

พลวัตของแบบจำลองการแข่งขันลอตกา-โวลเทอร์รา
(Dynamics of Lotka-Volterra competition model)

นายศุภวิชญ์ แต่งทองคำ
รหัสนักศึกษา 620510537

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

พลวัตของแบบจำลองการแข่งขันลอตกา-โวลเทอร์รา
(Dynamics of Lotka-Volterra competition model)

นายศุภวิชญ์ แต่งทองคำ
รหัสนักศึกษา 620510537

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

พลวัตของแบบจำลองการแข่งขันลอตกา-โวลเทอร์รา
(Dynamics of Lotka-Volterra competition model)

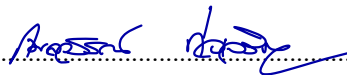
ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ :



..... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชีรนุช สืบเจริญ)



..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กมลวรรณ ก่อเจริญ)

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 การค้นคว้าอิสระ (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้า ประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชีรณัฐ สืบเจริญ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ช่วยให้คำปรึกษา ให้คำแนะนำและอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ รวมถึงตรวจสอบ พิจารณา แก้ไข จนงานค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสิ้นสมบูรณ์ได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กมลวรรณ ก่อเจริญ อาจารย์กรรมการการสอบงานค้นคว้าอิสระ ที่ช่วยให้ข้อเสนอแนะ ตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไข งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้ดียิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่านที่ให้คำอบรมสั่งสอน และความรู้ทั้งในและนอกตำราเรียนให้แก่ข้าพเจ้าที่เป็นประโยชน์ และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้

ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ สติปัญญา กำลังทรัพย์อย่างสม่ำเสมอตลอดจนการทำงานค้นคว้าอิสระตั้งแต่เริ่มต้นจนจบสมบูรณ์

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้องภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ และให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้สำเร็จด้วยดี

นายศุภวิชญ์ แดงทองคำ

หัวข้อ (ภาษาไทย) พลวัตของแบบจำลองการแข่งขันลอตคา-โวลเทอร์รา

(ภาษาอังกฤษ) Dynamics of Lotka-Volterra competition model

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นายศุภวิชญ์ แดงทองคำ รหัสนักศึกษา 620510537

ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อีรินุช สืบเจริญ

ชื่อกรรมการสอบ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กมลวรรณ ก่อเจริญ

บทคัดย่อ

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราพิจารณาแบบจำลองการแข่งขัน ลอตคา-โวลเทอร์รา ของประชากรสองสายพันธุ์ เราตรวจสอบเสถียรภาพของจุดสมดุลทั้งหมดโดยการวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้น เราได้เงื่อนไขที่เพียงพอในพจน์ของพารามิเตอร์ของแบบจำลองเพื่อรับประกันการมีเสถียรภาพของจุดสมดุล นอกจากนี้ยังมีการจำลองวิถีเชิงตัวเลขเพื่อแสดงผลสรุปทางคณิตศาสตร์

Abstract

In this independent study, we consider Lotka-Volterra two-species competition models. We investigate the stability of all equilibrium points by linear stability analysis. We obtain sufficient conditions in terms of parameters of the models to guarantee stability of the equilibrium points. Furthermore, numerical simulations are given to illustrate the mathematical conclusions.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
สารบัญ	ค
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน	2
บทที่ 3 ผลการศึกษา	13
3.1 การดัดแปลงโมเดลแบบจำลองการแข่งขันของ ลอตกา-โวลเทอร์รา และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง	13
3.2 การดัดแปลงโมเดลแบบจำลองการแข่งขันของ ลอตกา-โวลเทอร์รา ภายใต้สมมติอื่น	19
บทที่ 4	29
สรุปผลการศึกษา	29
เอกสารอ้างอิง	30

บทที่ 1

บทนำ

(Introduction)

สิ่งมีชีวิตอาศัยอยู่ในระบบนิเวศ ซึ่งเป็นกลุ่มของประชากรอย่างน้อยสองสปีชีส์ที่แตกต่างกันซึ่งมีปฏิสัมพันธ์กันทั้งทางตรงหรือทางอ้อม ในเชิงนิเวศวิทยา การแข่งขันคือปฏิสัมพันธ์ของสปีชีส์ที่แข่งขันกันเพื่อให้ได้ทรัพยากร โดยที่ทรัพยากรเหล่านี้มีจำกัด ตัวอย่างหนึ่งของการแข่งขันคือการแข่งขันของเสือดาวและสิงโตในการล่าเหยื่อ หรือการแข่งขันกันระหว่างพืชหลายชนิดที่ดูดซับสารอาหารจากดิน การแข่งขันระหว่างกันได้ถูกสร้างเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าแบบจำลองการแข่งขัน ลอตกา-โวลเทอร์รา

$$\frac{dz_1}{dt} = \left(\begin{array}{c} \text{การเพิ่มขึ้นของจำนวน} \\ \text{สปีชีส์แรก } Z_1 \text{ โดยไม่} \\ \text{เกี่ยวข้องกับจำนวนสปีชีส์ที่สอง } Z_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{จำนวน } Z_1 \text{ ลดลงจากการแข่งขัน} \\ \text{ของสปีชีส์แรก } Z_1 \text{ และสปีชีส์ที่สอง } Z_2 \end{array} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \left(\begin{array}{c} \text{การเพิ่มขึ้นของจำนวน} \\ \text{สปีชีส์แรก } Z_1 \text{ โดยไม่} \\ \text{เกี่ยวข้องกับจำนวนสปีชีส์ที่สอง } Z_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{จำนวน } Z_2 \text{ ลดลงจากการแข่งขัน} \\ \text{ของสปีชีส์แรก } Z_1 \text{ และสปีชีส์ที่สอง } Z_2 \end{array} \right) \quad (1.2)$$

โดยที่ z_1 และ z_2 แทนจำนวนประชากรของสปีชีส์แรก และ สปีชีส์ที่สองตามลำดับ

ในที่นี้เราจะนำเสนอการดัดแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการแข่งขันที่แสดงในสมการ (1.1) - (1.2)

ดังนั้นในการค้นคว้าอิสระนี้จึงเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการปรับเปลี่ยนโมเดลและประยุกต์ใช้แบบจำลองการแข่งขันของ ลอตกา-โวลเทอร์รา

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ระบบเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ จุดสมดุล ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ การวิเคราะห์จุดสมดุลของระบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น การทำให้เป็นเชิงเส้น

ในบทที่ 3 การปรับเปลี่ยนโมเดลและประยุกต์ใช้แบบจำลองการแข่งขันของ ลอตกา-โวลเทอร์รา และ ได้ศึกษาทฤษฎีบทการวิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุลพร้อมยกตัวอย่างการจำลองเชิงตัวเลข

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

(Preliminaries)

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือมากกว่า

เราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \quad (2.1)$$

ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น โดยที่ $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t

ข้อสังเกตของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นมีลักษณะสำคัญดังนี้

1. เลขชี้กำลังของตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีความเป็นหนึ่ง ไม่มีพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตาม
2. สัมประสิทธิ์ $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้นหรือตัวแปรอิสระ t

เราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่าสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

2.2 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

รูปทั่วไปสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

เมื่อ $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ ตัวแปร $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นตัวแปรตาม และตัวแปร t เป็นตัวแปรต้นหรือตัวหรือตัวแปรอิสระ โดยทั่วไปเราสามารถเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้เสมอ โดยการเลือกใช้ตัวแปรที่เหมาะสม

เราจะเรียกสมการที่ (2.2) ว่าระบบไม่อิสระ (nonautonomous system) ถ้าฟังก์ชันทางซ้ายมือของสมการมีพจน์ของตัวแปรต้น t ปรากฏ

และจะเรียกว่า **ระบบอิสระ (autonomous system)** ถ้าฟังก์ชันทางซ้ายมือของสมการ (2.2) ไม่มีพจน์ของตัวแปรต้น t ปรากฏ จะมีรูปแบบทั่วไปอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\tag{2.3}$$

เมื่อ a, b, c และ d เป็นค่าคงตัว

ระบบสมการ (2.3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

$$\text{เมื่อ } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ และ } Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ และ } \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์และจะได้ว่าระบบสมการ (2.3) เป็นระบบสมการ 2 มิติ

ในการทำงานเดียวกันสำหรับระบบสมการที่มีตัวแปร n ตัว คือ $y_1, y_2, \dots, y_n$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n\end{aligned}$$

จะสามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ต่อไปเราจะนิยามจุดสมดุล (equilibrium point) ของระบบสมการเชิงเส้น (2.3)

นิยาม 2.2.1 จะเรียก $Y = (x^*, y^*)$ ว่าเป็นจุดสมดุลของระบบสมการ (2.3) ก็ต่อเมื่อ

$$AY^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{นั่นคือ} \quad \begin{cases} ax^* + by^* = 0 \\ cx^* + dy^* = 0 \end{cases}$$

และถ้า $\det A \neq 0$ แล้วระบบสมการ (2.3) นี้จะมี $(x^*, y^*) = (0, 0)$ เป็นจุดสมดุลเพียงจุดเดียว หรือจะกล่าวได้ว่า

$x(t) = 0$ และ $y(t) = 0$ เป็นผลเฉลยสมดุลจากระบบสมการ จะได้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ ให้

