

การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยม
(Decomposition of polyhedra to families of polylink)

นายภัทรดนัย ใจมา
รหัส 620510573

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยม
(Decomposition of polyhedra to families of polylink)

ภัทรดนัย ไจมา

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมลักษณ์ อุตุดี)

วันที่ 24 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2566

การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยม
(Decomposition of polyhedra to families of polylink)

นายภัทรดนัย ใจมา
รหัส 620510573

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในระบวนววิชา 206499 ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในหัวข้อเรื่อง การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยม (Decomposition of polyhedra to families of polylink)

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระที่ได้สนับสนุนโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งให้คำปรึกษา ช่วยตรวจสอบ และช่วยอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ตลอดจนช่วยแก้ไขข้อผิดพลาดต่างๆ จนงานค้นคว้าอิสระนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี และขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมลักษณ์ อุตติ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระ รวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ สำหรับการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้ดียิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนและให้ความรู้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในงานค้นคว้าอิสระนี้ได้

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้ให้กำลังใจแก่ผู้ค้นคว้าจนสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี และอีกหลายๆท่านที่ข้าพเจ้าไม่ได้กล่าวถึง

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้เกิดข้อผิดพลาด หรือได้รับคำติชมประการใดผู้จัดทำขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ภัทรดนัย ไจมา

หัวข้อ (ภาษาไทย)	การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยม
(ภาษาอังกฤษ)	Decomposition of polyhedra to families of polylink
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นายภัทรดนัย ไจมา รหัสนักศึกษา 620510573
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี
ชื่อกรรมการสอบ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมลักษณ์ อุดดี

บทคัดย่อ

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้ศึกษาสนใจปัญหาการแยกทรงหลายหน้าประกอบด้วย ทรงตันเพลโต ทรงตันอาร์คิมิดีส และทรงตันจอห์นสัน ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมโดยสร้างขั้นตอนวิธีในการตรวจสอบว่าทรงตันที่กำหนดให้สามารถแยกออกเป็นรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งไม่ได้เป็นรูปเรขาคณิตของหน้าของทรงหลายหน้า โดยแยกออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ จากศึกษาร่วมกับการแจกแจงโดยใช้ซอร์ฟแวร์ทางคณิตศาสตร์ พบว่าในการแยกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของมุมเพื่อให้ได้รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า พบทรงหลายหน้าที่ผ่านเงื่อนไขการเท่ากันของมุม ได้แก่ Octahedron, Cuboctahedron, Icosidodecahedron, Small Rhombicosidodecahedron และ Small Rhombicuboctahedron จากนั้นผู้ศึกษาได้ศึกษาการแยกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของการอยู่บนระนาบเดียวกันพบว่า มีทรงหลายหน้าที่ผ่านเงื่อนไขเพิ่มจากเดิม 2 ชนิด ได้แก่ Elongated Square Dipyramid และ Square Orthobicupola

Abstract

In this independent study, we are interested in the problem of decomposing polyhedra, consisting of Platonic solids, Archimedean solids, and Johnson solids, into polygons. We constructed algorithms to verify whether a given solid can be decomposed into polygons such that those polygons are not faces of polyhedrons. We mainly focused on the decomposability of regular polygons and planar polygons. By implementing in mathematical software, we found five polyhedra decomposed into regular polygons, including octahedron, cuboctahedron, icosidodecahedron, small rhombicosidodecahedron, and small Rhombicuboctahedron. After that, we considered the polyhedra, which were decomposed to planar polygons (not necessarily to be regular). Two additional polyhedra were found, including elongated square dipyramid and square orthobicupola.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	3
2.1 รูปหลายเหลี่ยมและทรงหลายหน้า (Polygons And Polyhedrons)	3
2.2 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (Elementary Graph Theory)	11
2.3 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ (Vectors in Three-Dimensional Space)	13
2.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ (Planes in Three-Dimensional Space)	16
3 การแจงนับทรงหลายหน้า (Enumerations of polyhedra)	21
3.1 สมมติฐานของปัญหา (Assumption of the problem)	21
3.2 เงื่อนไขการแจงนับ (Conditions of enumeration)	22
3.3 ขั้นตอนวิธีในการแจงนับ	22
3.4 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน	25
3.5 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ	26
4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	33
4.1 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน	33
4.2 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ	33
บรรณานุกรม	34

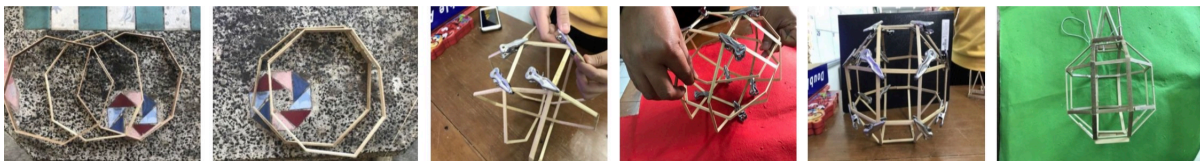
บทที่ 1

บทนำ (Introduction)



ภาพที่ 1 โคมล้านนา รูปภาพจาก <https://chiangmai-product.com>

จากการที่ผู้ศึกษาได้สังเกตรูปแบบของโคมล้านนาจากภาพที่ 1 รวมทั้งได้ศึกษาการประดิษฐ์โคมล้านนา[1] ซึ่งโคมในรูปแบบทั่วไปนี้ ในส่วนของโครงจะประดิษฐ์โดยการนำไม้ไผ่มาผ่านขั้นตอนวิธี การป้องกันปลวกและมอด การฉีกกระดาษ และการเหลาให้บางยาว จากนั้นมาตัดเป็นรูปแปดเหลี่ยม จำนวน 6 ชิ้น (ในที่นี้จะมียุติขนาดที่กำหนดไว้) แล้วนำไม้ไผ่ที่ตัดเป็นรูปแปดเหลี่ยมทั้งหมดมาประกอบกันโดยใช้ตัวหนีบในการยึดมุมของทุกมุม และติดกาว ซึ่งทำให้ได้โครงของโคมในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 การประดิษฐ์โคมล้านนา[1]

เมื่อสังเกตโครงของโคมล้านนาในรูปแบบทั่วไปจะพบว่า โคมล้านนาในรูปแบบทั่วไปนี้มีลักษณะคล้ายกับทรงตัน Small Rhombicuboctahedron และในทางกลับกัน ทรงตัน Small Rhombicuboctahedron สามารถเกิดจากการนำรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จำนวน 6 ชิ้น มาประกอบกันในการทำนองเดียวกับการประกอบโคมได้ ผู้ศึกษาจึงตั้งคำถามว่าในจำนวนทรงตันที่เป็นที่รู้จักได้แก่ ทรงตันเพลโต ทรงตันอาร์คิมิดีส และทรงตันจอห์นสัน มีทรงตันรูปแบบใดบ้างที่สามารถนำมาประกอบกันในการทำนองเดียวกับการประกอบโคมล้านนา

ในการศึกษานี้ เราได้ศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการแยกทรงตันพื้นฐานออกเป็นรูปเรขาคณิตภายใต้เงื่อนไข ซึ่งรูปเรขาคณิตเป็นรูปเรขาคณิตปกติ รวมถึงรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยศึกษาปัญหาการแจกแจงทรงหลายหน้าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว ผ่านการสร้างขั้นตอนวิธีและเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับทำการแจกแจง ทรงหลายหน้าที่เป็นไปได้ ภายใต้เงื่อนไขต่างๆที่สอดคล้องต่อไป

วัตถุประสงค์ของการทำการค้นคว้าอิสระหัวข้อนี้

1. เพื่อศึกษาสมบัติพื้นฐานของทรงหลายหน้ามาตรฐาน
2. เพื่อศึกษาปัญหาการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ
3. เพื่อประยุกต์ใช้โปรแกรม Wolfram Mathematica 13.1 ในการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นรูปหลายเหลี่ยม ภายใต้เงื่อนไขต่างๆที่เกี่ยวข้อง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระหัวข้อนี้

1. ได้ทราบสมบัติทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ
2. สามารถประยุกต์ปัญหากับการออกแบบโคมโกระดาษล่านนาในรูปแบบใหม่ได้

ขอบเขตและวิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระหัวข้อนี้

1. ศึกษาสมบัติพื้นฐานของทรงหลายหน้าประกอบด้วย ทรงตันเพลโต ทรงตันของอาร์คิมิดีส และ ทรงตันของจอห์นสัน
2. ศึกษาปัญหาการแยกทรงหลายหน้า ออกเป็นแฟมิลี ของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ
3. สร้างขั้นตอนวิธีในการตรวจสอบและแจกแจงกรณีของทรงหลายหน้า ที่สามารถแยกเป็นรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานค้นคว้าอิสระนี้ โดยประกอบด้วย รูปหลายเหลี่ยม ทรงหลายหน้า ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ระนาบในปริภูมิสามมิติ

2.1 รูปหลายเหลี่ยมและทรงหลายหน้า (Polygons And Polyhedrons)

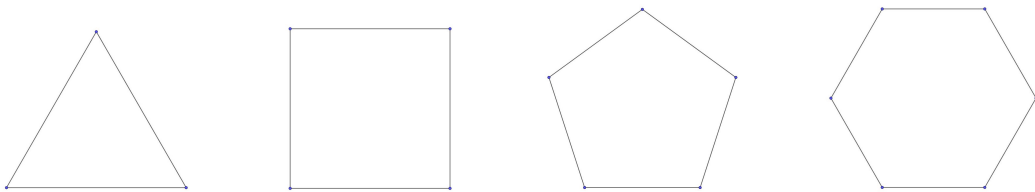
โดยทั่วไปเรามักพบรูปร่างเรขาคณิต อาทิ รูปวงกลม รูปวงรี รูปสี่เหลี่ยม รูปสามเหลี่ยม รูปดาว ในงานค้นคว้าอิสระนี้เราจะศึกษารูปร่างเรขาคณิตในปริภูมิสองมิติ และปริภูมิสามมิติ ซึ่งประกอบด้วยรูปหลายเหลี่ยมและทรงหลายหน้า ดังนี้

บทนิยาม 2.1. [6] รูปหลายเหลี่ยม (polygons) คือพื้นที่ปิดของระนาบ ซึ่งปิดล้อมด้วยส่วนของเส้นตรงที่ปลายของส่วนของเส้นตรงเรียงต่อกัน ซึ่งจุดปลายของส่วนของเส้นตรงเรียกว่า จุดยอด (vertex) ของรูปหลายเหลี่ยม ส่วนของเส้นตรงที่เรียงต่อกันเรียกว่าเส้นขอบ (edge)

