

การประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์
Approximate numerical solution of linear first order singular initial value problem

นางสาว ญาณิศา เครือประเสริฐ
รหัส 620510556

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รายงานการศึกษาอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของกระบวนวิชา 206499
ตามเงื่อนไขการศึกษาระดับปริญญาตรี
มีนาคม 2565

การประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์

Approximate numerical solution of linear first order singular initial value problem

นางสาว ญาณิศา เครือประเสริฐ

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

.....
.....

(รองศาสตราจารย์ ดร.มรกต เกื้อเจริญ)

.....
.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพล พลอยมะก้า)

การประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์
Approximate numerical solution of linear first order singular initial value problem

นางสาว ญาณิศา เครือประเสริฐ
รหัส 620510556

ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งในกระบวนการวิชา 206499 (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้ศึกษาค้นคว้าอิสระในหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่องการประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์

ข้าพเจ้าขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.มรกต เก็บเจริญ ประธานกรรมการสอบในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ต่าง ๆ เกี่ยวกับการทำงานค้นคว้าอิสระ และตรวจสอบการค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ให้มีความสมบูรณ์และถูกต้องและเสร็จสมบูรณ์ไปด้วยดี

ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพล พลอยมะก่า อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำ รวมถึงตรวจสอบความถูกต้อง ในการค้นคว้าอิสระนี้ให้มีความสำเร็จให้ดียิ่งขึ้น

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณทุกท่าน ที่ให้กำลังใจตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้มอบความรู้ให้แก่ข้าพเจ้าได้นำมาใช้ในการค้นคว้าอิสระนี้

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้ามีความซาบซึ้งในความกรุณาของทุกท่านที่ได้กล่าวถึงและผู้ที่ไม่ได้เอ่ยนามในที่นี้ที่ได้มีส่วนช่วยเหลือและให้กำลังใจด้วยดีตลอดมา จึงกราบขอบพระคุณทุกท่านด้วยความจริงใจ และขอขอบคุณประโยชน์อันเกิดจากการค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ให้แก่ บิดา มารดา คณาจารย์ และผู้เกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้ให้กำลังใจและสนับสนุนข้าพเจ้าตลอดมา

นางสาว ญาณิศา เครือประเสริฐ

มีนาคม 2565

หัวข้อ (ภาษาไทย)	การประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์
(ภาษาอังกฤษ)	Approximate numerical solution of linear first order singular initial value problem
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นางสาวณัฏฐา เครือประเสริฐ รหัสนักศึกษา 620510556
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.มรกต เก็บเจริญ
ชื่อกรรมการสอบ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพล พลอยมะก้า

บทคัดย่อ

การศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้เราได้ศึกษาวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ นอกจากนี้เราได้ศึกษาการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบซึ่งนำมาใช้ในการประมาณค่าของปัญหาค่าเริ่มต้น และเราได้นำเสนอค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้น

In this independent study, we study the numerical method for approximate solution of linear first order singular initial value problem. The various numerical integrations of the improper integral are used to help finding the approximation of the initial value problems. The numerical results of the initial value problems are also presented.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ.....	3
บทคัดย่อ.....	4
สารบัญ.....	5
บทที่ 1 บทนำ.....	6
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน.....	7
บทที่ 3 ผลการศึกษา.....	14
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา.....	27
บรรณานุกรม.....	29
ภาคผนวก.....	30

บทที่ 1

บทนำ

การศึกษาปัญหาค่าเริ่มต้นซิงกูลาร์ได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์และนักฟิสิกส์จำนวนมากในเวลาไม่กี่ปีที่ผ่านมา ปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์สามารถพบได้ในการคำนวณของระบบนิเวศวิทยา ซึ่งเป็นการหาการเกิดของเหตุการณ์หิมะถล่ม [4] โดยสำหรับผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ มีการใช้วิธีการที่หลากหลายในการคำนวณไม่ว่าจะเป็นวิธีการของ Auzinger, Koch [4] และคณะที่ใช้วิธีของออยเลอร์เพื่อให้ได้ความแม่นยำสูงในการคำนวณ

ซึ่งเมื่อไม่นานมานี้ Hasan และคณะ [4] ได้คิดสูตรโดยปริยายอันดับที่สองและสามที่ได้มาจากสูตรอินทิกรัลสำหรับการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ และต่อมา Rahaman และคณะ [4] ได้คิดสูตรโดยปริยายอันดับที่สามและสี่ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับที่หนึ่งซิงกูลาร์ โดยสูตรที่ได้คิดค้นมาเหล่านี้มีความแม่นยำมากกว่าสูตรของออยเลอร์

การศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ได้ทำการศึกษาวิธีการประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ โดยศึกษาสูตรของ Hasan อันดับที่สองและสาม พร้อมยกตัวอย่างปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ นอกจากนี้เรายังศึกษาสูตรของ Rahaman อันดับที่สามและสี่ พร้อมยกตัวอย่างปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ประกอบด้วย

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 เราเรียกสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรตามอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยหนึ่งตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)

บทนิยาม 2.2 ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และ กำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ของตัวแปรต้น x และตัวแปรตาม y ในรูป

$$F\left(x, y, \frac{dx}{dy}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

นิยามบนช่วง I เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $\phi(x)$ ที่นิยามบนช่วง I เป็น **ผลเฉลยชัดเจน** ของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) บนช่วง I ถ้า $\phi(x)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) สำหรับทุกจำนวนจริง $x \in I$

บทนิยาม 2.3 ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และกำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) นิยามบนช่วง I จะกล่าวว่าความสัมพันธ์ $\phi(x, y) = 0$ เป็น **ผลเฉลยโดยปริยาย** (implicit solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน $y = \phi(x)$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $\phi(x, y) = 0$ และเป็นผลเฉลยชัดเจน (explicit solution) ของสมการการเชิงอนุพันธ์ (2.1) บนช่วง I

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) นิยามบนช่วง I และ $x_0 \in I$ จะเรียกการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) บนช่วง I ที่ผลเฉลยดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ \frac{d}{dx} y(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x_0) &= y_{n-1}, \end{aligned}$$

โดยที่ $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว ว่า **ปัญหาค่าเริ่มต้น**

ตัวอย่าง 2.5 ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y(0) = 3$$

กำหนดให้พารามิเตอร์ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ พิจารณา $\phi(x) = ce^x$ จะได้ $\phi'(x) = ce^x$ จึงได้ว่า $\phi'(x) - \phi(x) = ce^x - ce^x = 0$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x) = ce^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 3$ (แทนค่า $x = 0$ และ $y = 3$) ในผลเฉลย ดังกล่าว จะได้ $3 = ce^0 = c$ นั่นคือฟังก์ชัน $y = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y(0) = 3$$

พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้นอื่น เช่น $y(2) = -2$ จะได้ว่า $-2 = ce^2$ นั่นคือ $c = -2e^{-2}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $y = -2e^{x-2}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y(2) = -2$$

บทนิยาม 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

เป็น สมการแยกตัวแปรได้ ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน $g(x)$ ของตัวแปร x และฟังก์ชัน $p(y)$ ของตัวแปร y