(x, y) เป็นจุดบนเส้นทางในระบบสมการ ถ้า (x^*, y^*) เป็นจุดที่ทำให้ $f(x, y)$ และ $g(x, y)$ มีค่าเป็น 0 พร้อมกันทั้งคู่ แล้วความชันที่จุด (x^*, y^*) จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

นิยาม 2.2.2 กำหนดเมทริกซ์ A จะเรียก λ ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A ถ้ามีเวกเตอร์ $V = (x, y) \neq \vec{0}$ ที่ทำให้

$$AV = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

เรียก V ว่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ ค่าลักษณะเฉพาะ λ

แนววิถีของผลเฉลย สามารถบ่งบอกจุดสมดุลที่เสถียรและไม่เสถียร นั่นคือ จุดสมดุลที่เสถียร แนววิถีของผลเฉลยจะเข้าสู่จุดสมดุลเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น และจุดสมดุลที่ไม่เสถียร แนววิถีของผลเฉลยจะลู่ออก

นิยาม 2.2.3 ให้จุด x^* เป็นจุดสมดุลของระบบสมการ $\dot{x} = f(x)$ แล้ว x^* จะเรียกว่ามีเสถียรภาพแบบ

1. เสถียรภาพ ถ้าสำหรับทุกๆ จำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ซึ่ง $|x(t_0) - x^*| < \delta$ ที่ทำให้ $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $t > t_0$
2. เสถียรภาพกำกับ ถ้า x^* มีเสถียรภาพและ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$
3. ไม่เสถียร ถ้า x^* ไม่มีเสถียรภาพ

2.3 การวิเคราะห์จุดสมดุลของระบบเชิงเส้น

ค่าลักษณะเฉพาะ λ เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะ ที่ได้มาจากการกระจายสมการ

$\det(A - \lambda I) = 0$ สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริง ค่าลักษณะเฉพาะของ A จะมีค่าเป็นไปได้เพียง 3 กรณี

1. ค่าลักษณะเฉพาะทุกค่าเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน
2. ค่าลักษณะเฉพาะทุกค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน
3. ค่าลักษณะเฉพาะทุกค่าเป็นจำนวนจริงซ้ำกัน

เครื่องหมายหรือลักษณะของค่าลักษณะเฉพาะ มีบทบาทสำคัญในการบ่งบอกพฤติกรรมของผลเฉลย อย่างเช่น ถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นลบ ผลเฉลยจะเข้าสู่จุดสมดุลเมื่อ t เพิ่มขึ้น นั่นคือเป็นจุดสมดุลเสถียรหรือเป็นจุดสมดุลเสถียรภาพกำกับ และลู่ออกจากจุดสมดุลถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวก นั่นคือเป็นจุดสมดุลไม่เสถียร หรือสามารถจำแนกชนิดของจุดสมดุลตามค่าลักษณะเฉพาะได้ดังนี้

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงที่มีเครื่องหมายต่างกัน (เป็นบวกหนึ่งค่าเป็นลบหนึ่งค่า) จุดสมดุลจะเป็นจุดอานม้า ซึ่งไม่เสถียรเสมอเพราะแนววิถีส่วนใหญ่พุ่งออกเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น

ถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันแต่มีเครื่องหมายเดียวกัน จุดสมดุลนี้เรียก จุดโหนด ถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวกทั้งคู่แนววิถีจะพุ่งออกเมื่อ t เพิ่มขึ้น และถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นลบทั้งคู่จะได้แนววิถีคล้ายกันแต่แนววิถีจะพุ่งเข้าเมื่อ t เพิ่มขึ้น โหนดจะเป็นเสถียรภาพกำกับถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นค่าลบทั้งคู่ แต่จะไม่เสถียรถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นค่าบวกทั้งคู่

ถ้าค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าจริงเป็นลบ เรียกจุดสมดุลนี้ว่า จุดก้นหอย โดยแนววิถีแต่ละแนวจะเวียนเป็นก้นหอยเข้าสู่จุดกำเนิด ซึ่งเป็นจุดสมดุลที่เสถียรกำกับเนื่องจากแนววิถีมุ่งเข้าสู่จุดสมดุลขณะที่ t

เพิ่มขึ้น หากค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าจริงเป็นบวก แนววิถีจะพุ่งออกจากจุดสมดุล จุดสมดุลจะเป็นไม่เสถียร เนื่องจากแนววิถีพุ่งออกเมื่อ t มีค่ามากขึ้น

หากค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าจริงเป็นศูนย์ แนววิถีจะไม่พุ่งเข้าหรือออกจากจุดสมดุล แต่จะวนรอบจุดสมดุล ในกรณีนี้จะเรียกจุดสมดุลว่า จุดศูนย์กลาง ซึ่งจะเป็นจุดที่เสถียร

ถ้าค่าลักษณะเฉพาะเท่ากัน จุดสมดุลลักษณะนี้จะเรียกว่า อิมพروبเพอร์โนด จะเป็นจุดแบบเสถียรภาพกำกับหรือไม่เสถียรภาพขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของค่าลักษณะเฉพาะ

2.4 ระบายผลบวกแนวทแยง ดีเทอร์มิแนนต์

เราจะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะของระบบสมการเชิงเส้น $\dot{X} = AX$ ใน 2 มิติ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

จะเกี่ยวข้องกับการจำแนกเสถียรภาพและประเภทของจุดสมดุล

จากระบบสมการจะมีจุด $(0,0)$ เป็นจุดสมดุลเสมอ และถ้า A มี $\det(A) \neq 0$ แล้วระบบสมการจะมีจุด $(0,0)$

เป็นจุดสมดุลเพียงจุดเดียว

ฉะนั้นเราจะนำสมการลักษณะเฉพาะของ A กลับมาพิจารณาซึ่งมีสมการเป็น

$$p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

โดยที่ $T = a + d$ และ $D = ad - bc$ เป็นผลบวกในแนวทแยงและดีเทอร์มิแนนต์ของ A ตามลำดับ
รากของสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \text{ และ } \lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

หมายเหตุ $\lambda_1 + \lambda_2 = T$ และ $\lambda_1 \lambda_2 = D$

พิจารณารูปบนระนาบ TD ให้แกน x แทนผลบวกในแนวทแยงของ A และแกน y แทนดีเทอร์มิแนนต์ของ A ดังนั้นแต่ละจุด (T, D) บนระนาบจะเป็นการระบุค่าของผลบวกในแนวทแยงและดีเทอร์มิแนนต์ของ A ค่าของ $T^2 - 4D$ จะใช้แบ่งประเภทของค่าลักษณะเฉพาะได้ดังนี้

ถ้า $T^2 - 4D < 0$ จะได้ค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยมีส่วนจริงของค่าลักษณะเฉพาะคือ $\frac{T}{2}$ แบ่ง
ออกเป็น 3 กรณีคือ

1. $\text{Re}(\lambda) = \frac{T}{2} > 0$ แล้ว $T > 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็น จุดก้นหอย แบบไม่เสถียร
2. $\text{Re}(\lambda) = \frac{T}{2} = 0$ แล้ว $T = 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็น จุดศูนย์กลาง แบบเสถียร
3. $\text{Re}(\lambda) = \frac{T}{2} < 0$ แล้ว $T < 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็น จุดก้นหอย แบบเสถียรภาพกำกับ

ถ้า $T^2 - 4D > 0$ จะได้ค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน แบ่งออกเป็น 3 กรณี

1. $D < 0$ จะได้ $\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$ และ $\lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$ แล้ว $\lambda_1 > 0$ และ $\lambda_2 < 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง แบบไม่เสถียร
2. $D > 0, T > 0$ จะได้ $T > \sqrt{T^2 - 4D}$ แล้ว $\lambda_1 > 0$ และ $\lambda_2 > 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็น อิมพروبเพอร์โหนด แบบไม่เสถียร
3. $D > 0, T < 0$ จะได้ $|T| > \sqrt{T^2 - 4D}$ แล้ว $\lambda_1 < 0$ และ $\lambda_2 < 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็น อิมพروبเพอร์โหนด แบบเสถียรภาพกำกับ

ถ้า $T^2 - 4D = 0$ จะได้กราฟบนระนาบ TD เป็นรูปพาราโบลาหงาย และมีค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง

เท่ากัน $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{T}{2}$ แบ่งเป็น 2 กรณีคือ

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{T}{2} > 0$ แล้ว $T > 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็นแบบไม่เสถียร
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{T}{2} < 0$ แล้ว $T < 0$ ดังนั้นจุดสมดุล $(0,0)$ เป็นแบบเสถียรภาพกำกับ