เพื่ออธิบายสมบัติเพิ่มเติมของรูปร่างเรขาคณิต เราศึกษาความนูนของเซตดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2. กำหนดให้ S เป็นสับเซตของปริภูมิแบบยูคลิด n มิติ โดยที่ x และ y เป็นจุดใดๆใน S S จะเป็นเซตนูนก็ต่อเมื่อ สำหรับจุด x, y ในเซต S ได้ว่า ส่วนของเส้นตรง $\overline{xy} \in S$

ทั้งนี้ หากรูปหลายเหลี่ยมเป็นเซตนูนจะเรียกรูปหลายเหลี่ยมว่า รูปหลายเหลี่ยมนูน (convex polygon) และหากรูปหลายเหลี่ยม มีเส้นขอบทุกเส้นยาวเท่ากัน และขนาดของมุมทุกมุมเท่ากันจะเรียกว่า รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (regular polygon) ซึ่งสามารถเรียกอีกชื่อหนึ่งว่ารูปหลายเหลี่ยมปกติ



ภาพที่ 3 ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งเป็นรูปหลายเหลี่ยมนูน

ในปริภูมิสามมิติ เราสนใจวัตถุที่มีลักษณะคล้ายกับรูปหลายเหลี่ยม คือ ทรงหลายหน้า ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3. ทรงหลายหน้า (polyhedron) เกิดจากการตัดกันของระนาบในปริภูมิสามมิติ และเป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยรูปหลายเหลี่ยมจำกัด เรียกว่า หน้า (face) ซึ่งแต่ละหน้าจะประกบกันด้วยจุด (vertices) และเส้นขอบ (edges)

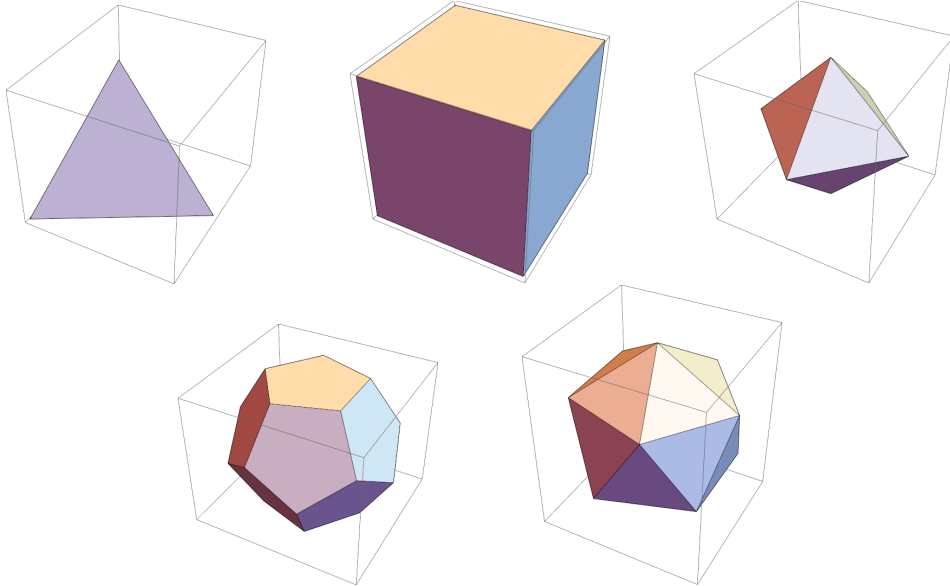
ในการศึกษาครั้งนี้ เราได้ทรงตัน 3 ชนิด ซึ่งเป็นทรงตันมาตรฐาน ประกอบด้วย ทรงตันเพลโต ทรงตันของอาร์คิมิดีส และ ทรงตันจอห์นสัน โดยจะมีกล่าวถึงปริซึมและแอนติปริซึมเพิ่มเติม ซึ่งจะอ้างอิงถึงนิยามทรงตันแต่ละชนิดดังนี้

บทนิยาม 2.4. ทรงหลายหน้าปกติ (regular polyhedron) หรือทรงตันเพลโต (Platonic solids) เป็นเซตนูนที่เกิดจากการประกบกันของรูปหลายเหลี่ยมปกติในปริภูมิแบบยูคลิดสามมิติ เพียงชนิดเดียว

ทรงตันเพลโตมีทั้งหมด 5 รูปแบบ ประกอบด้วย ทรงสี่หน้า (tetrahedron), ทรงลูกบาศก์ (cube), ทรง

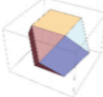












แปดหน้า (Octahedron), ทรงสิบสองหน้า (Dodecahedron), ทรงยี่สิบหน้า (Icosahedron)

ทฤษฎีบท 2.5. มีทรงตันเพลโตเพียง 5 แบบเท่านั้น
(สามารถดูการพิสูจน์ได้จากหนังสือ Devadoss S.[5])











ภาพที่ 4 ทรงตันเพลโต ทั้ง 5 รูปแบบ

บทนิยาม 2.6. ทรงตันของอาร์คิมิดีส (Archimedean solids) เป็นทรงหลายหน้านูนซึ่งหน้าเป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ ตั้งแต่สองประเภทขึ้นไปที่มาบรรจบกันในรูปแบบเดียวกันรอบๆ จุดยอดแต่ละจุด มีทั้งหมด 13 รูปแบบ ดังตารางต่อไปนี้









ชื่อ	รูป	v	e	f
Cuboctahedron		12	24	14
Great Rhombicosidodecahedron		120	180	62
Great Rhombicuboctahedron		48	72	26
Icosidodecahedron		30	60	32
Small Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Small Rhombicuboctahedron		24	48	26
Snub Cube		24	60	38
Snub Dodecahedron		60	150	92
Truncated Cube		24	36	14
Truncated Dodecahedron		60	90	32
Truncated Icosahedron		60	90	32
Truncated Octahedron		24	36	14
Truncated Tetrahedron		12	18	8

ภาพที่ 5 ทรงตันอาร์คิมิดีส ทั้ง 13 รูปแบบ โดยที่ v คือจำนวนจุดยอด, e คือจำนวนเส้นเชื่อม และ f คือจำนวนหน้า

บทนิยาม 2.7. ปริซึมปกติ (regular prism) เกิดจากการประกอบของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้าน n จำนวน 2 รูป ต่อกันด้วยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส n รูป สำหรับแอนติปริซึมปกติ (regular antiprism) เกิดจากการประกอบของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้าน n จำนวน 2 รูป ต่อกันด้วยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จำนวน $2n$ รูป ซึ่งปริซึมสี่เหลี่ยมและปริซึมสามเหลี่ยมคือทรงลูกบาศก์และทรงแปดหน้าตามลำดับ ซึ่งปริซึมและแอนติปริซึมแต่ละชนิดมี 8 รูปแบบ ดังนี้





















ชื่อ	รูป	v	e	f
Triangular Prism		6	9	5
Square Prism (Cube)		8	12	6
Pentagonal Prism		10	15	7
Hexagonal Prism		12	18	8
Heptagonal Prism		14	21	9
Octagonal Prism		16	24	10
Enneagonal Prism		18	27	11
Decagonal Prism		20	30	12





















ภาพที่ 6 ปริซึม ทั้ง 8 รูปแบบ โดยที่ v คือจำนวนจุดยอด, e คือจำนวนเส้นเชื่อม และ f คือจำนวนหน้า





















ชื่อ	รูป	v	e	f
Triangular Antiprism (Octahedron)		6	12	8
Square Antiprism		8	16	10
Pentagonal Antiprism		10	20	12
Hexagonal Antiprism		12	24	14
Heptagonal Antiprism		14	28	16
Octagonal Antiprism		16	32	18
Enneagonal Antiprism		18	36	20
Decagonal Antiprism		20	40	22





















ภาพที่ 7 แอนติปริซึม ทั้ง 8 รูปแบบ โดยที่ v คือจำนวนจุดยอด, e คือจำนวนเส้นเชื่อม และ f คือจำนวนหน้า



บทนิยาม 2.8. ทรงตันจอห์นสัน หมายถึงทรงหลายหน้าที่เป็นทรงนูน และแต่ละหน้าเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ที่ไม่ใช่ทรงตันเพลโต ทรงตันอาร์คิมิดีส ปริซึม และแอนติปริซึม มีทั้งหมด 92 รูปแบบ ดังนี้

ชื่อ	รูป	v	e	f
Augmented Dodecahedron		21	35	16
Augmented Hexagonal Prism		13	22	11
Augmented Pentagonal Prism		11	19	10
Augmented Sphenocorona		11	26	17
Augmented Triangular Prism		7	13	8
Augmented Tridiminished Icosahedron		10	18	10
Augmented Truncated Cube		28	48	22
Augmented Truncated Dodecahedron		65	105	42
Augmented Truncated Tetrahedron		15	27	14
Biaugmented Pentagonal Prism		12	23	13
Biaugmented Triangular Prism		8	17	11
Biaugmented Truncated Cube		32	60	30
Bigyrate Diminished Rhombicosidodecahedron		55	105	52
Bilunabirotonda		14	26	14
Diminished Rhombicosidodecahedron		55	105	52
Triangular Dipyramid		5	9	6
Pentagonal Dipyramid		7	15	10
Disphenocingulum		16	38	24
Elongated Pentagonal Cupola		25	45	22
Elongated Pentagonal Dipyramid		12	25	15

ชื่อ	รูป	v	e	f
Elongated Pentagonal Gyrobicupola		30	60	32
Elongated Pentagonal Gyrobirotunda		40	80	42
Elongated Pentagonal Gyrocupolarotunda		35	70	37
Elongated Pentagonal Orthobicupola		30	60	32
Elongated Pentagonal Orthobirotunda		40	80	42
Elongated Pentagonal Orthocupolarotunda		35	70	37
Elongated Pentagonal Pyramid		11	20	11
Elongated Pentagonal Rotunda		30	55	27
Elongated Square Cupola		20	36	18
Elongated Square Dipyramid		10	20	12
Elongated Square Gyrobicupola		24	48	26
Elongated Square Pyramid		9	16	9
Elongated Triangular Cupola		15	27	14
Elongated Triangular Dipyramid		8	15	9
Elongated Triangular Gyrobicupola		18	36	20
Elongated Triangular Orthobicupola		18	36	20
Elongated Triangular Pyramid		7	12	7
Gyrate Bidiminished Rhombicosidodecahedron		50	90	42
Gyrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Gyrobifastigium		8	14	8