บทนิยาม 2.7 การหาผลเฉลยแบบแยกตัวแปรได้

1. จัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูป

$$h(y)dy = g(x)dx$$

2. หาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

จะได้ ผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$H(y) = G(x) + c$$

ตัวอย่าง 2.8 หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ เราจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ใหม่ได้เป็น

$$y^2 dy = (x-5)dx$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int y^2 dy = \int (x-5)dx$$

ดังนั้น ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแยกตัวแปรได้ คือ

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งจัดรูปสมการได้เป็น

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 15x + C_1$$

โดยที่ $C_1 := 3c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

บทนิยาม 2.9 สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \quad (2.2)$$

โดยที่ $a_1(x)$, $a_0(x)$ และ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น ว่า สมการเชิงเส้น

บทนิยาม 2.10 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่าจุด $x = x_0$ เป็น **จุดเอกฐาน** (singular point) ที่ $x = x_0$

ของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.2) ถ้าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ และ $Q(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

วิเคราะห์ที่จุด $x = x_0$

ตัวอย่าง 2.11 หาจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

$$(x^2 - 1)y' + 2xy + 6 = 0$$

พิจารณาพหุนาม $x^2 - 1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = -1, 1$ จึงได้ว่า จุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนด คือ 1 และ -1

บทนิยาม 2.12 การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้น

1. จัดรูปสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

และหาช่วง I ที่ฟังก์ชัน $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

2. คำนวณตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x)$ โดย

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

3. คูณตลอดทั้งสมการด้วยในรูปมาตรฐานด้วย $\mu(x)$ และเนื่องจากฝั่งซ้ายมือของสมการคือ

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] \text{ จะได้ว่า}$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \quad (2.3)$$

4. ทำการแยกตัวแปรและหาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ (2.3) จากนั้นหารตลอดด้วย $\mu(x)$ จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นบนช่วง I คือ

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x)dx + C \right]$$

ตัวอย่าง 2.13 หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-1}{3} \right) y = \frac{1}{3}$$

แสดงการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นตามลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จากสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-1}{3} \right) y = \frac{1}{3}$$

นั่นคือ $P(x) = \frac{-1}{3}$ และ $Q(x) = \frac{1}{3}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, +\infty)$

ขั้นที่ 2 จากสูตรตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ จะได้ตัวประกอบปริพันธ์ สำหรับสมการเชิงเส้นนี้ คือ

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{-1}{3}\right)dx} = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}$$

ขั้นที่ 3 นำตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}$ คูณตลอดทั้งสมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-1}{3}\right)y = \frac{1}{3}$$

จะได้

$$e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} \frac{dy}{dx} + e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} \left(\frac{-1}{3}\right)y = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} \frac{1}{3}$$

และเนื่องจากพจน์ฝั่งซ้ายมือของสมการเท่ากับ $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$ จึงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} \frac{1}{3}$$

ขั้นที่ 4 ทำการแยกตัวแปรสมการข้างต้น จะได้

$$d[\mu(x)y] = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} \frac{1}{3} dx$$

และทำการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int d[\mu(x)y] = \int e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} \frac{1}{3} dx$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ นั่นคือ

$$\mu(x)y = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} + c$$

ดังนั้น

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[-e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} + c \right]$$

หรือ

$$y = \frac{1}{e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}} \left[-e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} + c \right]$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นบนช่วง $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = -1 + ce^{\frac{x}{3}}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.14 กำหนดให้ I เป็นช่วงใด ๆ และให้ $x_0 \in I$ พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

โดยที่

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

ถ้า $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุกช่วง $x \in I$ แล้ว ปัญหาค่าเริ่มต้นนี้มีผลเฉลยเพียง $y(x)$ เพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I สำหรับทุกเงื่อนไขเริ่มต้น $y_0, y_1, \dots, y_n$

ทฤษฎีบท 2.15 การประมาณค่าช่วงด้วยพหุนามแบบลากรานจ์ (Lagrange polynomial) เมื่อเขียนในรูปทั่วไป ฟังก์ชันพหุนาม $p_N x$ ซึ่งมีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ N ที่ประมาณค่าในช่วง x_i, f_i $\sum_{i=0}^N$ สามารถเขียนได้เป็น

$$p_N x = \sum_{i=0}^N f_i \ell_i^N x$$

ซึ่งฟังก์ชัน $\ell_i^N x$ เป็นพหุนามดีกรี N และมีคุณสมบัติคือ

$$\ell_k^N x_j = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.16 พิจารณาฟังก์ชันพหุนามที่ประมาณค่าในช่วงของจุดพิคัดสามจุดคือ x_i, f_i $\sum_{i=0}^2$ เราจะกล่าวว่า x_i, f_i $\sum_{i=0}^2$ เป็นฟังก์ชันพหุนามในรูปแบบลากรองจ์ดีกรี 2 คือ

$$\begin{aligned} p_2 x &= f_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + f_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f_2 \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ &= \ell_0^2 x f_0 + \ell_1^2 x f_1 + \ell_2^2 x f_2 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.17 พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นที่อยู่ในรูป

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(a) = x_0$$

ในช่วง $[a, b]$ เมื่อแบ่งช่วง $[a, b]$ เป็นช่วงย่อย N ช่วงจะได้ขนาดของขั้นบันได คือ $h = \frac{b-a}{N}$ ถ้ากระจายอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด t_i เมื่อช่วง $i = 0, 1, 2, \dots, N$ และให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์อันดับสองของอนุพันธ์ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ โดยใช้ 2 พจน์แรกและกำหนดให้ $x(t_i) = x_i$ จะได้

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + h) \approx x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2} x''(\xi)$$

และจากสมการเชิงอนุพันธ์จะได้

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

เมื่อกำหนดให้ $x_i = x(t_i)$

บทที่ 3

ผลการศึกษา

ในบทนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ซึ่งนำมาใช้ในการประมาณค่าของปัญหาค่าเริ่มต้น และแสดงตัวอย่างของการแก้ปัญหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้น

สมการโดยปริยายอันดับที่สองของ Hasan

ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น ก่อนอื่นเราจะประมาณค่าหาปริพันธ์

$$I = \int_0^x f(x) dx$$

เมื่อ $f(x)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ $x = x_0$ ในฟังก์ชันพหุนามในรูปแบบลากรองจ์ดีกรี 2

$$f(x) \cong \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 \quad (3.1)$$

ที่ $x_1 = x_0 + \frac{h}{3}$ และ $x_2 = x_0 + h$ และ $h > 0$ อินทิเกรตสมการ (3.1) ภายในขอบเขตของ x_0 ถึง x_2 จะได้สมการอินทิกรัล คือ

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{4} (3f_1 + f_2) \quad (3.2)$$

จากสมการที่ (3.2) จะได้สมการโดยปริยายอันดับที่สอง (second order implicit formular) ของ Hasan et al. [4] นำมาใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับหนึ่งเชิงอนุพันธ์

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ซึ่งมีจุดเชิงอนุพันธ์อยู่ที่ $x = x_0$ จะได้ว่า