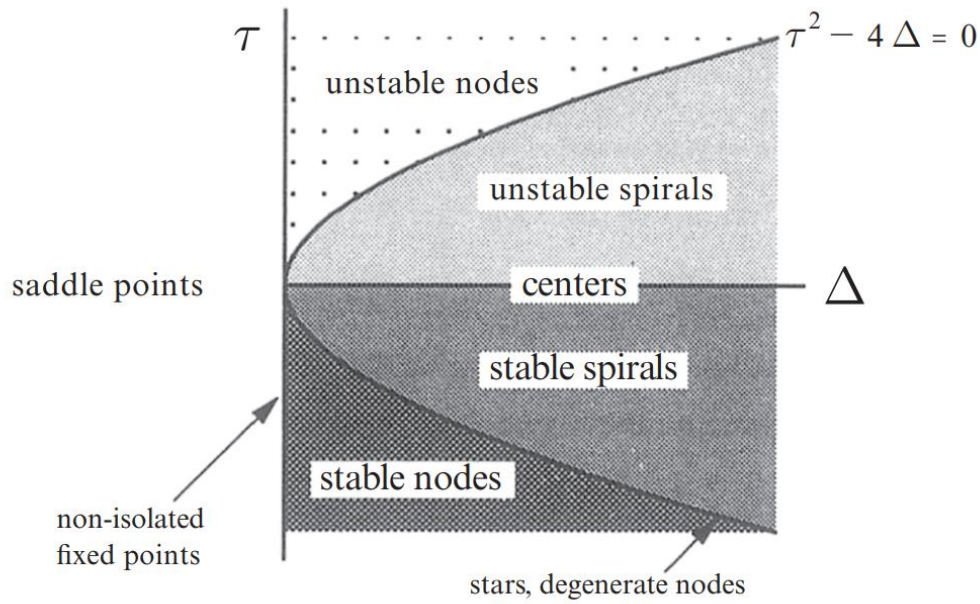
หมายเหตุ ถ้า $D = 0$ แล้วค่าลักษณะเฉพาะอย่างน้อยหนึ่งตัวมีค่าเป็นศูนย์ และมีจุดสมดุลมากกว่าหนึ่งจุด

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ว่าจุดสมดุลทุกจุดอยู่บนเส้นตรง $ax + by = 0$ เป็นต้น ถ้า $A = 0$ แล้วทุกจุดบน

ระนาบเป็นจุดสมดุล

จากการวิเคราะห์ข้างต้นเราจะได้กราฟที่สามารถจำแนก ประเภทของจุดสมดุลของระบบสมการเชิงเส้น

$\dot{X} = AX$ ใน 2 มิติ บนระนาบ TD ได้ดังรูป



รูปที่ 1: ระนาบผลบวกแนวทแยง ดีเทอร์มิแนนต์ (แหล่งที่มา : Nonlinear Dynamics and Chaos)

2.5 การทำให้เป็นเชิงเส้น

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, y) \\ \dot{y}(t) &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.4}$$

สมมติให้ (x^*, y^*) เป็นจุดสมดุลของสมการ (2.4) และจะได้ว่า

$$f(x^*, y^*) = 0 \text{ และ } g(x^*, y^*) = 0$$

กำหนดให้

$$u = x - x^* \text{ และ } v = y - y^*$$

ซึ่งเมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x^*, y^*) แล้ว (u, v) จะเข้าใกล้ $(0, 0)$ จะเขียนระบบสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{d(x-x^*)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, y) = f(x^* + u, y^* + v) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(y-y^*)}{dt} = \frac{dy}{dt} = g(x, y) = g(x^* + u, y^* + v)\end{aligned}$$

พิจารณอนุพันธ์ของ u จะได้

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \dot{x} \\ &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + O(u^2, v^2, uv) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + O(u^2, v^2, uv)\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้อนุพันธ์ของ v ดังนี้

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) + O(u^2, v^2, uv)$$

โดย $O(u^2, v^2, uv)$ แทนค่าคลาดเคลื่อนในเทอมกำลังสอง ซึ่งจากการกำหนดให้ u และ v มีค่าน้อยมาก เทอมกำลังสองก็จะมีค่าน้อยมากเช่นกัน เราจึงสามารถประมาณค่าระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นในตัวแปรของ u และ v และจะเรียกเมทริกซ์

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

ว่าเมทริกซ์จาโคเบียน

เราจะใช้ระบบสมการเชิงเส้นนี้ในการศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบไม่เชิงเส้นใกล้จุดสมดุล (x^*, y^*) จะเห็นว่าค่าที่ใช้คืออนุพันธ์ของ f และ g ที่จุด (x^*, y^*) เท่านั้นโดยไม่ต้องเปลี่ยนตัวแปรก็ได้

2.6 การวิเคราะห์จุดสมดุลของระบบไม่เชิงเส้น

การประมาณระบบสมการไม่เชิงเส้นด้วยระบบที่ทำให้เป็นเชิงเส้นใกล้ ๆ จุดสมดุล ให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกันอย่างน้อยในช่วงเวลาสั้นเวลาหนึ่ง สำหรับระบบส่วนใหญ่ ข้อมูลที่ได้จากการศึกษาระบบที่ทำให้เป็นเชิงเส้นเพียงพอที่จะบอกพฤติกรรมในระยะยาวของผลเฉลยของระบบไม่เชิงเส้นใกล้กับจุดสมดุลนั้นได้

พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}$$

ที่มี (x^*, y^*) เป็นจุดสมดุล และ

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์จาโคเบียนที่จุด (x_0, y_0) ระบบสมการไม่เชิงเส้นที่สมนัยกับระบบนี้คือ

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

มี $(u, v) = (0, 0)$ เป็นจุดสมดุล ถ้า λ_1, λ_2 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ J แล้วจะได้ข้อสรุปการจำแนกชนิดของจุดสมดุลเมื่อเริ่มต้นที่ใกล้ ๆ จุดนี้ดังตาราง

ค่าลักษณะเฉพาะ λ_1, λ_2	ระบบเชิงเส้น		ระบบไม่เชิงเส้น	
	ชนิดของจุดวิกฤต	เสถียรภาพ	ชนิดของจุดวิกฤต	เสถียรภาพ
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	อิมพروبเพอร์โหนด	ไม่เสถียร	อิมพروبเพอร์โหนด	ไม่เสถียร
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	อิมพروبเพอร์โหนด	เสถียรภาพกำกับ	อิมพروبเพอร์โหนด	เสถียรภาพกำกับ
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	อานม้า	ไม่เสถียร	อานม้า	ไม่เสถียร
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	พروبเพอร์โหนด หรืออิมพروبเพอร์ โหนด	ไม่เสถียร	พروبเพอร์โหนดหรือ อิมพروبเพอร์โหนด หรือ จุดก้นหอย	ไม่เสถียร
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	พروبเพอร์โหนด หรืออิมพروبเพอร์ โหนด	เสถียรภาพกำกับ	พروبเพอร์โหนด หรืออิมพروبเพอร์ โหนดหรือ จุดก้นหอย	เสถียรภาพกำกับ
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i$				
$\alpha > 0$	จุดก้นหอย	ไม่เสถียร	จุดก้นหอย	ไม่เสถียร
$\alpha < 0$	จุดก้นหอย	เสถียรภาพกำกับ	จุดก้นหอย	เสถียรภาพกำกับ
$\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$	จุดศูนย์กลาง	เสถียร	จุดศูนย์กลาง หรือจุดก้นหอย	ไม่สามารถกำหนด ได้

ตารางที่ 2.1 จุดวิกฤตในระบบเชิงเส้นและระบบไม่เชิงเส้น

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

3.1 การดัดแปลงแบบจำลองการแข่งขันของ Lotka-Volterra และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

จากบทนำ การดัดแปลงแบบจำลองการแข่งขันถูกสร้างภายใต้สมมติฐานดังต่อไปนี้

1. ในระบบนิเวศมีเพียงสองสายพันธุ์ที่แตกต่างกันเท่านั้นที่แข่งขันกันในการใช้ทรัพยากรธรรมชาติ
2. ไม่มีการอพยพของสายพันธุ์
3. การเติบโตของสปีชีส์แรกเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล ในขณะที่สปีชีส์ที่สองมีการเติบโตเป็นแบบโลจิสติก
4. อัตราการลดลงของทั้งสองสปีชีส์ จากการแข่งขันระหว่างกันถูกสมมติให้เป็นอัตราคงตัว

จากสมมติฐานจะได้แบบจำลองการแข่งขันของสองสายพันธุ์ดังนี้

$$\frac{dz_1}{dt} = r_1 z_1 - b_1 z_1 z_2 \quad (3.1)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = r_2 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{K_2} \right) - b_2 z_1 z_2 \quad (3.2)$$

เมื่อพารามิเตอร์ r_1, r_2, K_2, b_1, b_2 เป็นค่าคงที่บวก ซึ่ง

z_1	แทน	จำนวนสปีชีส์แรก
z_2	แทน	จำนวนสปีชีส์ที่สอง
r_1, r_2	แทน	อัตราการเจริญเติบโต (growth rate) ของ z_1 และ z_2 ตามลำดับ
K_2	แทน	จำนวนประชากรที่เป็นไปได้มากที่สุด (carrying capacity) ของสปีชีส์ที่สอง
b_1, b_2	แทน	อัตราการลดลงจากการแข่งขันของ z_1 และ z_2 ตามลำดับ

ต่อไปจะหาจุดสมดุลของแบบจำลองสมการ (3.1)-(3.2) โดยที่จุดสมดุลหาได้จากการแก้ระบบสมการ

$$z_1(r_1 - b_1 z_2) = 0 \quad (3.3)$$

$$r_2 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{K_2} \right) - b_2 z_1 z_2 = 0 \quad (3.4)$$