ชื่อ	รูป	v	e	f
Gyroelongated Pentagonal Bicapola		30	70	42
Gyroelongated Pentagonal Biotunda		40	90	52
Gyroelongated Pentagonal Cupola		25	55	32
Gyroelongated Pentagonal Cupolarotunda		35	80	47
Gyroelongated Pentagonal Pyramid		11	25	16
Gyroelongated Pentagonal Rotunda		30	65	37
Gyroelongated Square Bicapola		24	56	34
Gyroelongated Square Cupola		20	44	26
Gyroelongated Square Dipyramid		10	24	16
Gyroelongated Square Pyramid		9	20	13
Gyroelongated Triangular Bicapola		18	42	26
Gyroelongated Triangular Cupola		15	33	20
Hebesphenomegacorona		14	33	21
Metabiaugmented Dodecahedron		22	40	20
Metabiaugmented HexagonalPrism		14	26	14
Metabiaugmented Truncated Dodecahedron		70	120	52
Metabidiminished Icosahedron		10	20	12
Metabidiminished Rhombicosidodecahedron		50	90	42
Metabigyrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Metagyrate Diminished Rhombicosidodecahedron		55	105	52

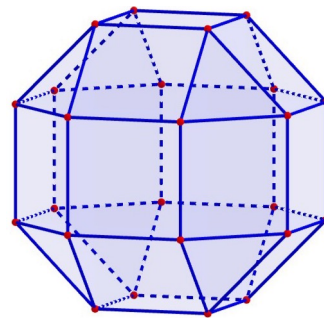
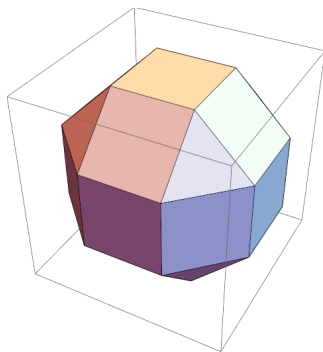
ชื่อ	รูป	v	e	f
Parabiaugmented Dodecahedron		22	40	20
Parabiaugmented HexagonalPrism		14	26	14
Parabiaugmented Truncated Dodecahedron		70	120	52
Parabidiminished Rhombicosidodecahedron		50	90	42
Parabigyrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Paragyrate Diminished Rhombicosidodecahedron		55	105	52
Pentagonal Cupola		15	25	12
Pentagonal Gyrobicupola		20	40	22
Pentagonal Gyrocupolarotunda		25	50	27
Pentagonal Orthobicupola		20	40	22
Pentagonal Orthobiotunda		30	60	32
Pentagonal Orthocupolarotunda		25	50	27
Pentagonal Rotunda		20	35	17
Square Pyramid		5	8	5
Pentagonal Pyramid		6	10	6
Snub Disphenoid		8	18	12
Snub Square Antiprism		16	40	26
Sphenocorona		10	22	14
Sphenomegacorona		12	28	18
Square Cupola		12	20	10

ชื่อ	รูป	v	e	f
Square Gyrobicupola		16	32	18
Square Orthobicupola		16	32	18
Triangular Cupola		9	15	8
Triangular Hebesphenorotunda		18	36	20
Triangular Orthobicupola		12	24	14
Triaugmented Dodecahedron		23	45	24
Triaugmented Hexagonal Prism		15	30	17
Triaugmented Triangular Prism		9	21	14
Triaugmented Truncated Dodecahedron		75	135	62
Tridiminished Icosahedron		9	15	8
Tridiminished Rhombicosidodecahedron		45	75	32
Trigrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62

ภาพที่ 8 ทรงตันอาร์คิมิดีส ทั้ง 92 รูปแบบ โดยที่ v คือจำนวนจุดยอด, e คือจำนวนเส้นเชื่อม และ f คือจำนวนหน้า

2.2 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (Elementary Graph Theory)

ทรงหลายหน้าทั้ง 110 รูปแบบ สามารถสังเกตเห็นโครงร่างได้ทั้งง่ายและยาก เพื่อความเข้าใจในการศึกษาครั้งนี้ ผู้ศึกษาจึงพิจารณาทรงหลายหน้าทั้งหมด โดยใช้ความสัมพันธ์ของจุดและเส้นลงบนกราฟ



ภาพที่ 9 Small Rhombicuboctahedron (ซ้าย) จากโปรแกรม Mathematica (ขวา) จากโปรแกรม Geogebra แสดงความสัมพันธ์ของจุดและเส้นลงบนกราฟ

บทนิยาม 2.9. [4] กราฟ (graph) G ประกอบด้วย 2 เซตคือ $V(G)$ และ $E(G)$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดและไม่เป็นเซตว่าง และ $E(G)$ เป็นเซตของคู่อันดับ (unordered pairs) ของสมาชิกของ $V(G)$ เรียกสมาชิกของ $V(G)$ ว่าจุด (vertices) และเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่าเส้น (edges) จะเขียนสัญลักษณ์แทนกราฟ G ด้วย $G(V, E)$

หมายเหตุ [4] กำหนดให้ $E(G)$ มีสมาชิกซ้ำกันได้

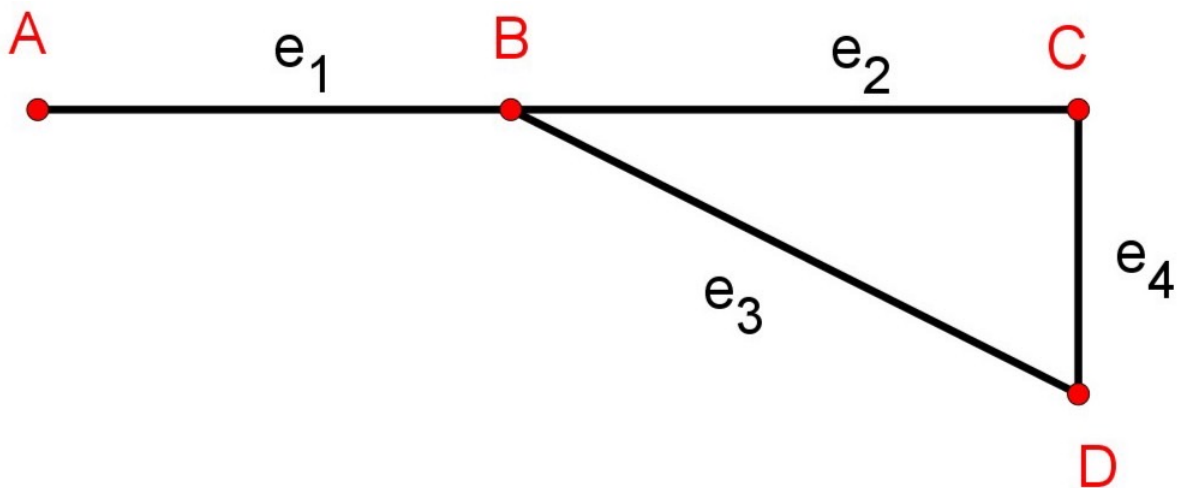
ถ้า e เป็นเส้นแล้ว e จะเขียนได้ในรูป $e = \{u, v\}$ สำหรับบางสมาชิก u และ v ที่เป็นสมาชิกของ $V(G)$ จะเรียก u และ v ว่า จุดปลายของเส้น e เพื่อความสะดวกจะแทน $e = \{u, v\}$ ด้วย uv โดยที่เส้น uv และเส้น vu หมายถึงเส้นเดียวกัน

บทนิยาม 2.10. [4] ให้ uv เป็นเส้นในกราฟ จะกล่าวว่า จุด u และจุด v ตกกระทบ (incident) กับเส้น uv และเส้น uv ตกกระทบกับจุด u และจุด v

บทนิยาม 2.11. [4] ให้จุด u และจุด v เป็นจุดในกราฟ จะกล่าวว่าจุดสองจุด ประชิด (adjacent) กัน ถ้าจุดทั้งสองเป็นจุดปลายของเส้นๆเดียวกัน ในทำนองเดียวกันจะกล่าวว่าเส้นสองเส้นประชิดกัน ถ้าเส้นทั้งสองมีจุดปลายร่วมกันหนึ่งจุด

บทนิยาม 2.12. [4] ดีกรี (degree) ของจุด v หมายถึง จำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุด v เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\deg(v)$

ตัวอย่าง 2.13. กำหนดกราฟ G ดังนี้



ภาพที่ 10 กราฟ G

1. จากนิยามตกกระทบ จะได้ว่า

จุด A และจุด B ตกกระทบกับเส้น e_1 นั่นคือเส้น e_1 ตกกระทบกับจุด A และจุด B

จุด B และจุด C ตกกระทบกับเส้น e_2 นั่นคือเส้น e_2 ตกกระทบกับจุด B และจุด C

จุด B และจุด D ตกกระทบกับเส้น e_3 นั่นคือเส้น e_3 ตกกระทบกับจุด B และจุด D

จุด C และจุด D ตกกระทบกับเส้น e_4 นั่นคือเส้น e_4 ตกกระทบกับจุด C และจุด D

2. จากนิยามประชิด จะได้ว่า

จุด A ประชิดกับ จุด B , จุด B ประชิดกับ จุด C , จุด B ประชิดกับ จุด D และ จุด C ประชิดกับ จุด D

3. จากนิยามดีกรี จะได้ว่า

$\deg(A) = 1, \deg(B) = 3, \deg(C) = 2$ และ $\deg(D) = 2$

บทนิยาม 2.14. [4] แนวเดิน(walk) ในกราฟ คือลำดับของจุดและเส้นซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดด้วยจุด โดยที่แต่ละเส้นจะตกกระทบกับจุดก่อนหน้าและจุดตามหลังที่อยู่ติดกันในลำดับ

รอยเดิน(trail) คือ แนวเดินที่เส้นทุกเส้นต่างกัน

กรณีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของแนวเดิน หรือรอยเดินเป็นจุดเดียวกัน เรียก แนวเดินปิด(close walk) และ รอยเดินปิด (close trail) ตามลำดับ

เรียกรอยเดินปิดที่ไม่มีจุดใดปรากฏมากกว่า 1 ครั้ง (ยกเว้นจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้าย) ว่า วัฏจักร(cycle) เพื่อความสะดวกจะเขียน แนวเดิน $v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$ ด้วย $v_0v_1v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$