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left[3f \left(x_i + \frac{h}{3}, \left(y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{3} \right) \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

ที่ $x_{i+1} = x_i + h$ และ $i = 0, 1, 2, \dots, M$

ตัวอย่าง 3.1 ให้

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = 1$$

จาก

$$y'(x) = f(x, y) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}$$

แทนค่าลงในสมการ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left[3f \left(x_i + \frac{h}{3}, \left(y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{3} \right) \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

จะได้

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{4} \left[3f \left(x_i + \frac{h}{3}, \left(y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{3} \right) \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right] \\ &= y_i + \frac{h}{4} \left[-\frac{\sqrt{3}(2y_i + y_{i+1})}{\sqrt{3x_i + h}} - \frac{y_{i+1}}{\sqrt{x_i + h}} \right] \\ &= y_i - \frac{h}{4} \left[\frac{2\sqrt{3}y_i}{\sqrt{3x_i + h}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x_i + h}} + \frac{1}{\sqrt{x_i + h}} \right) y_{i+1} \right] \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$L_1 = 1 + \frac{h}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x_i + h}} + \frac{1}{\sqrt{x_i + h}} \right) = \frac{4\sqrt{3x_i + h}\sqrt{x_i + h} + h\sqrt{3}\sqrt{x_i + h} + h\sqrt{3x_i + h}}{4\sqrt{3x_i + h}\sqrt{x_i + h}}$$

และ

$$R_1 = 1 - \frac{h}{4} \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3x_i + h}} \right) = \frac{4\sqrt{3x_i + h} - 2h\sqrt{3}}{4\sqrt{3x_i + h}}$$

จะได้

$$\begin{aligned} L_1 y_{i+1} &= R_1 y_i \\ y_{i+1} &= \left(\frac{R_1}{L_1} \right) y_i \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$y_{i+1} = \left(\frac{4\sqrt{3x_i + h}\sqrt{x_i + h} - 2h\sqrt{3}\sqrt{x_i + h}}{4\sqrt{3x_i + h}\sqrt{x_i + h} + h\sqrt{3}\sqrt{x_i + h} + h\sqrt{3x_i + h}} \right) y_i$$

ที่ $x_{i+1} = x_i + h$

หาสมการแม่นตรง (exact equation) ของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{y(x)} &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{y(x)} \cdot \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{y(x)} \cdot dy &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{y(x)} \cdot dy = \int -\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

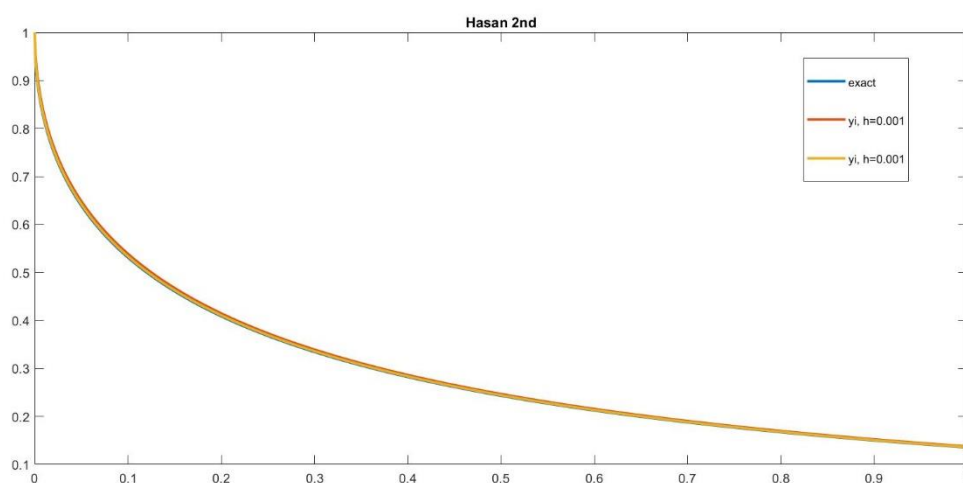
$$\begin{aligned} \ln|y(x)| &= -2\sqrt{x} \\ y &= c_1 e^{-2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

จาก $y(0)=1$ จะได้ $c_1 = 1$

ดังนั้นสมการค่าแม่นตรงของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ $y = e^{-2\sqrt{x}}$

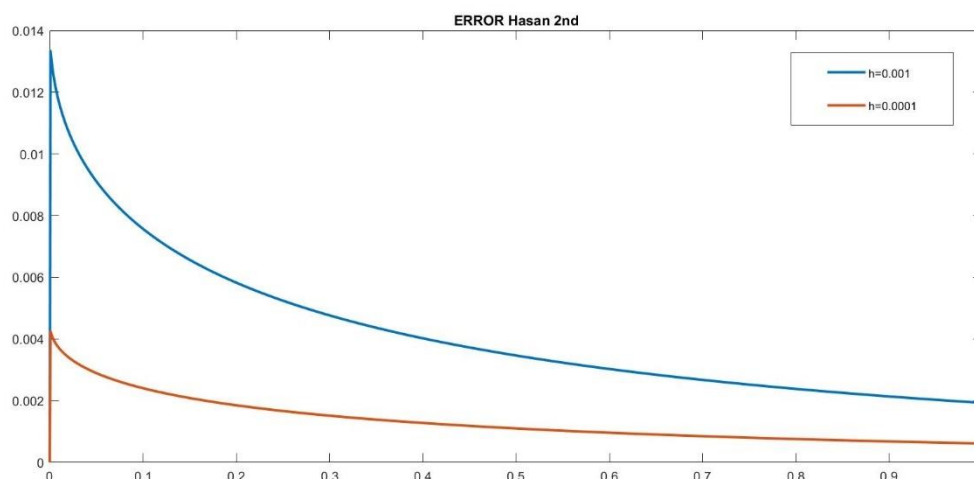
กำหนดให้ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$

จะได้



กราฟ (3.1) กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

จากกราฟจะเห็นว่าค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำของ y โดยค่าความคลาดเคลื่อนของค่าแม่นยำกับค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 0.01334 และ 0.00425 ตามลำดับ จากกราฟ (3.1) สามารถดูค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำของ y กับค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ดังนี้



กราฟ (3.2) กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

สมการโดยปริยายอันดับที่สามของ Hasan

ต่อมา Hasan et.al ได้คิดสมการอินทิกรัลขึ้นมาใหม่ โดยกำหนดให้ $x_1 = x_0 + \frac{h}{6}$, $x_2 = x_0 + \frac{4h}{6}$ และ $x_3 = x_0 + h$ ซึ่งเป็นพิสัยของจุดบนช่วงของ x_0 ถึง x_3 จะได้สมการอินทิกรัล คือ

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{10}(4f_1 + 5f_2 + f_3) \quad (3.3)$$

จากสมการ (3.3) จะได้สมการโดยปริยายอันดับที่สามของ Hasan et al. นำมาใช้ปัญหาค่าเริ่มต้นอันดับหนึ่ง ซิงกูลาร์

$$y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

ซึ่งมีจุดซิงกูลาร์อยู่ที่ $x = x_0$ จะได้ว่า

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{10} \left[4f \left(x_i + \frac{h}{6}, \left(y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) \right) + 5f \left(x_i + \frac{4h}{6}, \left(y_i + 4 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