จากสมการ (3.3) จะได้ว่า $z_1 = 0$ หรือ $z_2 = \frac{r_1}{b_1}$

แทน $z_1 = 0$ ลงในสมการ (3.4) จะได้

$$r_2 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{K_2}\right) - b_2(0) z_2 = 0$$

$$r_2 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{K_2}\right) = 0$$

$$z_2 = 0, K_2$$

แทน $z_2 = \frac{r_1}{b_1}$ ลงในสมการ (3.4) จะได้

$$\begin{aligned} z_1 &= r_2 \left(\frac{r_1}{b_1} \right) \left[1 - \frac{\left(\frac{r_1}{b_1} \right)}{K_2} \right] \left(\frac{b_1}{r_1 b_2} \right) \\ &= \frac{r_2}{b_2} \left[1 - \frac{r_1}{b_1 K_2} \right] \\ &= \frac{r_2}{b_2} \left[\frac{K_2 b_1 - r_1}{b_1 K_1} \right] \\ &= \frac{r_2}{b_2 b_1 K_2} (b_1 K_2 - r_1) \end{aligned}$$

จากการแก้ระบบสมการ (3.3) และ (3.4) ข้างต้นพบว่าแบบจำลองมีจุดสมดุลทั้งหมด 3 จุดดังนี้

1. จุด $P_1(z_1, z_2) = (0, 0)$ จะเรียกว่าจุดสมดุลการสูญพันธุ์
2. จุด $P_2(z_1, z_2) = \left(\frac{r_2}{b_2 b_1 K_2} (b_1 K_2 - r_1), \frac{r_1}{b_1} \right)$ โดยที่ $b_1 K_2 - r_1 > 0$ จะเรียกว่าจุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน
3. จุด $P_3(z_1, z_2) = (0, K_2)$ จะเรียกว่าจุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก

เราจะพบว่าสมดุลการสูญพันธุ์ P_1 และจุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก P_3 เกิดขึ้นเสมอทุก ๆ ค่าพารามิเตอร์ ขณะที่สมดุลการอยู่ร่วมกันจะเกิดขึ้นถ้า $r_1 < b_1 K_2$ นั่นคืออัตราการเติบโตของประชากรกลุ่มแรกน้อยกว่าอัตราการสูญเสียจากการแข่งขัน

ต่อไปเราจะวิเคราะห์ประเภทของเสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบสมการ (3.1)-(3.2) โดยใช้วิธีทำให้เป็นเชิงเส้นผ่านเมทริกซ์จาโคเบียน

เมทริกซ์จาโคเบียนของสมการ (3.1)-(3.2) ที่จุด (z_1, z_2) ใด ๆ กำหนดโดย

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - b_1 z_2 & -b_1 z_1 \\ -b_2 z_2 & r_2 - 2r_2 \frac{z_2}{K_2} - b_2 z_1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเกี่ยวข้องกับการจำแนกเสถียรภาพของแต่ละจุดสมดุล โดยวิเคราะห์จากค่าลักษณะเฉพาะของแต่ละจาโคเบียนเมทริกซ์ มีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1.1 จุดสมดุลการสูญพันธุ์ P_1 นั้นไม่เสถียร

พิสูจน์ พิจารณาเมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลอง ที่จุดสมดุลการสูญพันธุ์ $P_1 = (0, 0)$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} r_1 - b_1(0) & -b_1(0) \\ -b_2(0) & r_2 - 2r_2 \frac{z_2}{K_2} - b_2(0) \end{bmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะจาก

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} r_1 - \lambda & 0 \\ 0 & r_2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda) = 0$$

จะได้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(P_1)$ คือ $\lambda_1 = r_1 > 0$ และ $\lambda_2 = r_2 > 0$ เนื่องจาก $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

ดังนั้น จุดสมดุลการสูญพันธุ์ P_1 ไม่เสถียร □

ทฤษฎีบทที่ 3.1.2 ถ้า $r_1 < b_1 K_2$ จุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน P_2 ไม่เสถียร

พิสูจน์ จาก $r_1 < b_1 K_2$ จะมีจุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน P_2 เมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลองที่จุดสมดุลของการอยู่ร่วมกัน กำหนดโดย

$$J\left(\frac{r_2}{b_2 b_1 K_2}(b_1 K_2 - r_1), \frac{r_1}{b_1}\right) = \begin{bmatrix} r_1 - b_1\left(\frac{r_1}{b_1}\right) & -b_1\left(\frac{r_2}{b_2 b_1 K_2}(b_1 K_2 - r_1)\right) \\ -b_2\left(\frac{r_1}{b_1}\right) & r_2 - 2r_2 \frac{\left(\frac{r_1}{b_1}\right)}{K_2} - b_2\left(\frac{r_2}{b_2 b_1 K_2}(b_1 K_2 - r_1)\right) \end{bmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r_2}{b_2 K_2}(b_1 K_2 - r_1) \\ -\frac{r_1 b_2}{b_1} & -\frac{r_1 r_2}{b_1 K_2} \end{bmatrix}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะจาก

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{r_2}{b_2 K_2} (b_1 K_2 - r_1) \\ -\frac{r_1 b_2}{b_1} & -\frac{r_1 r_2}{b_1 K_2} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(P_2)$ เป็นไปตามสมการต่อไปนี้ $\lambda^2 + \frac{r_1 r_2}{b_1 K_2} \lambda - \frac{r_2 r_1}{K_2 b_1} (b_1 K_2 - r_1) = 0$

จาก $r_1 < b_1 K_2$ จะได้ $-\frac{r_2 r_1}{K_2 b_1} (b_1 K_2 - r_1) < 0$ ทำให้ได้ว่าหนึ่งในค่าลักษณะเฉพาะของ $J(P_2)$ เป็นบวก

ดังนั้น จุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน P_2 ไม่มีเสถียร □

ทฤษฎีบทที่ 3.1.3 จุดสมดุลของการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก P_3 เสถียรภาพกำกับ ถ้า $r_1 < b_1 K_2$

พิสูจน์ ให้ $r_1 < b_1 K_2$ เมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลองที่สมดุลของการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก

ถูกกำหนดโดย

$$J(0, K_2) = \begin{bmatrix} r_1 - b_1(K_2) & -b_1(0) \\ -b_2(K_2) & r_2 - 2r_2 \frac{(K_2)}{K_2} - b_2(0) \end{bmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{bmatrix} r_1 - b_1 K_2 & 0 \\ -b_2 K_2 & -r_2 \end{bmatrix}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะจาก

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} r_1 - b_1 K_2 - \lambda & 0 \\ -b_2 K_2 & -r_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(r_1 - b_1 K_2 - \lambda)(-r_2 - \lambda) = 0$$

ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(P_3)$ คือ $\lambda_1 = r_1 - b_1 K_2 < 0$ และ $\lambda_2 = -r_2 < 0$

ดังนั้น จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก P_3 เสถียรภาพกำกับ □

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างของแบบจำลองโดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ และใช้ทฤษฎีบทข้างต้นจำแนกเสถียรภาพของแต่ละจุดสมดุล และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์วาดกราฟของผลเฉลยเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

ตัวอย่าง 3.1.4 กำหนดพารามิเตอร์ $r_1 = 1.0346$, $b_1 = 0.00697$, $r_2 = 1.58997$, $b_2 = 0.01583$, $K = 250.96$

แบบจำลองเขียนอยู่ในรูป
$$\frac{dz_1}{dt} = (1.0346)z_1 - (0.00697)z_1z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (1.58997)z_2 \left(1 - \frac{z_2}{250.96}\right) (0.01583)z_1z_2$$

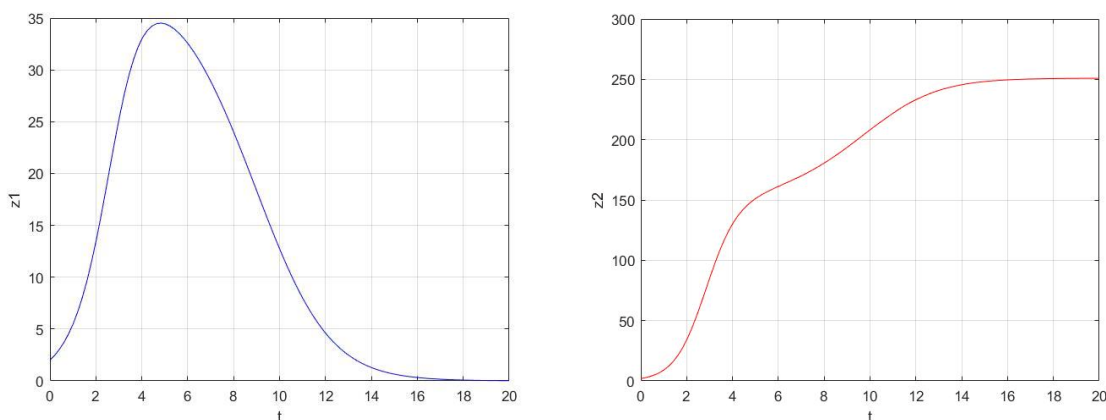
เนื่องจาก $r_1 = 1.0346 < b_1 K_2 = 1.7491912$ จะได้ว่าแบบจำลองมีจุดสมดุล 3 จุดคือ