ตัวอย่าง 2.15. จากกราฟ G ในตัวอย่าง 2.13 ได้ว่า

แนวเดิน ABC เป็นรอยเดิน แต่ไม่เป็นรอยเดินปิด

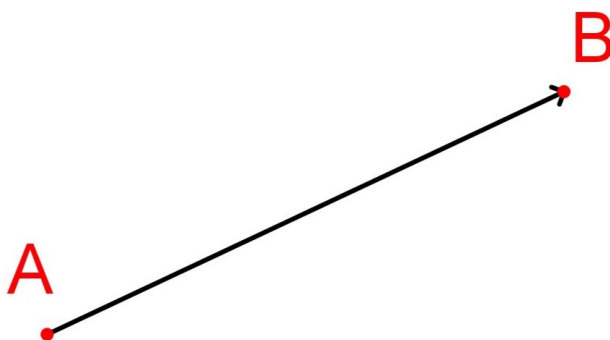
แนวเดิน ABA ไม่เป็นรอยเดิน เพราะใช้เส้น e_1 ซ้ำ

แนวเดิน BCD เป็นรอยเดินปิด และเป็นวัฏจักร

2.3 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ (Vectors in Three-Dimensional Space)

เพื่อศึกษาสมบัติทางเรขาคณิตในสามมิติ ในการศึกษาครั้งนี้จึงให้เวกเตอร์เป็นเครื่องมือหลักในการแก้ปัญหา โดยจะยกนิยามที่ใช้ในการศึกษาไว้ดังนี้

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเวกเตอร์ในการศึกษานี้จะเขียนแทนด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษที่มีลูกศรอยู่ด้านบน เช่น \vec{v} หากเวกเตอร์เกิดจากการลากรังสีจากจุด A ไปยังจุด B (หัวลูกศรอยู่ที่ B) จะใช้สัญลักษณ์ดังนี้ \vec{AB}



ภาพที่ 11 รังสี \vec{AB} หรือเวกเตอร์ \vec{AB}

บทนิยาม 2.16. [2] ขนาดหรือความยาวของเวกเตอร์ \vec{v} หมายถึงระยะทางระหว่างจุดเริ่มต้น และจุดปลายของ \vec{v} และสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $|\vec{v}|$ โดยที่

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad \text{ถ้า} \quad \vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$$

บทนิยาม 2.17. [2] ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของ \vec{u} และ \vec{v} เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ถ้า $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัด 3 มิติ โดยที่ \vec{i} คือ เวกเตอร์ 1 หน่วยในทิศทางตามแกน x , \vec{j} คือ เวกเตอร์ 1 หน่วยในทิศทางตามแกน y และ \vec{k} คือ เวกเตอร์ 1 หน่วยในทิศทางตามแกน z จะได้ว่า

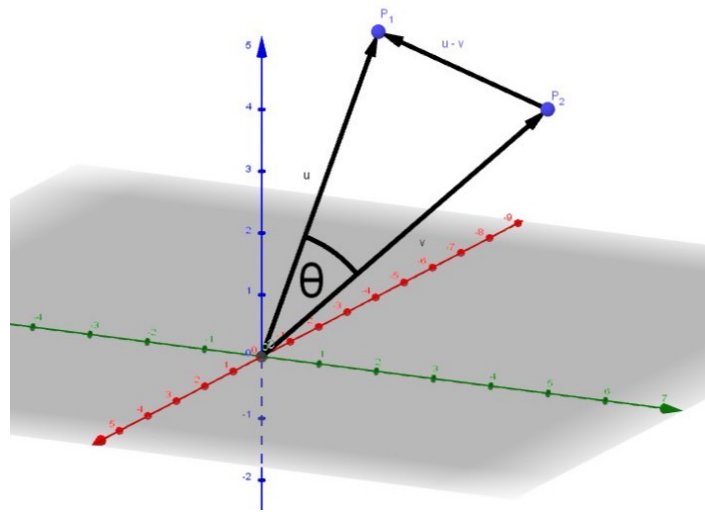
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ทฤษฎีบท 2.18. [2] ถ้า \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติซึ่งไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง \vec{u} และ \vec{v} ซึ่ง $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ จะได้ว่า

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

พิสูจน์. ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ใดๆที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง \vec{u} และ \vec{v} ซึ่ง $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

กำหนดจุด P_1 และ P_2 ที่ทำให้ $\vec{u} = \overrightarrow{OP_1}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{OP_2}$ ดังภาพ



ภาพที่ 12 จุด O , P_1 และ P_2

จะได้ $\overrightarrow{P_2P_1} = \vec{u} - \vec{v}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม OP_1P_2 จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$P_1P_2^2 = OP_1^2 + OP_2^2 - 2(OP_1)(OP_2) \cos \theta$$

นั่นคือ $|P_1P_2|^2 = |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2|OP_1||OP_2| \cos \theta$

ดังนั้น $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$

$$\text{ถ้า } \vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } \vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$

แต่เนื่องจาก $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$

จะได้ $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$

เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ดังนั้น $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$ □

บทแทรก 2.19. ให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ \vec{u} และ \vec{v} ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

ทฤษฎีบท 2.20. กำหนดให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติซึ่งไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ \vec{u} ตั้งฉากกับ \vec{v} ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

พิสูจน์. (\Rightarrow) จะพิสูจน์ว่า ถ้า \vec{u} ตั้งฉากกับ \vec{v} แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

จากทฤษฎีบท 2.18 กล่าวว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$

และเนื่องจาก \vec{u} ตั้งฉากกับ \vec{v} ได้ว่า $\theta = 90^\circ$

ดังนั้น $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 90^\circ = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot (0) = 0$

(\Leftarrow) จะพิสูจน์ว่า ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ แล้ว \vec{u} ตั้งฉากกับ \vec{v}

จากทฤษฎีบท 2.18 กล่าวว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$

นั่นคือ $0 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$ แต่เนื่องจาก \vec{u} และ \vec{v} ไม่เป็นเวกเตอร์ 0 ได้ว่า $|\vec{u}| \neq 0$ และ $|\vec{v}| \neq 0$

ดังนั้น $\cos \theta = 0$ จากทฤษฎีบท 2.18 มีเงื่อนไขว่า $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ จึงสรุปได้ว่า $\theta = 90^\circ$

นั่นคือ \vec{u} ตั้งฉากกับ \vec{v}

□

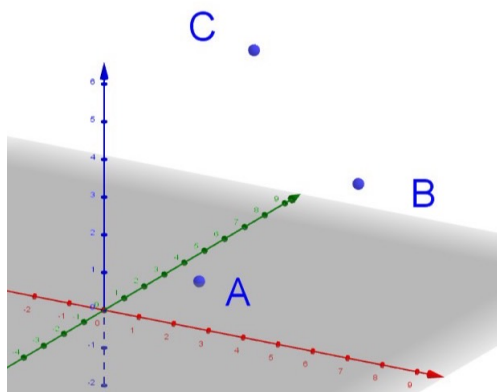
สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica

สมมติให้ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ โดยที่ P_0P_1 ประชิต P_0P_2 และมี P_0 เป็นจุดปลายร่วม จะใช้ฟังก์ชัน

$$\text{VectorAngle}[\{x_1, y_1, z_1\} - \{x_0, y_0, z_0\}, \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_0, y_0, z_0\}]$$

ผลลัพธ์ของฟังก์ชัน มุมจะมีหน่วยเป็น เรเดียน (radian) ซึ่งอาจติดค่าของ π หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น \arccos หากต้องการให้ค่าของมุมเป็นตัวเลขจะนำ $N[...]$ คลุมฟังก์ชันดังกล่าว

ตัวอย่าง 2.21. กำหนด จุด $A(1, 3, 0)$, $B(5, 4, 3)$ และ $C(2, 4, 6)$ ดังภาพที่ 13 ต้องการคำนวณค่ามุม \widehat{ABC}



ภาพที่ 13 จุด A , B และ C ในปริภูมิ 3 มิติ

พิจารณา $\overrightarrow{AB} = [1 - 5, 3 - 4, 0 - 3] = [-4, -1, -3]$ และได้ว่า $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}$

พิจารณา $\overrightarrow{CB} = [2 - 5, 4 - 4, 6 - 3] = [-3, 0, 3]$ และได้ว่า $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$

นั่นคือ $\cos \theta = \frac{[-4, -1, -3] \cdot [-3, 0, 3]}{\sqrt{26}\sqrt{18}} = \frac{12 + 0 + (-9)}{6\sqrt{13}} = \frac{3}{6\sqrt{13}} = \frac{1}{2\sqrt{13}}$

ได้ว่า $\theta = \arccos \frac{1}{2\sqrt{13}}$

สำหรับโปรแกรม Mathematica

Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 13.1 Student Edition - Personal Use Only
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

WOLFRAM MATHEMATICA | STUDENT EDITION

In[1]:= `VectorAngle[{1, 3, 0} - {5, 4, 3}, {2, 4, 6} - {5, 4, 3}]`

Out[1]= $\text{ArcCos}\left[\frac{1}{2\sqrt{13}}\right]$

In[2]:= `N[VectorAngle[{1, 3, 0} - {5, 4, 3}, {2, 4, 6} - {5, 4, 3}]]`

Out[2]= 1.43167

ภาพที่ 14 การคำนวณมุมระหว่าง \overrightarrow{AB} และ \overrightarrow{CB} ด้วยโปรแกรม Mathematica

บทนิยาม 2.22. ถ้า \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เมื่อ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ \vec{u} และ \vec{v} เขียนแทนด้วย $\vec{u} \times \vec{v}$ กำหนดโดย

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

หมายเหตุ นิยมเขียนผลลัพธ์ของ $\vec{u} \times \vec{v}$ ในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{โดยการกระจายตามแถวที่ 1} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} \end{aligned}$$

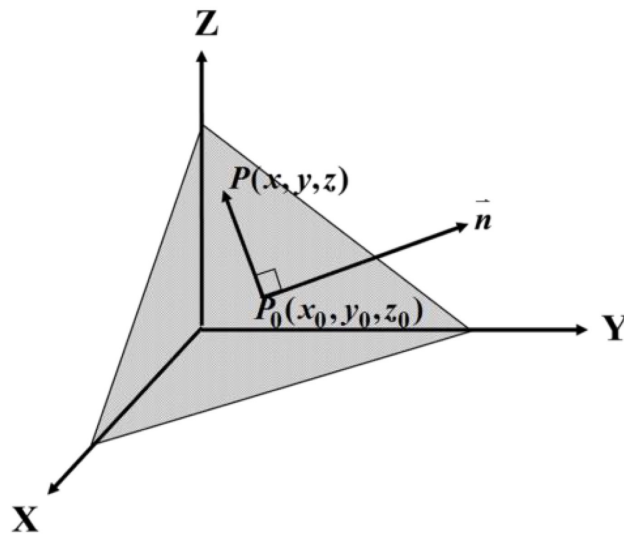
2.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ (Planes in Three-Dimensional Space)