ที่ $x_{i+1} = x_i + h$ และ $i = 0, 1, 2, \dots, M$

ตัวอย่าง 3.2 ให้

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = 1$$

จาก

$$y'(x) = f(x, y) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}$$

แทนค่าลงในสมการ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{10} \left[4f \left(x_i + \frac{h}{6}, \left(y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) \right) + 5f \left(x_i + \frac{4h}{6}, \left(y_i + 4 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

จะได้

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{10} \left[4f \left(x_i + \frac{h}{6}, \left(y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) \right) + 5f \left(x_i + \frac{4h}{6}, \left(y_i + 4 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right] \\ &= y_i - \frac{h}{10} \left[\frac{4\sqrt{6}(5y_i + y_{i+1})}{6\sqrt{6x_i + h}} + \frac{5\sqrt{6}(2y_i + 4y_{i+1})}{6\sqrt{6x_i + 4h}} + \frac{y_{i+1}}{\sqrt{x_i + h}} \right] \\ &= y_i - \frac{h}{10} \left[\left(\frac{20\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + h}} + \frac{10\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + 4h}} \right) y_i + \left(\frac{4\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + h}} + \frac{20\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + 4h}} + \frac{1}{\sqrt{x_i + h}} \right) y_{i+1} \right] \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} L_2 &= 1 + \frac{h}{10} \left(\frac{4\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + h}} + \frac{20\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + 4h}} + \frac{1}{\sqrt{x_i + h}} \right) \\ &= \frac{60\sqrt{6x_i + h}\sqrt{6x_i + 4h}\sqrt{x_i + h} - 20h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + 4h}\sqrt{x_i + h} + 20h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + h}\sqrt{x_i + h}}{60\sqrt{6x_i + h}\sqrt{6x_i + 4h}\sqrt{x_i + h}} \end{aligned}$$

และ

$$R_2 = 1 - \frac{h}{10} \left(\frac{20\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + h}} + \frac{10\sqrt{6}}{6\sqrt{6x_i + 4h}} \right)$$

$$= \frac{60\sqrt{6x_i + h}\sqrt{6x_i + 4h}\sqrt{x_i + h} + 4h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + 4h} - 10h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + h}}{60\sqrt{6x_i + h}\sqrt{6x_i + 4h}}$$

จะได้

$$L_2 y_{i+1} = R_2 y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{R_2}{L_2} y_i$$

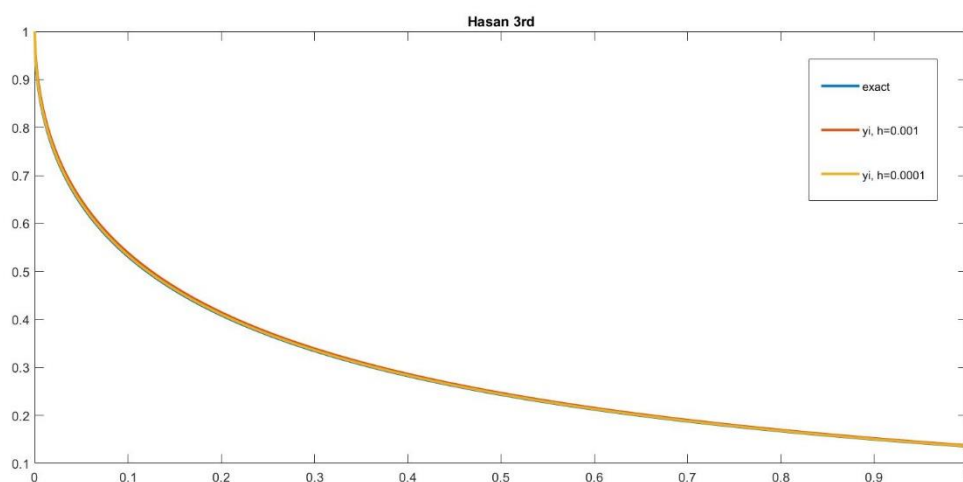
ดังนั้น

$$y_{i+1} = \left[\frac{\sqrt{x_i + h} (60\sqrt{6x_i + h}\sqrt{6x_i + 4h}\sqrt{x_i + h} + 4h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + 4h} - 10h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + h})}{60\sqrt{6x_i + h}\sqrt{6x_i + 4h}\sqrt{x_i + h} - 20h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + 4h}\sqrt{x_i + h} + 20h\sqrt{6}\sqrt{6x_i + h}\sqrt{x_i + h}} \right] y_i$$

ที่ $x_{i+1} = x_i + h$

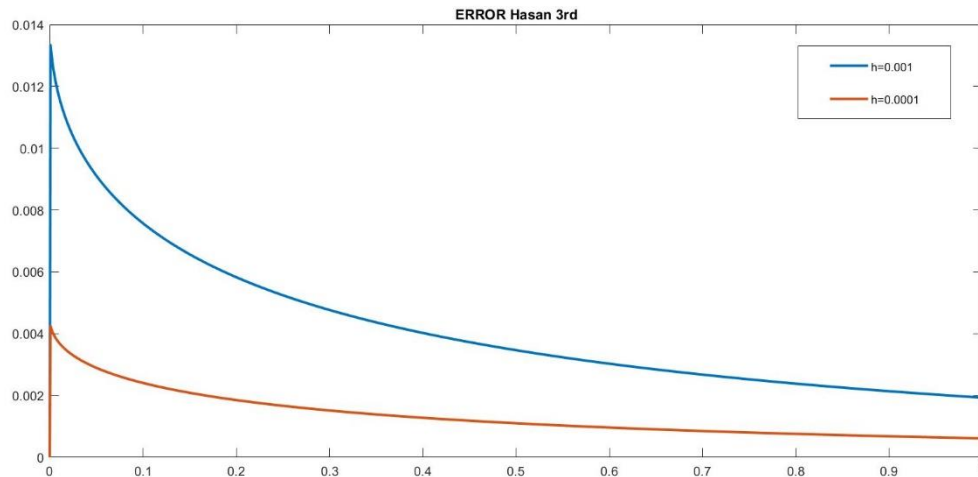
กำหนดให้ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$

จะได้



กราฟ (3.3) กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

จากกราฟจะเห็นว่าค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำของ y โดยค่าความคลาดเคลื่อนของค่าแม่นยำกับค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 0.00889 และ 0.00286 ตามลำดับ จากกราฟ (3.3) สามารถดูค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำของ y กับค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ดังนี้