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (41.03, 148.43615) \text{ และ } P_3 = (0, 250.96)$$

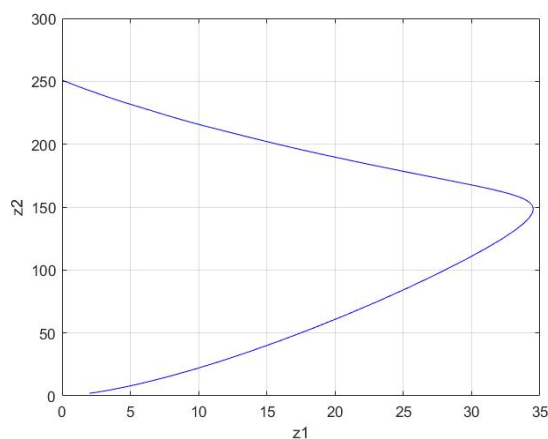
จากทฤษฎีบท 3.1.1 และ ทฤษฎีบท 3.1.2 พบว่าจุดสมดุล $P_1 = (0, 0)$ และ $P_2 = (41.03, 148.43615)$ ไม่เสถียร

ในขณะที่จุด $P_3 = (0, 250.96)$ เสถียรภาพกำกับ ตามทฤษฎีบท 3.1.3

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้จุดเริ่มต้นที่ $(2, 2)$ พบว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ผลเฉลย z_1 จะลู่เข้าสู่ค่า 0 และผลเฉลย z_2 จะลู่เข้าสู่ค่า 250.96 นั่นคือผลเฉลยจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล P_2 เมื่อ $t \rightarrow \infty$ แสดงตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2. ผลเฉลยบนระนาบ tz_1 และ tz_2



รูปที่ 3. ผลเฉลยบนระนาบ z_1z_2

ตัวอย่าง 3.1.6 กำหนดพารามิเตอร์ $r_1 = 1.0346$, $b_1 = 0.00697$, $r_2 = 1.58997$, $b_2 = 0.01583$, $K_2 = 100$

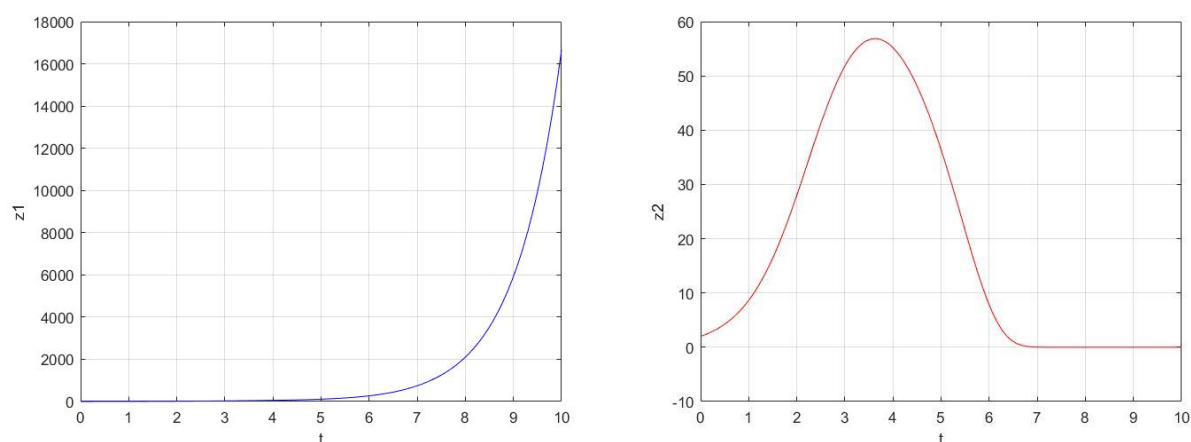
แบบจำลองเขียนอยู่ในรูป $\frac{dz_1}{dt} = (1.0346)z_1 - (0.00697)z_1z_2$

$$\frac{dz_2}{dt} = -b_2z_1z_2 = (1.58997)z_2\left(1 - \frac{z_2}{100}\right)(0.01583)z_1z_2$$

เนื่องจาก $r_1 = 1.0346 > b_1K_2 = 0.697$ จะได้ว่าแบบจำลองมีจุดสมดุล 2 จุดคือ $P_1 = (0,0)$ และ $P_3 = (0,100)$

จากทฤษฎีบท 3.1.1 และ ทฤษฎีบท 3.1.3 พบว่าจุดสมดุล $P_1 = (0,0)$ และ $P_3 = (0,100)$ ไม่เสถียร

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้จุดเริ่มต้นที่ (2,2) พบว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ผลเฉลย $z_1 \rightarrow \infty$ และ $z_2 \rightarrow 0$ นั่นคือผลเฉลยจะลู่ออกจากจุดสมดุล P_1 และ P_2 เมื่อ $t \rightarrow \infty$ แสดงตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4. ผลเฉลยบนระนาบ tz_1 และ tz_2

3.2 การดัดแปลงแบบจำลองการแข่งขันของ Lotka-Volterra ภายใต้สมมติฐานการเติบโตของสปีชีส์แรก และสปีชีส์ที่สองเป็นแบบโลจิสติก

กำหนดสมมติฐานของแบบจำลองดังนี้

1. ในระบบนิเวศมีเพียงสองสายพันธุ์ที่แตกต่างกันเท่านั้นที่แข่งขันกันในการใช้ทรัพยากรธรรมชาติ
2. ไม่มีการอพยพของสายพันธุ์
3. การเติบโตของสปีชีส์แรกและสปีชีส์ที่สองมีการเจริญเติบโตเป็นแบบโลจิสติก
4. อัตราการลดลงของทั้งสองสปีชีส์ เนื่องจากการแข่งขันระหว่างกันถูกสมมติให้เป็นอัตราคงตัว

จากสมมติฐานจะได้แบบจำลองการแข่งขันของสองสายพันธุ์ดังนี้

$$\frac{dz_1}{dt} = r_1 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{K_1} \right) - b_1 z_1 z_2 \quad (3.5)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = r_2 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{K_2} \right) - b_2 z_1 z_2 \quad (3.6)$$

เมื่อพารามิเตอร์ $r_1, r_2, K_1, K_2, b_1, b_2$ เป็นค่าคงที่บวก ซึ่ง

z_1 แทน จำนวนสปีชีส์แรก

z_2 แทน จำนวนสปีชีส์ที่สอง

r_1, r_2 แทน อัตราการเจริญเติบโต (growth rate) ของ z_1 และ z_2 ตามลำดับ

K_1, K_2 แทน จำนวนประชากรที่เป็นไปได้มากที่สุด (carrying capacity) ของ z_1 และ z_2 ตามลำดับ

b_1, b_2 แทน อัตราการลดลงจากการแข่งขันของ z_1 และ z_2 ตามลำดับ

เราจะพิจารณาระบบสมการในรูปแบบไร้หน่วย (dimensionless) โดยกำหนดตัวแปรใหม่

$$\text{ให้ } x = \frac{z_1}{K_1}, y = \frac{z_2}{K_2}, \alpha = b_1 K_2, \beta = b_2 K_1$$

พิจารณา $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K_1} \frac{dz_1}{dt}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{K_1} \left[r_1 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{K_1} \right) - b_1 z_1 z_2 \right] \\
 &= \frac{r_1 z_1}{K_1} \left(1 - \frac{z_1}{K_1} \right) - \frac{b_1 z_1 z_2}{K_1} \\
 &= r_1 x(1-x) - b_1 K_2 xy \\
 &= r_1 x(1-x) - \alpha xy
 \end{aligned}$$

พิจารณา $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{K_2} \frac{dz_2}{dt}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{K_2} \left[r_2 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{K_2} \right) - b_2 z_1 z_2 \right] \\
 &= \frac{r_2 z_2}{K_2} \left(1 - \frac{z_2}{K_2} \right) - \frac{b_2 z_1 z_2}{K_2} \\
 &= r_2 y(1-y) - b_2 K_1 xy \\
 &= r_2 y(1-y) - \beta xy
 \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการอยู่ในรูป

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x(1-x) - \alpha xy \quad (3.7)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 y(1-y) - \beta xy \quad (3.8)$$

เราจะหาจุดสมดุลของแบบจำลองสมการ (3.7)-(3.8) โดยที่จุดสมดุลหาได้จากการแก้ระบบสมการ

$$r_1 x(1-x) - \alpha xy = 0 \quad (3.9)$$

$$r_2 y(1-y) - \beta xy = 0 \quad (3.10)$$

จากสมการ (3.9) จะได้ $x = 0$ หรือ $x = 1 - \frac{\alpha y}{r_1}$

แทน $x = 0$ ใน (3.10) จะได้

$$\begin{aligned}
 r_2 y(1-y) &= 0 \\
 y &= 0, 1
 \end{aligned}$$

แทน $x = 1 - \frac{\alpha y}{r_1}$ ใน (3.10) จะได้

$$\begin{aligned}
 r_2 y(1-y) - \beta \left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right) y &= 0 \\
 y \left[r_2(1-y) - \beta \left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right) \right] &= 0 \\
 y &= 0, \frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1 r_2}
 \end{aligned}$$

