, y \in W \cap \{v_{i,j}^l, v_{j,h}^l : 1 \leq l \leq m - 1\}$ เราได้ว่า $|W'| \leq m - 2$ ต่อไปนี้จะให้ $G_{m-1} = S(K_{m-1}^{m-1})$ เป็นกราฟที่เกิดจากการซบตีไวด์กราฟ K_{m-1}^{m-1} โดยที่ $V(K_{m-1}^{m-1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{m-1}\}$

ต่อจากนี้เราจะเริ่มแสดงว่า $I[W'] = V(G_{m-1})$ และ $g(G_{m-1}) \leq |W'| \leq |m - 1|$ ซึ่งจะก่อให้เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานการอุปนัย ให้ v เป็นจุดยอดของกราฟ G_{m-1} โดยที่ $v \notin W'$ จากการที่ $I[W] = V(G_m)$ เราเห็นว่าต้องมีวิถีระหว่างจุดยอด $u, w \in W$ โดยที่ $v \in I[u, w]$

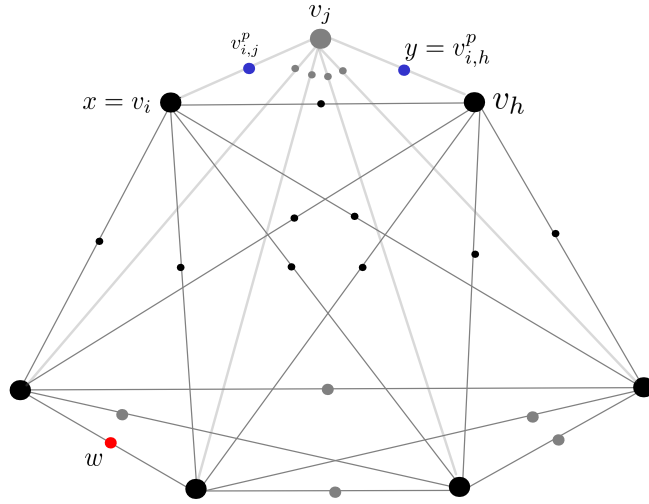
การที่ $I[u, w]$ บรรจุจุดยอดที่อยู่บนกราฟ G_{m-1} แสดงว่าจุดยอด u หรือ w อย่างน้อยหนึ่งจุดจะต้องเป็นจุดยอดที่อยู่บนกราฟ $V(G_{m-1})$ ในกรณีที่จุดยอด u และ w อยู่ในเซต $V(G_{m-1})$ ทั้งสองจุดเราได้ว่าจีโอเดสิก $u - w$ เป็นวิถีบนกราฟ G_{m-1} และได้บรรจุจุดยอด v ไว้อย่างที่ต้องการ

แต่ถ้าหาก u, w มีจุดยอดแค่หนึ่งจุดอยู่บนกราฟ G_{m-1} ซึ่งในที่นี้จะให้เป็นจุดยอด w เราจะต้องแบ่งกรณีย่อยได้อีกเป็นกรณีที่ $d(u, w) = 2$ หรือ $d(u, w) = 3$ หรือ $d(u, w) = 4$

หาก $d(u, w) = 2$ ในที่นี้ได้ว่าจุดยอด $v \in \{v_i, v_h\}$ เกิดข้อขัดแย้งกับการที่ $v \notin W'$

ต่อมาจะพิจารณากรณีที่ $d(u, w) = 3$ ในที่นี้จุดยอด v จะต้องอยู่บนจีโอเดซิก $v_i - w$ หรือจีโอเดซิก $v_h - w$ ซึ่งคือวิถี v_i, v, w หรือวิถี v_h, v, w ตามลำดับเราจึงได้ข้อสรุปว่า $I[W'] = V(G_{m-1})$ เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานการอุปนัย

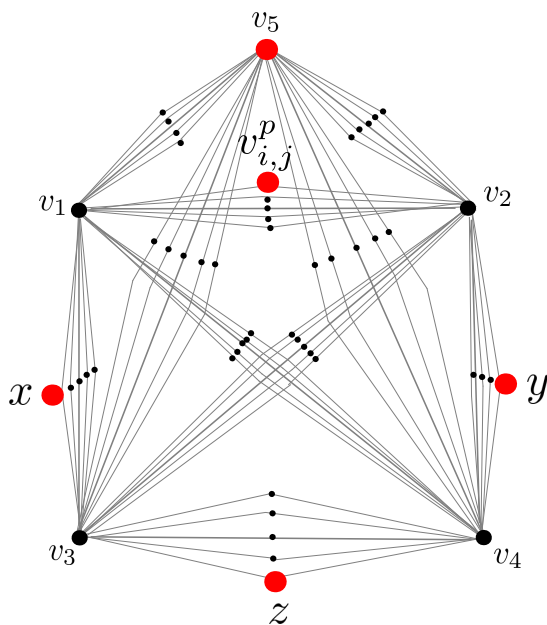
ส่วนในกรณีที่ $d(u, w) = 4$ เมื่อเราใช้ข้อสังเกต 3.1 พิจารณาช่วง $I[u, w]$ แล้วเห็นว่า $v \in I[v_i, w]$ หรือ $v \in I[v_h, w]$ ทำให้ $I[W'] = V(G_{m-1})$ เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานการอุปนัย



รูปที่ 3.8: จุดยอด $w \in G_5$ ซึ่งมีระยะทางห่างจาก u เท่ากับ 4

กรณี 3.3

ให้ S เป็นเซตจีโอเดติกของกราฟ G_m ให้ $v_{i,j}^p \in S$ ได้ว่าจะต้องมี $x, y \in S$ ซึ่ง $v_{i,j}^q \in I[x, y]$ สำหรับ $q \neq p$ ในกรณีที่ $d(x, y) = 4$ จะทิ้งไว้เป็นปัญหาปลายเปิดเนื่องจากกราฟมีความซับซ้อน



รูปที่ 3.9: เซตจีโอเดติกที่มีสมาชิก 5 จุดของกราฟ G_5 ซึ่งบรรจุจุดยอด x, y โดยที่ $d(x, y) = 4$

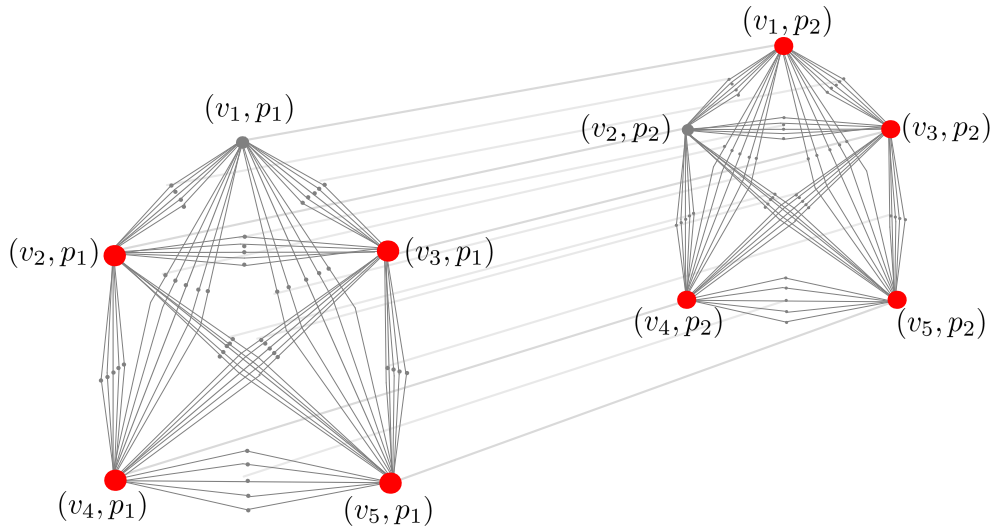
□

3.2 จำนวนจีโอเดติกของกราฟ $P_2 \times S(K_m^m)$

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ K_m^m โดยที่ $m \geq 2 \in \mathbb{N}$ เป็นมัลติกราฟที่มีจุดยอด m จุดและมีเส้นเชื่อม m เส้นตกระทบจุดยอดทุกๆคู่ของกราฟ ให้ $G_m = S(K_m^m)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการซับริดเส้นเชื่อมทุกๆเส้นของกราฟ K_m^m ได้ว่า