กราฟ (3.4) กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

สมการโดยปริยายอันดับที่สามของ Rahaman

ให้ $x_1 = x_0 + ph$, $x_2 = x_0 + qh$ และ $x_3 = x_0 + h$; $p = \frac{4-\sqrt{6}}{10}$, $q = \frac{4+\sqrt{6}}{10}$, $w_1 = 16-\sqrt{6}$, $w_2 = 16+\sqrt{6}$, $w_3 = 4$ และใช้สมการประมาณค่าช่วงอันดับที่สี่ของลากรางจ์ จะได้สมการอินทิกรัลของ Rahaman et al. [4] คือ

$$\int_{x_0}^{x_3} y(x)dx = \frac{h}{36} [w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3] \quad (3.4)$$

ที่ f_1 , f_2 และ f_3 คือค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x_1 = x_0 + ph$, $x_2 = x_0 + qh$, $x_3 = x_0 + h$ ตามลำดับ จากสมการ (3.4) จะได้สมการโดยปริยายอันดับที่สามของ Rahaman et al. คือ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{36} [w_1 f(x_i + ph, y_i + p(y_{i+1} - y_i)) + w_2 f(x_i + qh, y_i + q(y_{i+1} - y_i)) + w_3 f(x_i + h, y_{i+1})]$$

ที่ $x_{i+1} = x_i + h$ และ $i = 0, 1, 2, \dots, M$

ตัวอย่าง 3.3 ให้

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = 1$$

จาก

$$y'(x) = f(x, y) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}$$

แทนค่าลงในสมการ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{36} \left[w_1 f(x_i + ph, y_i + p(y_{i+1} - y_i)) + w_2 f(x_i + qh, y_i + q(y_{i+1} - y_i)) + w_3 f(x_i + h, y_{i+1}) \right]$$

จะได้

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{36} \left[w_1 f(x_i + ph, y_i + p(y_{i+1} - y_i)) + w_2 f(x_i + qh, y_i + q(y_{i+1} - y_i)) + w_3 f(x_i + h, y_{i+1}) \right] \\ &= y_i - \frac{h}{36} \left[w_1 \left(\frac{(1-p)y_i + py_{i+1}}{\sqrt{x_i + ph}} \right) + w_2 \left(\frac{(1-q)y_i + qy_{i+1}}{\sqrt{x_i + qh}} \right) + w_3 \left(\frac{y_{i+1}}{\sqrt{x_i + h}} \right) \right] \\ &= y_i - \frac{h}{36} \left[\left(\frac{w_1(1-p)}{\sqrt{x_i + ph}} + \frac{w_1(1-q)}{\sqrt{x_i + qh}} \right) y_i + \left(\frac{w_1 p}{\sqrt{x_i + ph}} + \frac{w_2 q}{\sqrt{x_i + qh}} + \frac{w_3}{\sqrt{x_i + h}} \right) y_{i+1} \right] \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} L_3 &= 1 + \left(\frac{w_1 p}{\sqrt{x_i + ph}} + \frac{w_2 q}{\sqrt{x_i + qh}} + \frac{w_3}{\sqrt{x_i + h}} \right) \\ &= \frac{36\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + h} - w_1 ph\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + h} - w_2 qh\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + h}}{36\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + h}} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} R_3 &= 1 - \frac{h}{36} \left(\frac{w_1(1-p)}{\sqrt{x_i + ph}} + \frac{w_1(1-q)}{\sqrt{x_i + qh}} \right) \\ &= \frac{36\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh} - w_1 h(1-p)\sqrt{x_i + qh} - w_2 h(1-q)\sqrt{x_i + ph}}{36\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}} \end{aligned}$$

จะได้

$$L_3 y_{i+1} = R_3 y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{R_3}{L_3} y_i$$

ดังนั้น

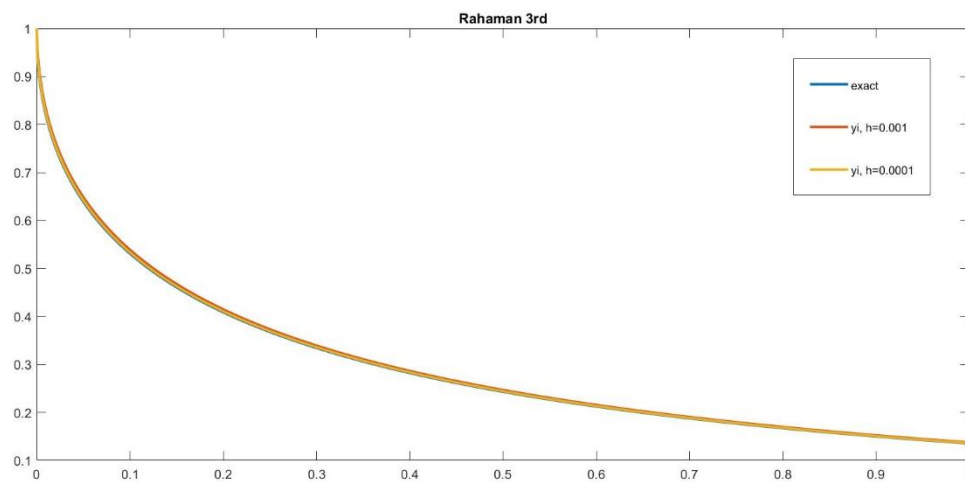
$$y_{i+1} = \frac{\sqrt{x_i + h} \left[36\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh} - w_1 h(1-p)\sqrt{x_i + qh} - w_2 h(1-q)\sqrt{x_i + ph} \right]}{36\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + h} - w_1 ph\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + h} - w_2 qh\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + h}}$$

ที่ $x_{i+1} = x_i + h$

และ $p = \frac{4-\sqrt{6}}{10}$ $q = \frac{4+\sqrt{6}}{10}$ $w_1 = 16-\sqrt{6}$ $w_2 = 16+\sqrt{6}$ $w_3 = 4$

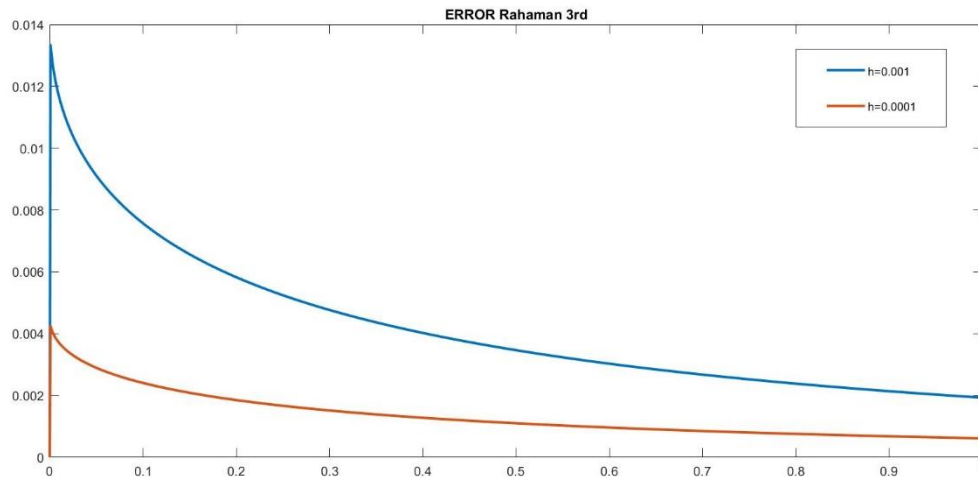
กำหนดให้ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$