จากการแก้ระบบสมการ (3.9) และ (3.10) ข้างต้นพบว่าแบบจำลองมีจุดสมดุลทั้งหมด 4 จุดดังนี้

1. จุด $E_1 = (0,0)$ จะเรียกว่าจุดสมดุลการสูญพันธุ์
2. จุด $E_2 = (0,1)$ จะเรียกว่าจุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก
3. จุด $E_3 = (1,0)$ จะเรียกว่าจุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์ที่สอง
4. จุด $E_4 = \left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}, \frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1 r_2}\right)$ โดยที่ $(\beta - r_2)(\alpha\beta - r_1 r_2) > 0$ และ $r_1 > \alpha y$

จะเรียกว่าจุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน

เราจะพบว่าจุดสมดุล E_1, E_2 และ E_3 เกิดขึ้นเสมอทุก ๆ ค่าพารามิเตอร์

ต่อไปเราจะวิเคราะห์ประเภทของเสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบสมการ (3.7)-(3.8) โดยใช้วิธีทำให้เป็นเชิงเส้นผ่านเมทริกซ์จาโคเบียน เมทริกซ์จาโคเบียนของสมการ (3.7)-(3.8) ที่จุด (x, y) ใด ๆ กำหนดโดย

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} r_1 - 2r_1 x - \alpha y & -\alpha x \\ -\beta y & r_2 - 2r_2 y - \beta x \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเกี่ยวข้องกับการจำแนกเสถียรภาพของแต่ละจุดสมดุล โดยวิเคราะห์จากค่าลักษณะเฉพาะของแต่ละจาโคเบียนเมทริกซ์ มีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.2.1 จุดสมดุลการสูญพันธุ์ E_1 ไม่เสถียร

พิสูจน์ พิจารณาเมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลองที่สมดุลการสูญพันธุ์ $E_1 = (0,0)$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะจาก

$$\begin{aligned}
 \det(J - \lambda I) &= 0 \\
 \begin{vmatrix} r_1 - \lambda & 0 \\ 0 & r_2 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
 (r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda) &= 0
 \end{aligned}$$

จะได้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E_1)$ คือ $\lambda_1 = r_1 > 0$ และ $\lambda_2 = r_2 > 0$ เนื่องจาก $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

ดังนั้น จุดสมดุลการสูญพันธุ์ E_1 ไม่เสถียร

□

ทฤษฎีบทที่ 3.2.2 จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก E_2 เสถียรภาพกำกับ ถ้า $r_1 < \alpha$

พิสูจน์ ให้ $r_1 < \alpha$ เมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลองที่จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรกถูกกำหนดโดย

$$J(0,1) = \begin{bmatrix} r_1 - \alpha & 0 \\ -\beta & -r_2 \end{bmatrix}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะจาก

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} r_1 - \alpha - \lambda & 0 \\ -\beta & -r_2 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (r_1 - \alpha - \lambda)(-r_2 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E_2)$ คือ $\lambda_1 = -r_2 < 0$ และ $\lambda_2 = r_1 - \alpha < 0$

ดังนั้น จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก E_2 เสถียรภาพกำกับ

□

ทฤษฎีบทที่ 3.2.3 จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์สอง E_3 เสถียรภาพกำกับถ้า $r_2 < \beta$

พิสูจน์ ให้ $r_2 < \beta$ เมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลองที่จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์สองถูกกำหนดโดย

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} r_1 - 2r_1 & -\alpha \\ 0 & r_2 - \beta \end{bmatrix}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะจาก

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} -r_1 - \lambda & -\alpha \\ 0 & r_2 - \beta - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (-r_1 - \lambda)(r_2 - \beta - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E_3)$ คือ $\lambda_1 = -r_1 < 0$ และ $\lambda_2 = r_2 - \beta < 0$

ดังนั้น จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์สอง E_3 เสถียรภาพกำกับ

□

ทฤษฎีบทที่ 3.2.4 จุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน E_4 มีเสถียรภาพถ้า $r_2 > \beta$ และ $(r_1 - \alpha) > (B - r_2)$ แต่ E_4 ไม่เสถียรถ้า $r_2 < \beta$

พิสูจน์ พิจารณา เมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลองที่จุดสมดุลการอยู่ร่วมกันถูกกำหนดโดย

$$J\left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}, \frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1 r_2}\right) = \begin{bmatrix} r_1 - 2r_1 x - \alpha y & -\alpha x \\ -\beta y & r_2 - 2r_2 y - \beta x \end{bmatrix}$$

พิจารณา $D(J(E_4))$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D(J(E_4)) &= \begin{vmatrix} r_1 - 2r_1 x - \alpha y & -\alpha x \\ -\beta y & r_2 - 2r_2 y - \beta x \end{vmatrix} \\ &= (r_1 - 2r_1 x - \alpha y)(r_2 - 2r_2 y - \beta x) - \alpha\beta xy \\ &= (r_1 - 2r_1 x - \alpha y)r_2 - 2r_2 y(r_1 - 2r_1 x - \alpha y) - \beta x(r_1 - 2r_1 x - \alpha y) - \alpha\beta xy \\ &= \left[r_1 - 2r_1\left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right) - \alpha y\right]r_2 - 2r_2 y\left[r_1 - 2r_1\left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right) - \alpha y\right] - \beta x(r_1 - 2r_1 x) \\ &= (r_1 - 2r + 2\alpha y - \alpha y)r_2 - 2r_2 y(r_1 - 2r + 2\alpha y - \alpha y) - \beta x\left[r_1 - 2r_1\left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right)\right] \\ &= (-r_1 + \alpha y)r_2 - 2r_2 y(-r_1 + \alpha y) - \beta x(-r_1 + 2\alpha y) \\ &= (-r_1 + \alpha y)r_2 - 2r_2 y(-r_1 + \alpha y) + \beta\left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right)(r_1 - 2\alpha y) \\ &= -r_2[(r_1 - \alpha y) + 2r_2 y(r_1 - \alpha y)] + \frac{\beta}{r_1}(r_1 - \alpha y)(r_1 - 2\alpha y) \\ &= \left[-r_2 + 2r_2 y + \frac{\beta}{r_1}(r_1 - 2\alpha y)\right](r_1 - \alpha y) \\ &= \frac{\beta}{r_1}\left[\frac{-r_1 r_2}{\beta} + \frac{2r_1 r_2}{\beta} + (r_1 - 2\alpha y)\right](r_1 - \alpha y) \\ &= \frac{\beta}{r_1}\left[r_1\left(1 - \frac{r_2}{\beta}\right) + 2y\left(\frac{r_1 r_2 - \alpha\beta}{\beta}\right)\right](r_1 - \alpha y) \\ &= \frac{\beta}{r_1}\left[\frac{r_1}{\beta}(\beta - r_2) + 2r_1(\beta - r_2)\left(\frac{-1}{\beta}\right)\right](r_1 - \alpha y) \\ &= [(\beta - r_2) - 2(\beta - r_2)](r_1 - \alpha y) \\ &= (r_2 - \beta)(r_1 - \alpha y) \end{aligned}$$

จากจุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน E_4 จะได้ว่า $r_1 - \alpha y > 0$ และ

ถ้า $r_2 < \beta$ แล้ว $D(J(E_4)) < 0$ เพราะฉะนั้นจุดสมดุล E_4 ไม่เสถียร

ถ้า $r_2 > \beta$ แล้ว $D(J(E_4)) > 0$ จากนั้นจะพิจารณาค่าของ $T(J(E_4))$

พิจารณา $T(J(E_4))$

$$\begin{aligned}
 T(J(E_4)) &= r_1 - 2r_1x - \alpha y + r_2 - 2r_2y - \beta x \\
 &= r_1 - 2r_1 \left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right) - \alpha y + r_2 - 2r_2y - \beta \left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}\right) \\
 &= r_1 - 2r_1 + 2\alpha y - \alpha y + r_2 - 2r_2y - \beta + \frac{\alpha\beta y}{r_1} \\
 &= -r_1 + \alpha y + r_2 - 2r_2y - \beta + \frac{\alpha\beta y}{r_1}
 \end{aligned}$$

แทน $y = \frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1r_2}$ จะได้

$$\begin{aligned}
 T(J(E_4)) &= -r_1 + \alpha \left[\frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1r_2} \right] + r_2 - 2r_2 \left[\frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1r_2} \right] - \beta + \frac{\alpha\beta}{r_1} \left[\frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1r_2} \right] \\
 &= -r_1 + \frac{r_1\alpha\beta - r_1r_2\alpha}{\alpha\beta - r_1r_2} + r_2 + \frac{2r_1r_2^2 - 2r_1r_2\beta}{\alpha\beta - r_1r_2} - \beta + \frac{\alpha\beta^2 - r_2\alpha\beta}{\alpha\beta - r_1r_2} \\
 &= \frac{r_1^2r_2 - r_1\alpha\beta + r_1\alpha\beta - r_1r_2\alpha + r_2\alpha\beta - r_1r_2^2 + 2r_1r_2^2 - 2r_1r_2\beta - \alpha\beta^2 + r_1r_2\beta + \alpha\beta^2 - r_2\alpha\beta}{\alpha\beta - r_1r_2} \\
 &= \frac{r_1^2r_2 - r_1r_2\alpha - r_1r_2\beta + r_1r_2^2}{\alpha\beta - r_1r_2} \\
 &= \frac{r_1r_2(r_1 - \alpha - \beta + r_2)}{\alpha\beta - r_1r_2}
 \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขการเกิดจุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน E_4 คือ $(\beta - r_2)(\alpha\beta - r_1r_2) > 0$ จะพบว่า $\alpha\beta - r_1r_2 < 0$ จะได้ว่า