$$g(G_m \times P_2) \leq 2(m - 1)$$

พิสูจน์. กำหนดสัญลักษณ์ $S_{i,j} \subset V(G_m)$ แทนเซตของจุดยอดทุกจุดที่เกิดจากการซับริดเส้นเชื่อม $v_i v_j$ ทุกเส้น และให้เซต $S = V(G_m) \times V(P_2)$ เป็นเซตของคู่อันดับที่เกิดจากผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตของจุดยอดของ กราฟ G_m และเซตของจุดยอดของกราฟ $V(P_2)$ เห็นได้ชัดว่า $I[S] = V(P_2 \times G_m)$ ต่อมาเราจะพิจารณาการนำจุดยอด (v_1, p_1) และจุดยอด (v_2, p_2) ออกจากเซต S โดยให้ $W = S - \{(v_1, p_1), (v_2, p_2)\}$ และให้ $v_x \neq v_1 \in V(G_m)$ เราเห็นว่า จุดยอด (v_1, p_1) และเซตจุดยอด $S_{1,x} \times \{p_1\}$ ถูกบรรจุในเซตช่วง $I[(v_1, p_2), (v_x, p_1)]$ และในเชิงเดียวกันสำหรับ $v_y \neq v_2 \in V(G_m)$ จุดยอด (v_2, p_2) และเซตจุดยอด $S_{2,y} \times \{p_2\}$ ก็ถูกบรรจุในเซตช่วง $I[(v_2, p_1), (v_y, p_2)]$ ทำให้ W เป็นเซตจีโอเดติกของกราฟ $P_2 \times G_2$ โดยที่ $|W| = |S| - 2 = 2(m - 1)$ ทำให้ $g(P_2 \times G_m) \leq 2(m - 1)$



รูปที่ 3.10: เซตจีโอเดติก $W = \{V(G_5 \times P_2) - \{(v_1, p_1), (v_2, p_2)\}\}$ สำหรับกราฟ G_5

□

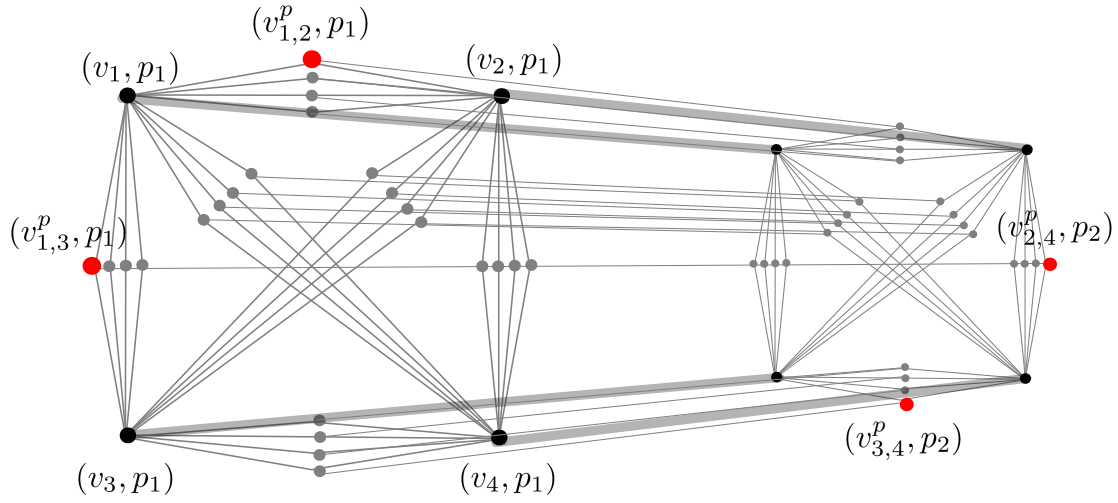
ขอบเขตบนของจำนวนจีโอเดติกของกราฟ $P_2 \times K_4^4$ ที่เราพิสูจน์ยังสามารถทำให้รัดกุมมากขึ้นได้อีก ต่อไปนี้จะนำเสนอตัวอย่างเซตจีโอเดติกที่มีขนาดเท่ากับ 4 ของกราฟ $P_2 \times K_4^4$