จะได้



กราฟ (3.5) กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่าแน่นอน และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

จากกราฟจะเห็นว่าค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำของ y โดยค่าความคลาดเคลื่อนของค่าแม่นยำกับค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 0.00849 และ 0.00274 ตามลำดับ จากกราฟ (3.5) สามารถดูค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำของ y กับค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ดังนี้



กราฟ (3.6) กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

สมการโดยปริยายอันดับที่สี่ของ Rahaman

จากประมาณค่าช่วงฟังก์ชันพหุนามในรูปแบบลากรองจ์ดีกรี 4 จะได้สมการอินทิกรัลอันดับที่สี่ของ Rahaman et al.

$$\int_{x_0}^{x_4} y(x)dx = h[w_1f_1 + w_2f_2 + w_3f_3 + w_4f_4] \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \text{ที่ } x_1 &= x_0 + ph, & x_2 &= x_0 + qh, & x_3 &= x_0 + rh, & x_4 &= x_0 + h; & p &= 0.08858795951270394 \\ q &= 0.4094668644407347 & r &= 0.787659461760847 & w_1 &= 0.220462211176768 \\ w_2 &= 0.3881934688317074 & w_3 &= 0.32884431998006125 & w_4 &= 0.062500000000000022 \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3.5) จะได้สมการโดยปริยายอันดับที่สี่ของ Rahaman et al. คือ

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h[w_1f(x_i + ph, y_i + p(y_{i+1} - y_i)) + w_2f(x_i + qh, y_i + q(y_{i+1} - y_i)) \\ &\quad + w_3f(x_i + rh, y_i + r(y_{i+1} - y_i)) + w_4f(x_i + h, y_{i+1})] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4 ให้

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = 1$$

จาก

$$y'(x) = f(x, y) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}$$

แทนค่าลงในสมการ

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + h[& w_1 f(x_i + ph, y_i + p(y_{i+1} - y_i)) + w_2 f(x_i + qh, y_i + q(y_{i+1} - y_i)) \\ & + w_3 f(x_i + rh, y_i + r(y_{i+1} - y_i)) + w_4 f(x_i + h, y_{i+1})] \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h[w_1 f(x_i + ph, y_i + p(y_{i+1} - y_i)) + w_2 f(x_i + qh, y_i + q(y_{i+1} - y_i)) \\ &\quad + w_3 f(x_i + rh, y_i + r(y_{i+1} - y_i)) + w_4 f(x_i + h, y_{i+1})] \\ &= y_i - h \left[w_1 \left(\frac{(1-p)y_i + py_{i+1}}{\sqrt{x_i + ph}} \right) + w_2 \left(\frac{(1-q)y_i + qy_{i+1}}{\sqrt{x_i + qh}} \right) + w_3 \left(\frac{(1-r)y_i + ry_{i+1}}{\sqrt{x_i + rh}} \right) + w_4 \left(\frac{y_{i+1}}{\sqrt{x_i + h}} \right) \right] \\ &= y_i - h \left[\left(\frac{w_1(1-p)}{\sqrt{x_i + ph}} + \frac{w_2(1-q)}{\sqrt{x_i + qh}} + \frac{w_3(1-r)}{\sqrt{x_i + rh}} \right) y_i + \left(\frac{w_1 p}{\sqrt{x_i + ph}} + \frac{w_2 q}{\sqrt{x_i + qh}} + \frac{w_3 r}{\sqrt{x_i + rh}} + \frac{w_4}{\sqrt{x_i + h}} \right) y_{i+1} \right] \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} L_4 &= 1 + h \left(\frac{w_1 p}{\sqrt{x_i + ph}} + \frac{w_2 q}{\sqrt{x_i + qh}} + \frac{w_3 r}{\sqrt{x_i + rh}} + \frac{w_4}{\sqrt{x_i + h}} \right) \\ &\quad \frac{\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + rh}\sqrt{x_i + h} + w_1 ph\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + rh}\sqrt{x_i + h} + w_2 qh\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + rh}\sqrt{x_i + h} + w_3 rh\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + h} + w_4 h\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + rh}}{\sqrt{x_i + ph}\sqrt{x_i + qh}\sqrt{x_i + rh}\sqrt{x_i + h}} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 R_4 &= 1 - h \left(\frac{w_1(1-p)}{\sqrt{x_i+ph}} + \frac{w_2(1-q)}{\sqrt{x_i+qh}} + \frac{w_3(1-r)}{\sqrt{x_i+rh}} \right) \\
 &\quad \frac{\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh} - w_1h(1-p)\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh}}{\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh}} \\
 &= \frac{-w_2h(1-q)\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+rh} - w_3h(1-r)\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}}{\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh}}
 \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
 L_4 y_{i+1} &= R_4 y_i \\
 y_{i+1} &= \frac{R_4}{L_4} y_i
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$y_{i+1} = \sqrt{x_i+h} \left(\frac{\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh} - w_1h(1-p)\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh} - w_2h(1-q)\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+rh} - w_3h(1-r)\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}}{\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh}\sqrt{x_i+h} + w_1ph\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh}\sqrt{x_i+h} + w_2qh\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+rh}\sqrt{x_i+h} + w_3rh\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+h} + w_4h\sqrt{x_i+ph}\sqrt{x_i+qh}\sqrt{x_i+rh}} \right) y_i$$

ที่ $x_{i+1} = x_i + h$

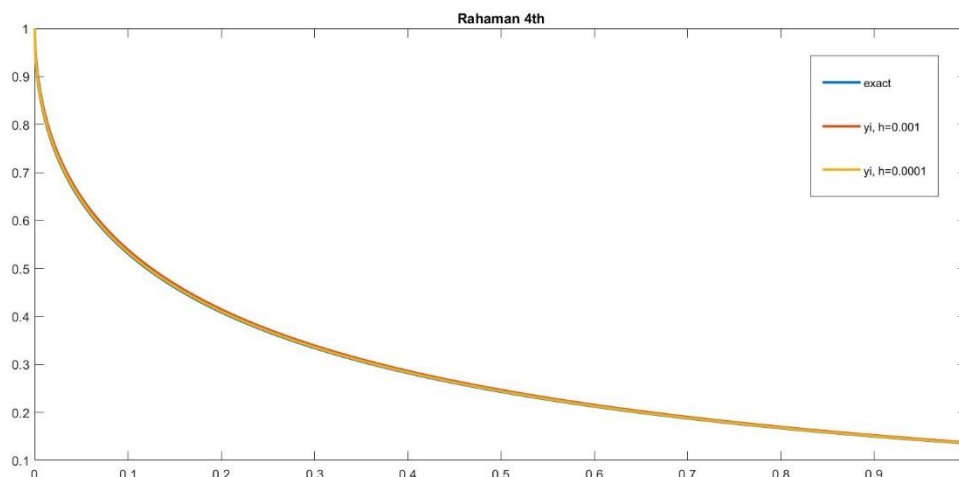
และ $p = 0.08858795951270394$ $q = 0.4094668644407347$ $r = 0.787659461760847$