[3] ในหัวข้อนี้จะเป็นการหาสมการระนาบในปริภูมิสามมิติ โดยสามารถหาจากจุดผ่านและเวกเตอร์ตั้งฉากกับระนาบ ทั้งนี้ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ประกอบด้วยระนาบพิกัด 3 ระนาบ ได้แก่

- ระนาบ XY (ระนาบซึ่งกำหนดตั้งสมการ $z = 0$)
- ระนาบ XZ (ระนาบซึ่งกำหนดตั้งสมการ $y = 0$)
- ระนาบ YZ (ระนาบซึ่งกำหนดตั้งสมการ $x = 0$)

ระนาบที่ผ่านจุด 1 จุดและตั้งฉากต่อเวกเตอร์ที่กำหนดให้[3]

ในปริภูมิ 3 มิติ ระนาบที่ผ่านจุด 1 จุดและตั้งฉากต่อเวกเตอร์ที่กำหนดให้จะมีเพียงระนาบเดียวเท่านั้น ระนาบที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และตั้งฉากต่อเวกเตอร์ $\vec{n} = [\alpha, \beta, \gamma] \neq 0$ ดังภาพที่ 15



ภาพที่ 15 ระนาบที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และตั้งฉากต่อเวกเตอร์ \vec{n} [3]

จากภาพจะเห็นว่าระนาบประกอบด้วยจุด $P(x, y, z)$ โดยที่เวกเตอร์ $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ ตั้งฉากกับ \vec{n} จะได้ว่า

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$[\alpha, \beta, \gamma] \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = 0$$

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

ดังนั้น สมการของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และตั้งฉากต่อเวกเตอร์ $\vec{n} = [\alpha, \beta, \gamma] \neq 0$ คือ

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)$$

เรียกสมการนี้ว่า รูปแบบปกติแบบจุด (point-normal form) ของสมการระนาบ
ถ้ากระจายสมการในรูปแบบปกติแบบจุด จะได้รูปแบบสมการใหม่เป็น

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

เมื่อ α, β, γ และ δ เป็นค่าคงตัว และ α, β, γ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการรูปแบบนี้ว่า รูปแบบทั่วไปของสมการระนาบ

ตัวอย่าง 2.23. [3] จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(1, -2, 3)$ และตั้งฉากต่อเวกเตอร์ $\vec{n} = [6, 5, 4]$

วิธีทำ. สมการของระนาบนี้คือ $6(x - 1) + 5(y + 2) + 4(z - 3) = 0$ หรือ $6x + 5y + 4z - 8 = 0$ □

ทฤษฎีบท 2.24. [3] ถ้า α, β, γ และ δ เป็นค่าคงตัว และ α, β, γ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน แล้วระนาบที่มีสมการ $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ มีเวกเตอร์ $\vec{n} = [\alpha, \beta, \gamma]$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก

เช่น ระนาบ $x - 3y - 7z = 12$ มีเวกเตอร์ $\vec{n} = [1, -3, -7]$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก

ทั้งนี้ระนาบที่ผ่านหนึ่งจุด และขนานกับเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน จะมีเพียงระนาบเดียว

ถ้าระนาบผ่านจุด P และขนานกับเวกเตอร์ \vec{u} และ \vec{v} ที่ไม่ขนานกันแล้วหาสมการระนาบได้โดยใช้หลักการของระนาบที่ผ่านจุด 1 จุด และเส้นตั้งฉากต่อเวกเตอร์ที่กำหนดให้ โดยเวกเตอร์ตั้งฉากต่อระนาบหาได้จาก $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ หรือ $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$

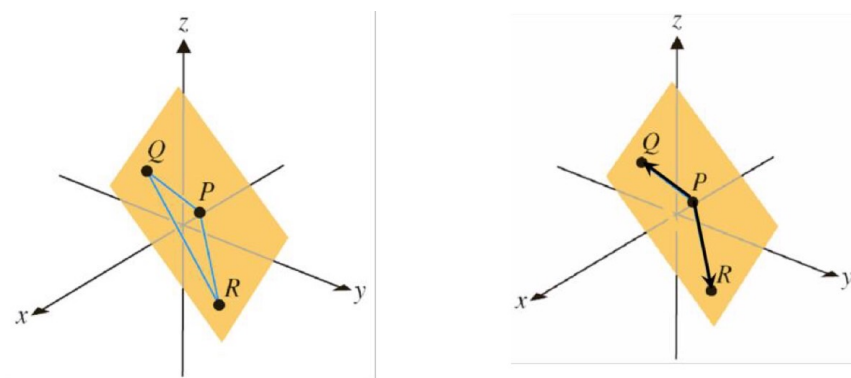
ตัวอย่าง 2.25. [3] จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(0, 5, -2)$ และขนานกับเวกเตอร์ \vec{A} และ \vec{B} เมื่อ $\vec{A} = [2, -1, 2]$ และ $\vec{B} = [-1, -2, 1]$

วิธีทำ. ให้ $\vec{n} = \vec{A} \times \vec{B}$ จะได้ว่า \vec{n} เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากต่อระนาบและ

$$\vec{n} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

ดังนั้น สมการของระนาบนี้คือ $3(x) - 4(y - 5) - 5(z + 2) = 0$ หรือ $3x - 4y - 5z + 10 = 0$ \square

[3] ถ้าระนาบที่ผ่านจุด 3 จุด P, Q และ R ดังภาพที่ 16 แล้วสามารถหาสมการระนาบได้เช่นเดียวกัน โดยระนาบที่ผ่านจุด 3 จุดซึ่งไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน จะมีเพียงระนาบเดียว โดยการสร้างเวกเตอร์ \vec{PQ} และ \vec{PR} ซึ่งเวกเตอร์ตั้งฉากต่อระนาบหาได้จาก $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$ และเลือกจุด P เป็นจุดที่ระนาบผ่าน



ภาพที่ 16 ระนาบที่ผ่านจุด P, Q และ R

ตัวอย่าง 2.26. [3] จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(2, 1, 1)$, $Q(0, 4, 1)$ และ $R(-2, 1, 4)$

วิธีทำ. สร้างเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน 2 เวกเตอร์ในนี้คือเวกเตอร์ \vec{PQ} และ \vec{PR} โดยที่

$$\vec{PQ} = [0 - 2, 4 - 1, 1 - 1] = [-2, 3, 0]$$

$$\vec{PR} = [-2 - 2, 1 - 1, 4 - 1] = [-4, 0, 3]$$

หาเวกเตอร์ตั้งฉากต่อระนาบนี้ซึ่งหาได้จาก

$$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$$

ดังนั้น สมการของระนาบนี้คือ $9(x - 2) + 6(y - 1) + 12(z - 1) = 0$ \square

การตรวจสอบการอยู่บนระนาบเดียวกัน ระนาบที่ผ่านจุด 3 จุด ซึ่งจุดทั้งสามไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน จะมีเพียงระนาบเดียว และหากต้องการทราบว่าจุด S (จุดที่ 4) $S = (x_4, y_4, z_4)$ เป็นจุดบนระนาบที่สร้างมาหรือไม่ ให้นำแต่ละพิกัดของ S ไปแทนในสมการระนาบ นั่นคือ นำ x_4, y_4, z_4 ไปแทนตัวแปร x, y, z ในสมการระนาบตามลำดับ หากค่าที่ได้ออกมาเท่ากับ 0 แสดงว่าจุดที่ 4 อยู่บนระนาบดังกล่าว หากค่าที่ได้ออกมาไม่เท่ากับ 0 แสดงว่าจุดที่ 4 ไม่อยู่บนระนาบดังกล่าว

สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica

สมมติให้ $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ การตรวจสอบว่าจุดทั้ง 3 อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่จะใช้ฟังก์ชัน

$$\text{CoplanarPoints}[\{x_0, y_0, z_0\}, \{x_1, y_1, z_1\}, \{x_2, y_2, z_2\}]$$

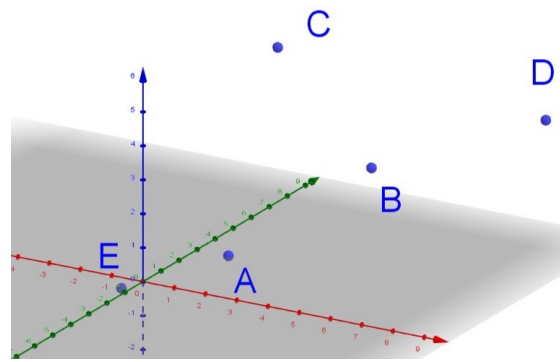
หากต้องการตรวจสอบความเป็นระนาบ n จุด จะต้องเพิ่มพิกัดของจุดถัดไปจากพิกัดที่ 3 ดังนี้

$$\text{CoplanarPoints}[\{x_0, y_0, z_0\}, \{x_1, y_1, z_1\}, \{x_2, y_2, z_2\}, \dots, \{x_n, y_n, z_n\}]$$

ผลลัพธ์ของฟังก์ชัน คือ True เมื่อจุดที่ต้องการพิจารณาข้างต้นอยู่บนระนาบเดียวกัน และ False เมื่อจุดที่ต้องการพิจารณาข้างต้นไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.27. กำหนด จุด $A(1, 3, 0)$, $B(5, 4, 3)$, $C(2, 4, 6)$, $D(10, 5, 5)$ และ $E(-3, 4, -2)$ ดังภาพที่ 17 ต้องการทราบว่า

1. จุด D อยู่บนระนาบ ABC หรือไม่
2. จุด E อยู่บนระนาบ ABC หรือไม่



ภาพที่ 17 จุด A, B, C, D และ E ในปริภูมิ 3 มิติ

วิธีทำ. 1. สร้างเวกเตอร์ \vec{AB} และ \vec{CB}

จากตัวอย่าง 2.21 ได้ว่า $\vec{AB} = [-4, -1, -3]$ และ $\vec{CB} = [-3, 0, 3]$

2. คำนวณเวกเตอร์ตั้งฉาก $\vec{AB} \times \vec{CB}$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{CB} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -3\vec{i} + 21\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