จะพบว่า $(r_1 - \alpha) > (\beta - r_2)$ แล้ว $T < 0$

ดังนั้น จุดสมดุลการอยู่ร่วม E_4 เสถียรภาพกำกับ

□

ตัวอย่าง 3.2.5 กำหนดพารามิเตอร์ $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $\alpha = 8$, $\beta = 10$

แบบจำลองเขียนอยู่ในรูป
$$\frac{dx}{dt} = 2x(1-x) - 8xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y(1-y) - 10xy$$

เนื่องจาก $(\beta - r_2)(\alpha\beta - r_1r_2) = 456 > 0$ และ $r_1 = 2 > \alpha y = 1.68$ จะได้ว่าแบบจำลองมีจุดสมดุล 4 จุดคือ

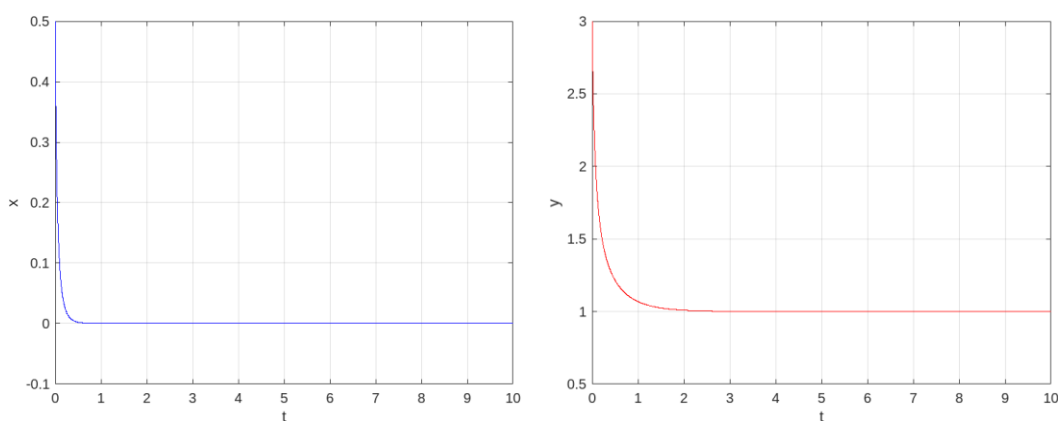
$$E_1 = (0,0), E_2 = (0,1), E_3 = (1,0), E_4 = (0.15,0.21)$$

จากทฤษฎีบท 3.2.2 $r_1 = 2 < \alpha = 8$ แล้วจุด $E_2 = (0,1)$ เสถียรภาพกำกับ จากทฤษฎีบท 3.2.3

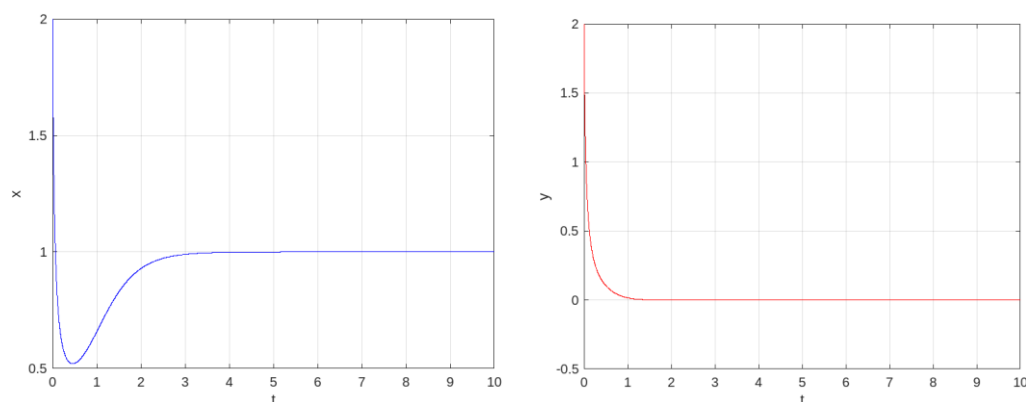
$\beta = 10 > r_2 = 2$ แล้วจุด $E_3 = (1,0)$ เสถียรภาพกำกับ ในขณะที่ $D(J(E_4)) < 0$ จุด $E_4 = (0.15,0.21)$

ไม่เสถียร ตามทฤษฎีบท 3.2.4 จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้จุดเริ่มต้นที่ $(2,2)$ พบว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ผลเฉลย $x \rightarrow 1$ และ $y \rightarrow 0$ นั่นคือผลเฉลยจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล E_3 เมื่อ $t \rightarrow \infty$

และถ้าให้จุดเริ่มต้นที่ $(0.5,3)$ พบว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ผลเฉลย $x \rightarrow 0$ และ $y \rightarrow 1$ นั่นคือผลเฉลยจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล E_2 เมื่อ $t \rightarrow \infty$ แสดงตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 5. ผลเฉลยบนระนาบ tx และ ty ซึ่งจุดสมดุล E_2 มีเสถียรภาพกำกับ



รูปที่ 5. ผลเฉลยบนระนาบ tx และ ty ซึ่งจุดสมดุล E_3 มีเสถียรภาพกำกับ

ตัวอย่าง 3.2.6 กำหนดพารามิเตอร์ $r_1 = 6$, $r_2 = 4$, $\alpha = 4$, $\beta = 10$

$$\begin{aligned}\text{แบบจำลองเขียนอยู่ในรูป } \frac{dx}{dt} &= 6x(1-x) - 4xy \\ \frac{dP}{dt} &= 4y(1-y) - 10xy\end{aligned}$$

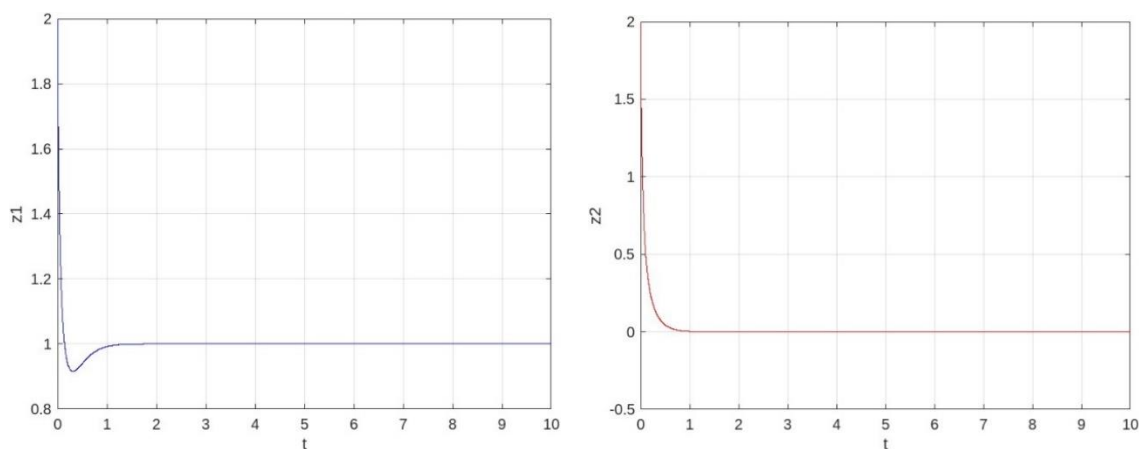
เนื่องจาก $r_1 = 4 < \alpha y = 9$ จะได้ว่าแบบจำลองมีจุดสมดุล 3 จุดคือ

$$E_1 = (0,0), E_2 = (0,1), E_3 = (1,0)$$

จากทฤษฎีบท 3.2.2 $r_1 = 6 > \alpha = 4$ แล้วจุด $E_2 = (0,1)$ ไม่เสถียร จากทฤษฎีบท 3.2.3 $\beta = 10 > r_2 = 4$ แล้ว

จุด $E_3 = (1,0)$ เสถียรภาพกำกับ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้จุดเริ่มต้นที่ $(2,2)$ พบว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ผลเฉลย $z_1 \rightarrow 1$ และ $z_2 \rightarrow 0$ นั่นคือผลเฉลยจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล E_3 เมื่อ $t \rightarrow \infty$ แสดงตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 7. ผลเฉลยบนระนาบ tx และ ty