$w_1 = 0.220462211176768$ $w_2 = 0.3881934688317074$ $w_3 = 0.32884431998006125$

$w_4 = 0.06250000000000022$

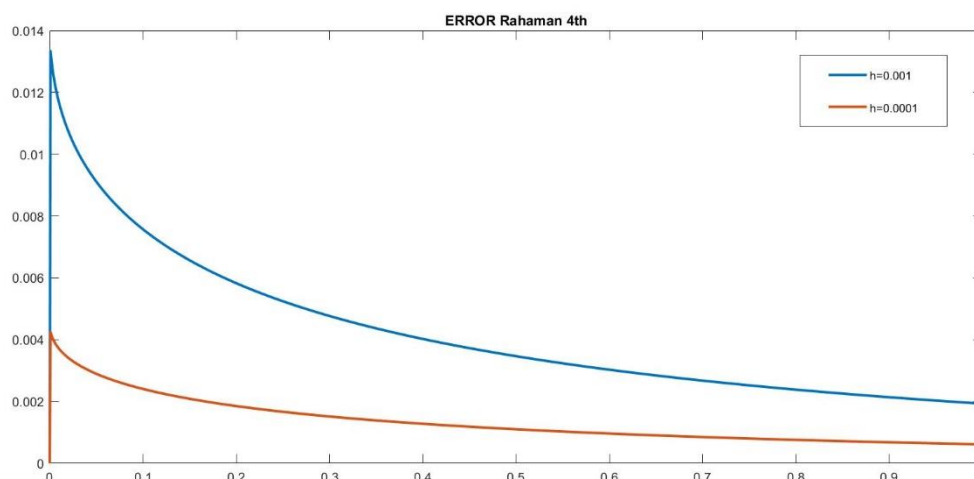
กำหนดให้ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$

จะได้



กราฟ (3.7) กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

จากกราฟจะเห็นว่าค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำของ y โดยค่าความคลาดเคลื่อนของค่าแม่นยำกับค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 0.00615 และ 0.00203 ตามลำดับ จากกราฟ (3.7) สามารถดูค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำของ y กับค่า y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ดังนี้



กราฟ (3.8) กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ ตามลำดับ

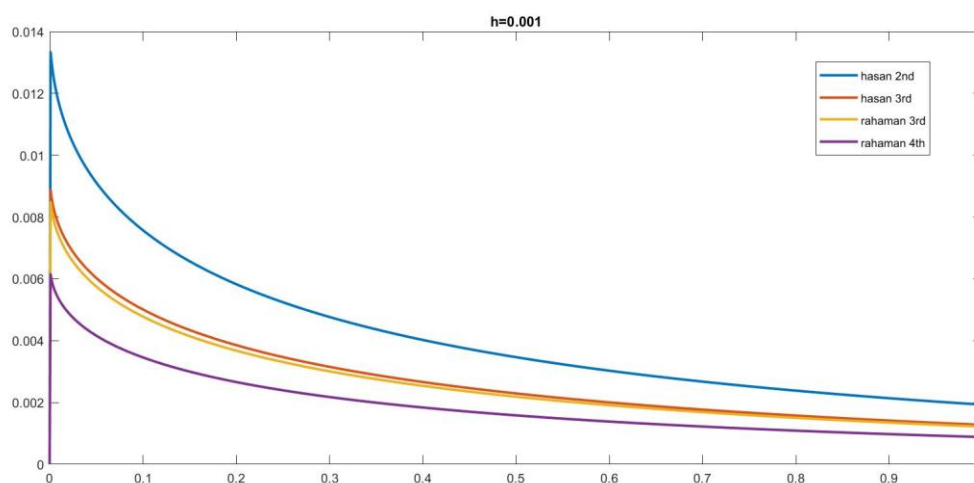
บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

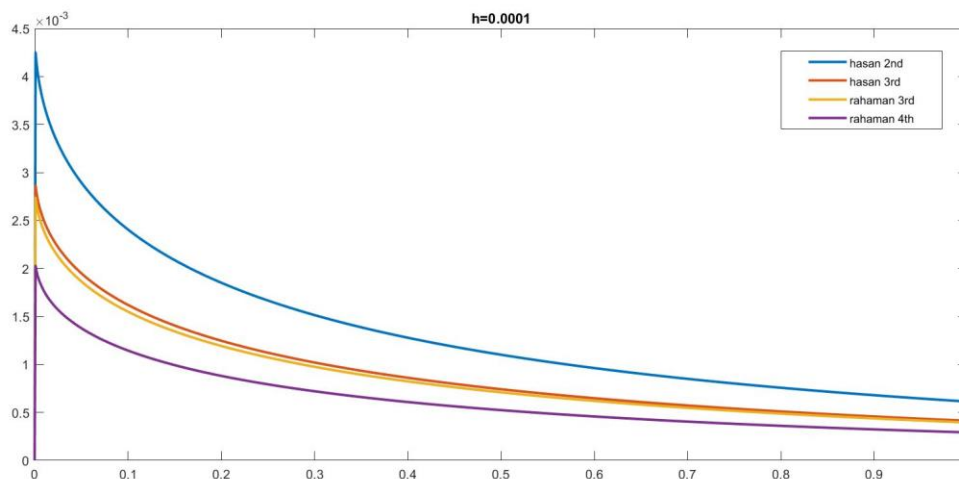
จากการศึกษาการประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ ด้วยวิธีการต่าง ๆ ที่ $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ซึ่งมีจุดซิงกูลาร์อยู่ที่ $x = x_0$ โดยปัญหาค่าเริ่มต้นที่นำมาเป็นตัวอย่างใช้ศึกษาในครั้งนี้ คือ

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = 1$$

จากการประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ด้วย $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ สามารถเห็นได้จากกราฟ (3.2), (3.4), (3.6) และ (3.8) ถ้าค่า h มีค่าลดลงจะทำให้การประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้น ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำมากขึ้น



กราฟ (4.1) กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.001$



กราฟ (4.2) กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y ที่ $h = 0.0001$

	Hasan 2nd	Hasan 3rd	Rahaman 3rd	Rahaman 4th
$h = 0.001$	0.01334	0.00889	0.00849	0.00615
$h = 0.0001$	0.00425	0.00286	0.00274	0.00203

ตาราง (4.3) ค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าแม่นยำ และค่าประมาณของ y

สุดท้ายนี้จากการประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งซิงกูลาร์ ด้วยวิธีการประมาณค่าของ Hasan et.al. อันดับที่สองและสาม และวิธีการของ Rahaman et.al. อันดับที่สาม และอันดับที่สี่ จากกราฟ (4.1) และ (4.2) จะเห็นได้ชัดว่าค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.001$ และ $h = 0.0001$ มีค่าลดลงตามวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่สามารถเห็นได้จากกราฟตามลำดับ