3. จะได้สมการระนาบ คือ

$$-3(x - 5) + 21(y - 4) - 3(z - 3) = 0$$

4. ทดสอบจุด $D(10, 5, 5)$

กำหนดให้ $f(x, y, z) = -3(x - 5) + 21(y - 4) - 3(z - 3)$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f(10, 5, 5) &= -3(10 - 5) + 21(5 - 4) - 3(5 - 3) \\ &= -3(5) + 21(1) - 3(2) \\ &= -15 + 21 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า จุด $D(10, 5, 5)$ อยู่บนระนาบเดียวกับระนาบ ABC

5. ทดสอบจุด $E(-3, 4, -2)$

กำหนดให้ $f(x, y, z) = -3(x - 5) + 21(y - 4) - 3(z - 3)$

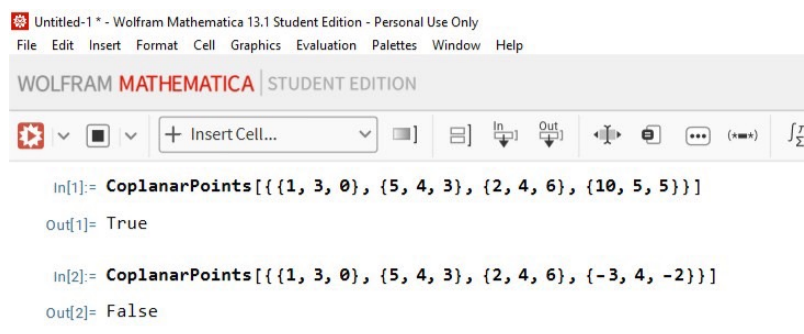
พิจารณา

$$\begin{aligned} f(-3, 4, -2) &= -3(10 - (-3)) + 21(5 - 4) - 3(5 - (-2)) \\ &= -3(13) + 21(1) - 3(7) \\ &= -39 + 21 - 21 \\ &= -39 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า จุด $E(-3, 4, -2)$ ไม่อยู่บนระนาบเดียวกับระนาบ ABC

□

สำหรับโปรแกรม Mathematica



```

Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 13.1 Student Edition - Personal Use Only
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
WOLFRAM MATHEMATICA | STUDENT EDITION
+ Insert Cell...
In[1]:= CoplanarPoints[{{1, 3, 0}, {5, 4, 3}, {2, 4, 6}, {10, 5, 5}}]
Out[1]= True
In[2]:= CoplanarPoints[{{1, 3, 0}, {5, 4, 3}, {2, 4, 6}, {-3, 4, -2}}]
Out[2]= False

```

ภาพที่ 18 การคำนวณจุด D และจุด E เพื่อแสดงว่าอยู่บนระนาบ ABC หรือไม่
ด้วยโปรแกรม Mathematica

บทที่ 3

การแจงนับทรงหลายหน้า (Enumerations of polyhedra)

ในการศึกษาครั้งนี้เราศึกษาปัญหาการแจงนับทรงหลายหน้าที่มีสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขที่เราสนใจ โดยก่อนอื่นจะเริ่มต้นจากการพิจารณาเงื่อนไขการแยกของทรงหลายหน้า ซึ่งมีความคล้ายคลึงกับแนวทางการประกอบโคม ลานนาดังแสดงในบทที่ 1

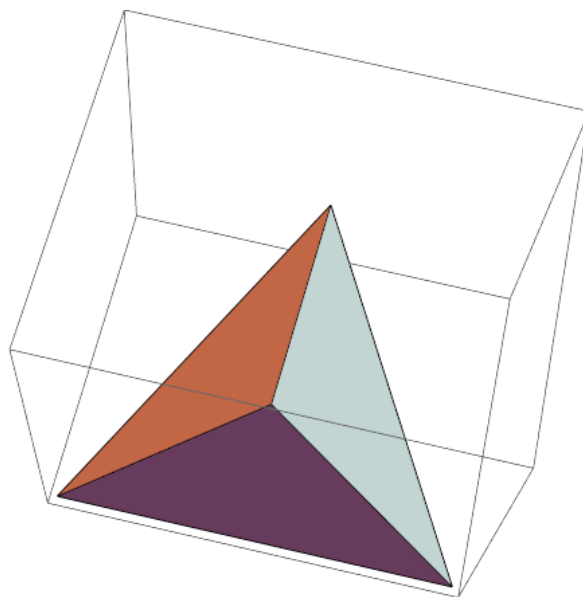
3.1 สมมติฐานของปัญหา (Assumption of the problem)

ในการศึกษานี้ เราจะทำการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นรูปหลายเหลี่ยม เราจึงพิจารณาข้อสมมติฐานของ ปัญหาที่สอดคล้องดังนี้

1. รูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบ ต้องเป็นรูปหลายเหลี่ยมบวระนาบ
2. แต่ละจุดของทรงหลายหน้าจะถูกเชื่อมจากจุดของรูปหลายเหลี่ยม
3. ทุกเส้นขอบของทรงหลายหน้า คือเส้นขอบของรูปหลายเหลี่ยม
4. ขอบแต่ละด้านจะไม่ซ้อนทับกัน ยกเว้นจุดสิ้นสุด และไม่มีขอบใดวางอยู่ภายในรูปทรงหลายหน้า
5. รูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบ ต้องไม่เป็นหน้าของทรงหลายหน้า

เมื่อพิจารณาทรงหลายหน้าในรูปกราฟในสามมิติจะพบว่าทรงหลายหน้าประเภทต่างๆ มีข้อมูลของ จุดยอด พิกัดของจุดยอด เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด จุดยอดที่เป็นหน้าของทรงหลายหน้าแต่ละหน้า โดยรวบรวมไว้ที่ โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ (Mathematica) ซึ่งในงานค้นคว้าอิสระนี้จะใช้ข้อมูลดังกล่าวในการคำนวณ อาทิ

ตัวอย่าง 3.1. ข้อมูลของทรงสี่หน้า (tetrahedron)



ภาพที่ 19 ทรงสี่หน้า

- จุดยอด (ตามลำดับของดัชนี)

$$\left\{0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right\}, \left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right\}, \left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right\}$$

- เส้นเชื่อม

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$$

- จุดยอดที่เป็นหน้าของทรงหลายหน้าแต่ละหน้า

$$\{2, 3, 4\}, \{3, 2, 1\}, \{4, 1, 2\}, \{1, 4, 3\}$$

3.2 เงื่อนไขการแจงนับ (Conditions of enumeration)

จากสมมติฐาน 1 และ 2 เราพิจารณาการนำรูปหลายเหลี่ยมมาประกอบกัน โดยเชื่อมกันด้วยจุด ทั้งนี้ภายใต้สมมติฐาน 4 และ 5 จะทำให้

1. จุดที่ถูกเชื่อม มีดีกรีเป็น $2n$ เมื่อประกอบรูปหลายเหลี่ยม n รูป ณ จุดดังกล่าว
2. จะไม่มีจุดใดมีดีกรีเท่ากับ 2 เพราะจะทำให้หน้าที่ล้อมรอบจุดดังกล่าว ไม่เป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ ซึ่งขัดแย้งกับนิยามของ ทรงหลายหน้า นั่นคือจุดทุกจุดต้องเป็นจุดเชื่อมจากรูปหลายเหลี่ยมตั้งแต่ 2 รูปขึ้นไป

ดังนั้น จุดทุกจุดต้องมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ และมีดีกรีมากกว่า 2 จึงเป็นเงื่อนไขการแจงนับ

3.3 ขั้นตอนวิธีในการแจงนับ

เพื่อสร้างขั้นตอนวิธีในการแจงนับทรงหลายหน้าที่มีสมบัติสอดคล้องกับสิ่งที่เราต้องการ เราจะพิจารณาสมบัติของทรงหลายหน้า โดยนิยามคำศัพท์พื้นฐานเพื่อใช้ประกอบการแจงนับดังนี้

สมมติให้ $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ เป็นเซตของจุดยอดของทรงหลายหน้า และ $f_i = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ เป็นเซตของหน้าที่ i ซึ่ง $f_i \subseteq V$ และ f_i คือเซตของจุดยอดทั้งหมดของหน้า f_i

บทนิยาม 3.2.

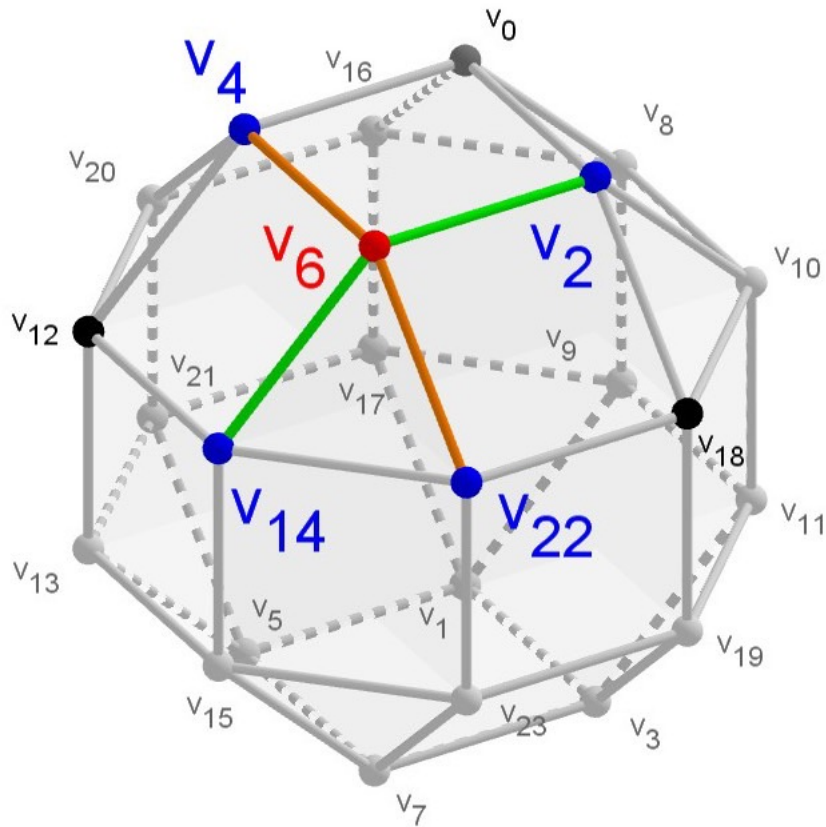
ให้ ABC เป็นจุดยอดของทรงหลายหน้า โดยที่ A ประชิดกับ B และ A ประชิดกับ C และ $\deg(A) = 4$ จะกล่าวว่า