ตัวอย่าง 3.2.7 กำหนดพารามิเตอร์ $r_1 = 8$, $r_2 = 20$, $\alpha = 4$, $\beta = 8$

$$\text{แบบจำลองเขียนอยู่ในรูป } \frac{dx}{dt} = 8x(1-x) - 4xy$$

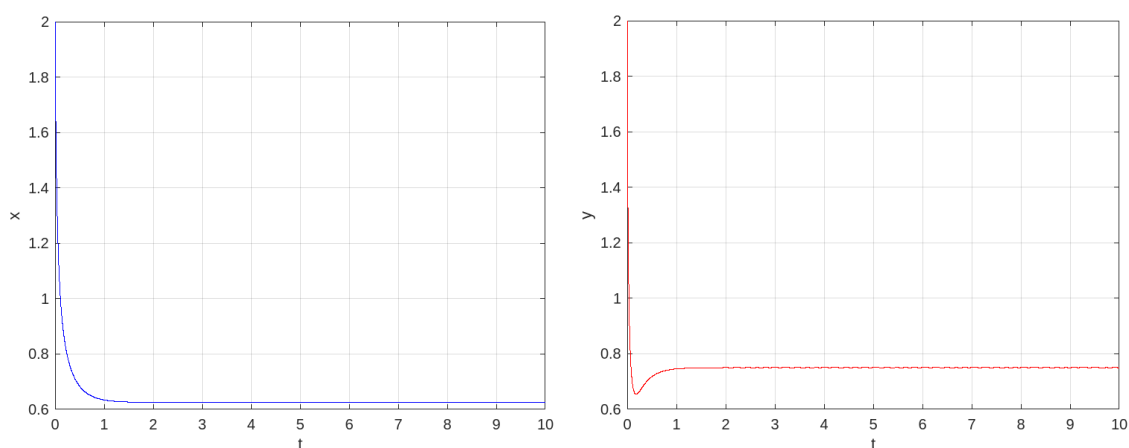
$$\frac{dy}{dt} = 20y(1-y) - 8xy$$

เนื่องจาก $(\beta - r_2)(\alpha\beta - r_1r_2) = 1536 > 0$ และ $r_1 = 8 > \alpha = 4$ จะได้ว่าแบบจำลองมีจุดสมดุล 4 จุดคือ

$$E_1 = (0,0), E_2 = (0,1), E_3 = (1,0), E_4 = (0.15,0.21)$$

จากทฤษฎีบท 3.2.2 $r_1 = 8 > \alpha = 4$ แล้ว จุด $E_2 = (0,1)$ ไม่เสถียร จากทฤษฎีบท 3.2.3 $\beta = 8 < r_2 = 20$ แล้ว จุด $E_3 = (1,0)$ ไม่เสถียร ในขณะที่ $D(J(E_4)) > 0$ และ $T(J(E_4)) < 0$ จุด $E_4 = (0.625,0.75)$ เสถียรภาพกำกับตามทฤษฎีบท 3.2.4

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้จุดเริ่มต้นที่ $(2,2)$ พบว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ผลเฉลย $z_1 \rightarrow 0.625$ และ $z_2 \rightarrow 0.75$ นั่นคือผลเฉลยจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล E_4 เมื่อ $t \rightarrow \infty$ แสดงตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 8. ผลเฉลยบนระนาบ tx และ ty

ตัวอย่าง 3.2.8 กำหนดพารามิเตอร์ $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, $\alpha = 12$, $\beta = 4$

แบบจำลองเขียนอยู่ในรูป $\frac{dx}{dt} = 4x(1-x) - 12xy$

$$\frac{dy}{dt} = 6y(1-y) - 4xy$$

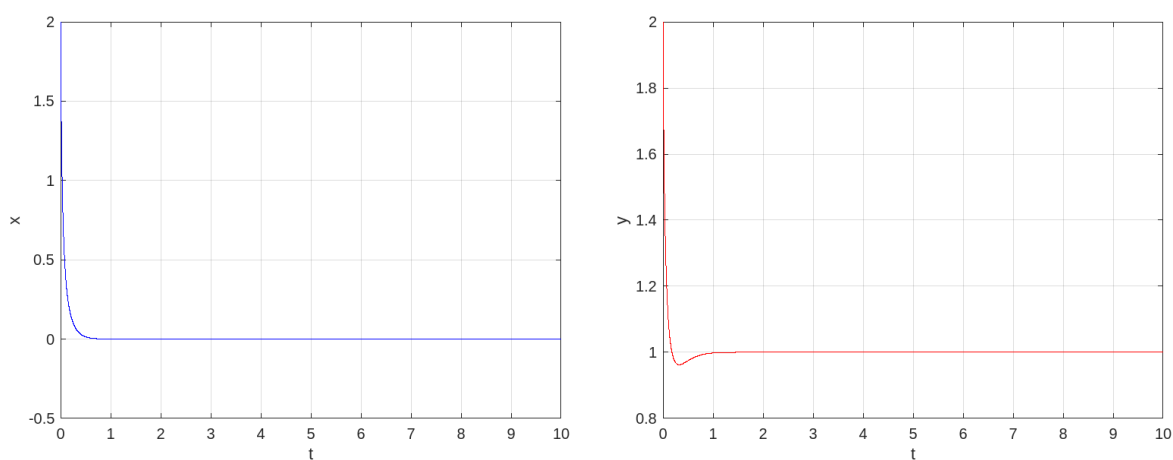
เนื่องจาก $(\beta - r_2)(\alpha\beta - r_1r_2) = -48 < 0$ จะได้ว่าแบบจำลองมีจุดสมดุล 3 จุดคือ

$$E_1 = (0,0), E_2 = (0,1), E_3 = (1,0)$$

จากทฤษฎีบท 3.2.2 $r_1 = 4 < \alpha = 12$ แล้ว จุด $E_2 = (0,1)$ เสถียรภาพกำกับ จากทฤษฎีบท 3.2.3

$\beta = 4 < r_2 = 6$ แล้วจุด $E_3 = (1,0)$ ไม่เสถียร

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้จุดเริ่มต้นที่ $(2,2)$ พบว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ผลเฉลย $z_1 \rightarrow 0$ และ $z_2 \rightarrow 1$ นั่นคือผลเฉลยจะเข้าสู่จุดสมดุล E_2 เมื่อ $t \rightarrow \infty$ แสดงตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 9. ผลเฉลยบนระนาบ tx และ ty

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

(The conclusions)

ในรายงานค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาการดัดแปลงแบบจำลองการแข่งขันของลอตกา-โวลเทอร์รา โดยแบบจำลองแรกมีสมมติฐานการเจริญเติบโตของสปีชีส์แรกเป็นแบบเอ็กโพเนนเชียล ในขณะที่สปีชีส์ที่สองมีการเติบโตเป็นแบบลอจิสติก แล้วจะได้ว่ามีจุดสมดุล 3 จุดคือ

1. จุดสมดุลการสูญพันธุ์ $P_1 = (0, 0)$
2. จุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน $P_2 = \left(\frac{r_2}{b_1 b_2 K_2} (b_1 K_2 - r_1), \frac{r_1}{b_1} \right)$ โดยที่ $b_1 K_2 - r_1 > 0$ และ
3. จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก $P_3 = (0, K_2)$

โดยจากการวิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุลจะได้ว่า จุดสมดุลการสูญพันธุ์ P_1 เสถียร ส่วนจุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน P_2 ไม่เสถียรถ้า $r_1 < b_1 K_2$ และ จุดสมดุลของการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก P_3 เสถียรภาพกำกับ ถ้า $r_1 < b_1 K_2$

ต่อมาเราได้ทำการดัดแปลงแบบจำลองโดยใช้สมมติฐานการเจริญเติบโตของสปีชีส์แรกและสปีชีส์ที่สองเป็นแบบลอจิสติก พบว่าแบบจำลองมีจุดสมดุลทั้งหมด 4 จุด คือ

1. จุดสมดุลการสูญพันธุ์ $E_1 = (0, 0)$
2. จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก $E_2 = (0, 1)$
3. จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์ที่สอง $E_3 = (1, 0)$
4. จุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน $E_4 = \left(1 - \frac{\alpha y}{r_1}, \frac{r_1(\beta - r_2)}{\alpha\beta - r_1 r_2} \right)$ โดยที่ $(\beta - r_2)(\alpha\beta - r_1 r_2) > 0$ และ $r_1 > \alpha y$

โดยจากการวิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุลจะได้ว่า สมดุลการสูญพันธุ์ E_1 ไม่เสถียร จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์แรก E_2 เสถียรภาพกำกับ ถ้า $r_1 < \alpha$ จุดสมดุลการสูญพันธุ์ของสายพันธุ์ที่สอง E_3 เสถียรภาพกำกับถ้า $r_2 < \beta$ จุดสมดุลการอยู่ร่วมกัน E_4 มีเสถียรภาพกำกับถ้า $r_2 > \beta$ และ $(r_1 - \alpha) > (\beta - r_2)$ แต่ E_4 ไม่เสถียรถ้า $r_2 < \beta$

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Strogatz, Steven H., Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Boulder, a member of the Perseus Books Group, 2015.
- [2] W. Windarto, E. Eridani, On Modification and Application of Lotka-Volterra Competition Model, AIP Conference Proceedings 2268, (2020)
- [3] R. E. Mickens, A note on exact finite difference schemes for modified Lotka-Volterra differential equations, Journal of difference equations and applications 24(6)-7
- [4] สมการเชิงอนุพันธ์ประยุกต์สำหรับวิศวกร, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, คณะวิทยาศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์, พ.ศ. 2552