บรรณานุกรม

- [1] มรกต เก็บเจริญ. *วิธีเชิงตัวเลข*. มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ คณะวิทยาศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์, 2557
- [2] นิमित นิมานะ. *สมการเชิงอนุพันธ์*. มหาวิทยาลัยขอนแก่น คณะวิทยาศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์, 2562
- [3] วัลลภ เหมวงษ์. *ทฤษฎีจำนวน*. มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี คณะวิทยาศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์, 2556
- [4] M. Habibur Rahaman, M. Kamrul Hasan, M. Ayub Ali, M. Shamsul Alam. *Approximate Numerical Solution of Singular Integrals and Singular Initial Value Problems*. American Journal of Applied Mathematics. Vol. 8, No. 5, 2020, pp. 265-270.
- [5] M. Kamrul Hasan, M.Suzan Ahamed, B. M. Iqramul Haque, M. S. Alam. *A higher order implicit method for numerical solution of singular intial value problems*. Communication in computer and Information Science, 2017; 655: pp255-264
- [6] Md. Habibur Rahaman, M. Kamrul Hasan, Md. Ayub Ali, and M. S. Alam. *Implicit methods for Numerical Solution of singular Initial Value Problems*. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences (aop), 2020; pp 1-8 doi: 10.2478/AMNS.2020.2.00001

ภาคผนวก

Approximate numerical solution of linear first order singular initial value problems

Yanisa Kruaprasert Code : 620510556

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Morrakot Khebhareon

Department of Mathematics, Faculty of science, Chiangmai University



Abstract

In this independent study, we study the numerical method for approximate solution of linear first order singular initial value problems. The various numerical integrations of the improper integral are used to help finding the approximation of the initial value problems. The numerical results of the initial value problems are also presented. In this independence study, we try to solve linear first order singular initial value problems. We consider $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ having an initial singular point of $f(x, y)$ at $x = x_0$.

In order to solve this problem, we first finding the approximate the singular integral

$$I = \int_{x_0}^x f(x) dx \quad (a)$$

when $f(x)$ is singular method at $x = x_0$.

Hasan Second Order Implicit Formula

On using the second order Lagrange's interpolation

$$f(x) \cong \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2,$$

where $x_1 = x_0 + \frac{h}{3}$ and $x_2 = x_0 + h$. Then integrating $f(x, y)$ with respect to x from x_0 to x_2 , to obtained the approximate integral as follow:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \cong \frac{h}{4} (3f_1 + f_2). \quad (1)$$

Based on (1), We can derived second order implicit formula for solving initial value problem (a) as

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left[3f \left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{3} \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right],$$

where $i = 0, 1, 2, \dots, M$.

Hasan Third Order Implicit Formula

We can derived another implicit formula for solving initial value problem.

where $x_1 = x_0 + \frac{h}{6}$, $x_2 = x_0 + \frac{4h}{6}$ and $x_3 = x_0 + h$ is coordinate of point in the range x_0 to x_3 . Then we have

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \cong \frac{h}{10} (4f_1 + 5f_2 + f_3) \quad (2)$$

Based on (2), we can derived the third order implicit formula for solving singular initial value problems having singularity at $x = x_0$ as

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{10} \left[4f \left(x_i + \frac{h}{6}, y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) + 5f \left(x_i + \frac{4h}{6}, y_i + 4 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

Where $x_{i+1} = x_i + h$ and $i = 0, 1, 2, \dots, M$

Rahaman Third Order Implicit Formula

Another formula that we can derived $x_1 = x_0 + ph$, $x_2 = x_0 + qh$ and $x_3 = x_0 + h$; $p = \frac{4-\sqrt{6}}{10}$, $q = \frac{4+\sqrt{6}}{10}$
 $w_1 = 16 - \sqrt{6}$, $w_2 = 16 + \sqrt{6}$, $w_3 = 4$ and using fourth order Lagrange's interpolation formula, Rahaman et al. has been derive an integral formula as

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \cong \frac{h}{10} (4f_1 + 5f_2 + f_3) \quad (3)$$

Based on formula (3), we can derived the third order implicit formula for solving singular initial value problems having singularity at $x = x_0$ as

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{10} \left[4f \left(x_i + \frac{h}{6}, y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) + 5f \left(x_i + \frac{4h}{6}, y_i + 4 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{6} \right) \right) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

Where $x_{i+1} = x_i + h$ and $i = 0, 1, 2, \dots, M$

Rahaman Fourth Order Implicit Formula

Based on the fifth order Lagrange's interpolation formula, we derived the forth order integral formula as

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x) dx \cong h [w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3 + w_4 f_4] \quad (4)$$

Choosing $x_1 = x_0 + ph$, $x_2 = x_0 + qh$, $x_3 = x_0 + rh$, $x_4 = x_0 + h$; $p = 0.08858795951270394$
 $q = 0.409466864407347$, $r = 0.787659461760847$, $w_1 = 0.220462211176768$, $w_2 = 0.3881934688317074$
 $w_3 = 0.32884431998006125$, $w_4 = 0.06250000000000022$

Based on formular (4), we can derived the forth order implicit formula as

$$y_{i+1} = y_i + h [w_1 f(x_i + ph, y_i + p(y_{i+1} - y_i)) + w_2 f(x_i + qh, y_i + q(y_{i+1} - y_i)) + w_3 f(x_i + rh, y_i + r(y_{i+1} - y_i)) + w_4 f(x_i + h, y_{i+1})]$$

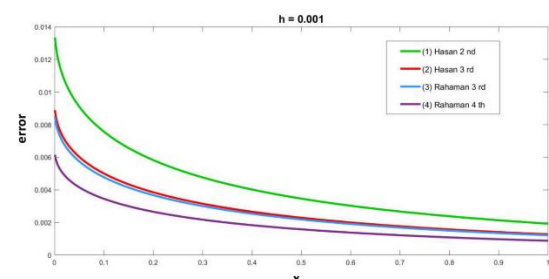
Where $x_{i+1} = x_i + h$ and $i = 0, 1, 2, \dots, M$

Example

Consider the first order linear singular initial value problems as

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = 1$$

The exact solution of the equation is obtained as $e^{-2\sqrt{x}}$. We will solve the initial value problems by Hasan's and Rahaman's methods. We plot the graph that obtains the error between the exact solution and (1) second-order Hasan equation, (2) third-order Hasan equation, (3) third-order Rahaman equation, and (4) fourth-order Rahaman plotted in Figure for $h = 0.001$



Reference

- [1] M. Habibur Rahaman, M. Kamrul Hasan, M. Ayub Ali, M. Shamsul Alam. Approximate Numerical Solution of Singular Integrals and Singular Initial Value Problems. American Journal of Applied Mathematics. Vol. 8, No. 5, 2020, pp. 265-270.
- [2] M. Kamrul Hasan, M.Suzan Ahamed, B. M. Iqramul Haque, M. S. Alam. A higher order implicit method for numerical solution of singular initial value problems. Communication in computer and Information Science, 2017; 655: pp255-264
- [3] Md. Habibur Rahaman, M. Kamrul Hasan, Md. Ayub Ali, and M. S. Alam. Implicit methods for Numerical Solution of singular Initial Value Problems. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences (aop), 2020; pp 1-8 doi: 10.2478/AMNS.2020.2.00001