ตัวอย่าง 3.4 ให้ $S = \{(v_{1,2}^p, p_1), (v_{1,3}^p, p_1), (v_{2,4}^p, p_2), (v_{3,4}^p, p_2)\}$ เมื่อพิจารณาช่วง $(v_{1,2}^p, p_1), (v_{3,4}^p, p_2)$ พบว่า

$$I[(v_{1,2}^p, p_1), (v_{3,4}^p, p_2)] = V(P_2 \times K_4^4) - \{(v_{1,2}^l, p_1), (v_{1,2}^l, p_2), (v_{3,4}^l, p_1), (v_{3,4}^l, p_2) : 1 \leq l \neq p \leq 4\}$$

และจากการที่ $\{(v_{1,2}^l, p_1), (v_{1,2}^l, p_2), (v_{3,4}^l, p_1), (v_{3,4}^l, p_2) : 1 \leq l \neq p \leq 4\}$ อยู่ในช่วง $(v_{1,3}^p, p_1), (v_{2,4}^p, p_2)$

ทำให้ S เป็นเซตจีโอเดติกของกราฟ $P_2 \times K_4^4$ โดยที่ S มีสมาชิกเป็นจุดยอด 4 จุด



รูปที่ 3.11: กราฟ $P_2 \times K_4^4$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จากผลการศึกษาพบว่าจำนวนจีโอเดติกของกราฟ $S(K_m^m)$ ควรจะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ m โดยผู้ทำการศึกษาได้พิสูจน์ว่าสำหรับเซตจีโอเดติก W ที่มีสมาชิกเป็นจุดยอดของกราฟ K_m^m แล้วขนาดของ W ที่เล็กที่สุดที่เป็นไปได้คือ m และสามารถพิสูจน์ว่าสำหรับบางกรณีที่เซตจีโอเดติก W' บรรจุจุดยอดที่เกิดจากการซัดไวด์เส้นเชื่อมของกราฟ K_m^m แล้วขนาดของ W' ที่เล็กที่สุดที่เป็นไปได้คือ m และจะให้กรณีที่เหลือเป็นปัญหาปลายเปิดเนื่องจากกราฟมีความซับซ้อน สำหรับจำนวนจีโอเดติกของกราฟ $S(K_m^m) \times P_2$ ผู้ศึกษาได้พบว่า $g(S(K_m^m) \times P_2) \leq 2(m-1)$ ผู้ที่สนใจสามารถนำแนวคิดข้างต้นไปใช้พิจารณาจำนวนจีโอเดติกของกราฟผลคูณคาร์ทีเซียนที่มีโครงสร้างลักษณะอื่นได้

บรรณานุกรม

- [1] ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลิ้ตนาวลี. เอกสารประกอบการเรียนกระบวนวิชาทฤษฎีกราฟ. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- [2] B. Bresar, S. Klavzar and A. T. Horvat, On the geodetic number and related metric sets in Cartesian product graphs, Discrete Math., 308 (2008)
- [3] G. Chartrand, F. Harary and P. Zhang, Geodetic sets in graphs, Discuss. Math. Graph Theory 20 (2000).
- [4] G. Chartrand, F. Harary and P. Zhang, On the geodetic number of a graph, Networks 39 (2002)/
- [5] F. Harary, E. Loukakis and C. Tsouros, The geodetic number of a graph, Math. Comput. Modelling 17 (1993) 89–95.
- [6] T. Jiang, I. Pelayo and D. Pritikin, Geodesic convexity and Cartesian products in graphs, manuscript, 2004.