1. AB ประชิดติดกัน (closely adjacent) กับ AC ถ้า A, B, C อยู่บนหน้าเดียวกัน
2. AB ประชิดตรงข้ามกับ (oppositely adjacent) AC ถ้า A, B, C ไม่อยู่บนหน้าเดียวกัน

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือจุด B ติดกันกับจุด C โดยมี A เป็นจุดอ้างอิงก็ต่อเมื่อ AB ประชิดติดกันกับ AC โดยมี A เป็นจุดปลายร่วม เพื่อความกระชับสามารถเรียกโดยย่อว่า **จุด B ติดกันกับจุด C**

และจะกล่าวว่า B ตรงข้ามกับจุด C โดยมี A เป็นจุดอ้างอิงก็ต่อเมื่อ AB ประชิดตรงข้ามกับ AC โดยมี A เป็นจุดปลายร่วม เพื่อความกระชับสามารถเรียกโดยย่อว่า **จุด B ตรงข้ามกับจุด C**

ตัวอย่าง 3.3. กำหนดจุด v_2, v_4, v_6, v_{14} และ v_{22} ดังภาพที่ 20



ภาพที่ 20 จุด v_2, v_4, v_6, v_{14} และ v_{22} บนทรงหลายหน้า

สังเกตว่าจากภาพ v_6 ประชิดกับ v_2, v_4, v_{14} และ v_{22}

พิจารณา หน้าของทรงหลายหน้าข้างต้น พบว่า v_2, v_6 และ v_4 อยู่บนหน้าของทรงหลายหน้า $f := \{v_0, v_2, v_6, v_4\}$ หน้าเดียวกัน

สรุปได้ว่า v_6v_2 ประชิดติดกันกับ v_6v_4

ในทำนองเดียวกัน.

1. v_6v_2 ประชิดติดกันกับ v_6v_{22}
2. v_6v_{22} ประชิดติดกันกับ v_6v_{14}
3. v_6v_{14} ประชิดติดกันกับ v_6v_4

□

จากตัวอย่างเดียวกันนี้ สังเกตว่า v_6, v_4 และ v_{12} ไม่อยู่บนหน้าเดียวกัน

สรุปได้ว่า v_6v_4 ประชิดตรงข้ามกับ v_6v_{22}

ในทำนองเดียวกัน. v_6v_{14} ประชิดตรงข้ามกับ v_6v_2

□

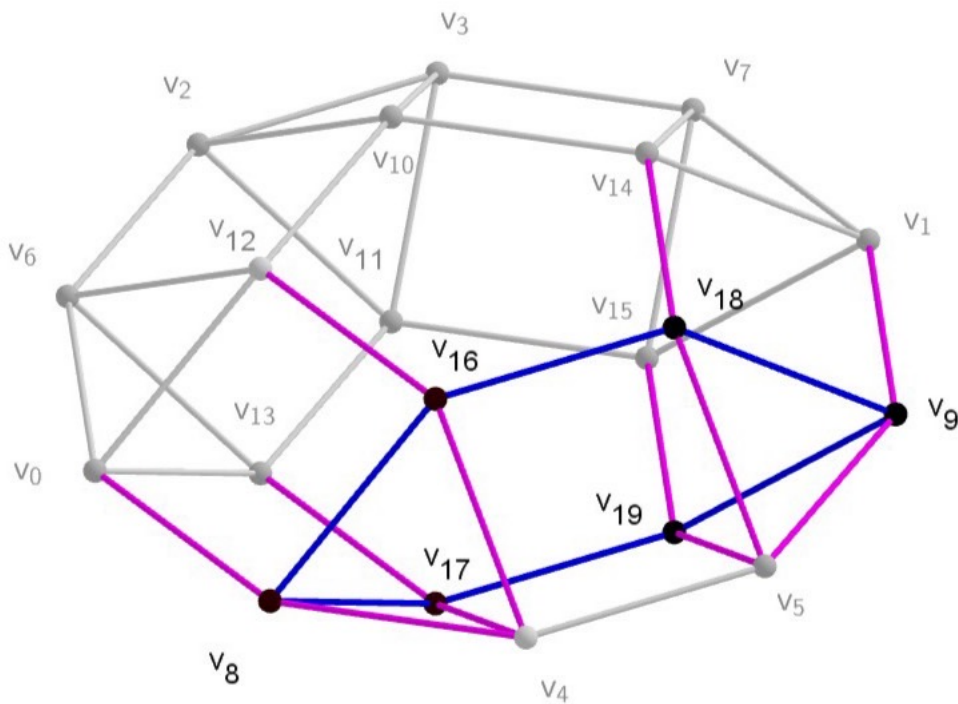
ในขั้นตอนสุดท้ายของการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นรูปหลายเหลี่ยม เราจะต้องบอกได้ว่ารูปที่ได้ออกมาเป็นรูปอะไร ในการจำแนกรูปเราจึงใช้วิธีการเดินตามเส้นกราฟในรูปแบบวัฏจักร (cycle) เพื่อให้ได้วัฏจักรของรูปหลายเหลี่ยมโดยจะกล่าวเป็น วัฏจักรเดินตรงข้ามดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.4. วัฏจักรเดินตรงข้าม

ให้ $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ เป็นเซตของจุดยอดของทรงหลายหน้า และสมมติให้ $f_i := \{v'_0, v'_1, \dots, v'_k\}$ เป็นเซตของจุดยอดของหน้าที่ i โดยที่เรียงลำดับแนวเดิน โดย $v'_i = v_j$ โดย $v_j \in V$ จะกล่าวว่า แนวเดิน $v'_0 v'_1 v'_2 \dots v'_k$ เป็นวัฏจักรเดินตรงข้าม (oppositely cycle) ก็ต่อเมื่อ

1. แนวเดิน $v'_0 v'_1 v'_2 \dots v'_k$ เป็นวัฏจักร
2. สมาชิกของแนวเดินลำดับที่ i เป็นจุดปลายร่วมของสมาชิกของแนวเดินลำดับที่ $i + 1$ และ $i - 1$ สำหรับ $1 \leq i \leq k - 1$
3. ทุกสมาชิกลำดับคู่ที่ติดกัน และสมาชิกลำดับคี่ที่ติดกันเป็นจุดตรงข้ามกัน

ตัวอย่าง 3.5. กำหนดจุด $v_8, v_{16}, v_{18}, v_9, v_{19}$ และ v_{17} ดังภาพที่ 21



ภาพที่ 21 จุด $v_8, v_{16}, v_{18}, v_9, v_{19}$ และ v_{17} บนทรงหลายหน้า

พิจารณารอยเดินปิด $v_8 v_{16} v_{18} v_9 v_{19} v_{17} v_8$ (รอยเดินสีน้ำเงินในภาพที่ 21) เป็นวัฏจักร และแต่ละจุดเป็นจุดปลายร่วมของจุดประชิดกัน และเมื่อพิจารณาลำดับของรอยเดิน $v_8 v_{16} v_{18} v_9 v_{19} v_{17} v_8$ ตามดัชนี จะแบ่งเป็นสมาชิกลำดับคู่และสมาชิกลำดับคี่ดังนี้

- สมาชิกลำดับคู่ : v_{16}, v_9, v_{17}
- สมาชิกลำดับคี่ : v_8, v_{18}, v_{19}

จากบทนิยาม 3.2 สามารถกล่าวได้ว่าจุด v_{16} ตรงข้ามกับจุด v_9, v_9 ตรงข้ามกับจุด v_{17}, v_8 ตรงข้ามกับจุด v_{18} และ v_{18} ตรงข้ามกับจุด v_{19} นั่นคือ ทุกสมาชิกลำดับคู่ที่ติดกัน และสมาชิกลำดับคี่ที่ติดกันเป็นจุดตรงข้ามกัน ดังนั้น $v_8 v_{16} v_{18} v_9 v_{19} v_{17} v_8$ เป็นวัฏจักรเดินตรงข้าม

จากแนวเดินปิดที่เป็นวัฏจักรเดินตรงข้าม $v_0 v_1 v_2 \dots v_k$ (ตำแหน่งแรกและตำแหน่งสุดท้ายคือจุดเดียวกัน) หากลดตำแหน่งสุดท้ายไว้ในฐานที่เข้าใจ $v_0 v_1 v_2 \dots v_{k-1}$ จะเรียกว่า วัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูป (oppositely cycle reduce)

หมายเหตุ การวนตำแหน่งของสมาชิกที่เป็นวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูป (left shift, right shift operator) ยังทำให้สมาชิกที่เกิดจากการวนเป็นวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูป เช่น $v_0 v_1 v_2 \dots v_{k-1}$ วนโดยการนำสมาชิกตัวท้ายมาไว้หน้าสมาชิกทั้งหมด n ครั้ง จะได้ $v_{k-n} v_{k-n+1} \dots v_{k-1} v_0 \dots v_{k-n-1}$ หากเติมตำแหน่งสุดท้ายด้วยสมาชิกตัวแรกแล้ว จะสอดคล้องกับบทนิยามทั้ง 3 ข้อ ของวัฏจักรเดินตรงข้าม

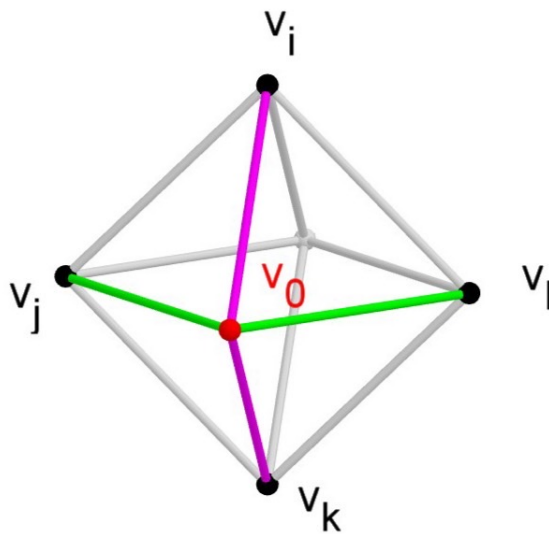
บทนิยาม 3.6. สมาชิก 3 ลำดับที่ติดกันของวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูป จะเรียกว่า 3 จุดของวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกัน

หมายเหตุ สามจุดของวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกัน $v_0 v_1 v_2$ สอดคล้องกับจุดตรงข้ามกันโดยที่จุด v_0 ตรงข้ามกับจุด v_2 โดยมี v_1 เป็นจุดอ้างอิง

3.4 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน

ในการแยกทรงหลายหน้าเป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ จะทำการตรวจสอบเงื่อนไขของมุมจากจุดตรงข้าม และจุดอ้างอิงของทุกจุดเท่านั้น

ให้ v_0 เป็นจุดอ้างอิง โดยที่ v_0 ประชิดกับ v_i, v_j, v_k และ v_l อีกทั้งจุด v_i ตรงข้ามกับจุด v_k และ v_j ตรงข้ามกับจุด v_l ดังภาพที่ 22



ภาพที่ 22 จุด v_0, v_i, v_j, v_k และ v_l บนทรงหลายหน้า

เก็บข้อมูลขนาดของมุม $v_i v_0 v_k$ และ มุม $v_j v_0 v_l$ และเก็บข้อมูลขนาดของมุมในลักษณะเดียวกันนี้จนครบทุกจุดของทรงหลายหน้า และนำสมาชิกของขนาดของมุมยูเนียนกัน

- หากสมาชิกของขนาดของมุมที่ยูเนียนแล้ว มีสมาชิกเพียงหนึ่งสมาชิก สามารถสรุปได้ว่า ทรงหลายหน้าข้างต้นเกิดจากการประกอบรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน
- หากสมาชิกของขนาดของมุมที่ยูเนียนแล้ว มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งสมาชิก ไม่สามารถสรุปได้ว่า ทรงหลายหน้าข้างต้นเกิดจากการประกอบรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน

อย่างไรก็ตาม หากขนาดของมุมเท่ากันทั้งหมด หรือสมาชิกของขนาดของมุมที่อยู่เนียงแล้ว มีสมาชิกเพียงหนึ่งสมาชิก เรายังมีความจำเป็นต้องตรวจสอบการอยู่บนระนาบเดียวกัน

3.5 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ

ในกรณีนี้เป็นกรณีทั่วไปมากยิ่งขึ้นจากหัวข้อ 3.4 เราจึงทำการตรวจสอบการอยู่บนระนาบเดียวกันเพื่อตรวจสอบการประกอบกันของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ โดยไม่จำเป็นต้องเป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ สำหรับวิธีนี้จะเก็บเซตของจุดตรงข้ามและจุดอ้างอิง ทั้งหมดของทรงหลายหน้า และทำการสร้างวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูป โดยระหว่างสร้างวัฏจักรจะมีการตรวจสอบจุดที่ใช้ในการสร้างวัฏจักรว่าอยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

ซึ่งกล่าวโดยสรุปทำให้แบ่งการดำเนินการเขียนโปรแกรมออกเป็น 3 ขั้นตอนได้ดังนี้

1. การแจกจ่ายด้วยเงื่อนไขของจุดทุกจุดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่

นำเข้าข้อมูล (input)

1. ชื่อของทรงหลายหน้าทั้ง 110 รูปแบบ
2. ตำแหน่งพิกัดจุดของทรงหลายหน้าเรียงตามดัชนี
3. เซตดัชนีของจุด 2 จุดที่เป็นเส้นของของทรงหลายหน้า (จุด 2 จุดที่ประชิดกัน)


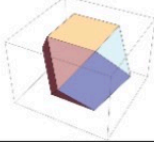
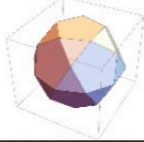
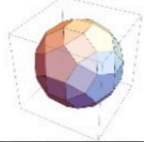
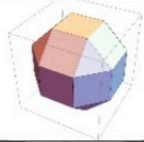



กระบวนการ (procedure)




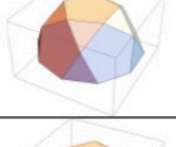
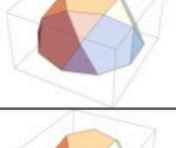
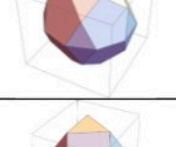
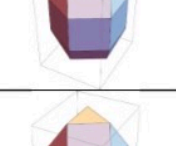
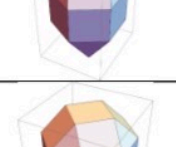
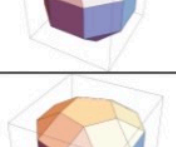
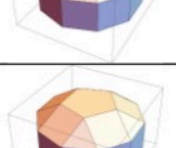
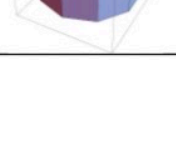
1. นับสมาชิกดัชนี จากในเซตดัชนีของจุด 2 จุดที่เป็นเส้นของของทรงหลายหน้า
 - 1.1. หากค่าที่ได้เป็นจำนวนคู่ นับดัชนีตัวถัดไป
 - 1.2. หากค่าที่ได้เป็นจำนวนคี่ หยุดการนับและพิจารณารูปแบบถัดไป







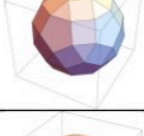
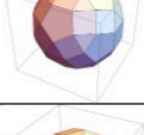
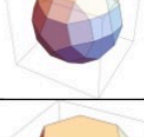

แสดงผลข้อมูล (output)

1. รูปทรงหลายหน้าที่ผ่านเงื่อนไขดีกรีเป็นจำนวนคู่
2. ชื่อของทรงหลายหน้าดังกล่าว

จากการตรวจสอบทำให้พบว่ามีทรงหลายหน้าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดีกรีคู่ มีจำนวน 29 รูปแบบ ซึ่งจะใช้ทรงหลายหน้าทั้ง 29 รูปแบบในการตรวจสอบเงื่อนไขในขั้นตอนถัดไป โดยทรงหลายหน้าทั้ง 29 รูปแบบที่ผ่านเงื่อนไขข้างต้นมีต่อไปนี้

ឈ្មោះ	រូប	v	e	f
Octahedron		6	12	8
Cuboctahedron		12	24	14
Icosidodecahedron		30	60	32
Small Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Small Rhombicuboctahedron		24	48	26
Elongated Square Dipyramid		10	20	12
Triangular Orthobicupola		12	24	14
Square Orthobicupola		16	32	18

ชื่อ	รูป	v	e	f
Square Gyrobicupola		16	32	18
Pentagonal Orthobicupola		20	40	22
Pentagonal Gyrobicupola		20	40	22
Pentagonal Orthocupolarotunda		25	50	27
Pentagonal Gyrocupolarotunda		25	50	27
Pentagonal Orthobirotunda		30	60	32
Elongated Triangular Orthobicupola		18	36	20
Elongated Triangular Gyrobicupola		18	36	20
Elongated Square Gyrobicupola		24	48	26
Elongated Pentagonal Orthobicupola		30	60	32
Elongated Pentagonal Gyrobicupola		30	60	32

ชื่อ	รูป	v	e	f
Elongated Pentagonal Orthocupolarotunda		35	70	37
Elongated Pentagonal Gyrocupolarotunda		35	70	37
Elongated Pentagonal Orthobirotunda		40	80	42
Elongated Pentagonal Gyrobirotunda		40	80	42
Triaugmented Hexagonal Prism		15	30	17
Gyrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Parabigyrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Metabigyrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Trigyrate Rhombicosidodecahedron		60	120	62
Triangular Hebesphenorotunda		18	36	20

ภาพที่ 23 ผลลัพธ์การแจกแจงนับด้วยเงื่อนไขของจุดทุกจุดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ และดีกรีของแต่ละทรงหลายหน้า

2. การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน

เพื่อตรวจสอบทรงหลายหน้ามีสมบัติที่สอดคล้องกับการคัดเลือกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของมุม จึงนำทรงหลายหน้าที่ผ่านการกรองด้วยขั้นตอนที่ 1 เข้าสู่กระบวนการดังนี้

นำเข้าข้อมูล (input)

1. ชื่อของทรงหลายหน้าทั้ง 29 รูปแบบ
2. ตำแหน่งพิกัดจุดของทรงหลายหน้าเรียงตามดัชนี
3. เซตดัชนีของจุด 2 จุดที่เป็นเส้นของของทรงหลายหน้า (จุด 2 จุดที่ประชิดกัน)
4. เซตดัชนีของจุดที่เป็นจุดยอดของแต่ละหน้าตัดบนทรงหลายหน้า

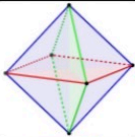
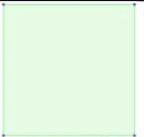
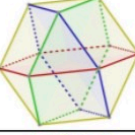

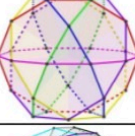
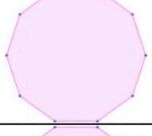
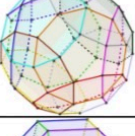
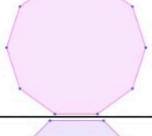
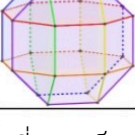
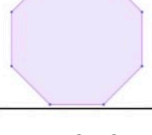
กระบวนการ (procedure)

1. หาจุดติดกันโดยมี i เป็นจุดอ้างอิง
2. หาจุดตรงข้ามโดยมี i เป็นจุดอ้างอิง
3. สร้างจุดสามจุดโดยประกอบด้วย จุดตรงข้ามจุดที่หนึ่ง จุดอ้างอิง และจุดตรงข้ามจุดที่สอง ตามลำดับ
4. คำนวณมุมจากสามจุดที่สร้างในขั้นตอนที่ 3.
5. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 1-4 โดยเปลี่ยนดัชนีของ i ให้ครบทุกจุดของทรงหลายหน้าดังกล่าว
6. พิจารณาการยูเนียนของสมาชิกจากขนาดของมุมที่ได้จากขั้นตอนที่ 5. ทั้งหมด
 - 6.1. หากมีเพียงคำตอบเดียว จะนำแสดงผลและค่ามุมไปคำนวณรูปหลายเหลี่ยมและจำนวนของรูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบกัน
 - 6.2. หากมีหลายคำตอบ จะไม่แสดงผล และจะพิจารณาทรงหลายหน้าถัดไป

แสดงผลข้อมูล (output)

1. รูปทรงหลายหน้าที่ผ่านเงื่อนไขของมุม (มุมทุกมุมมีค่าเท่ากัน)
2. ชื่อของทรงหลายหน้าดังกล่าว
3. จำนวนของรูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบ
4. รูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบ

การคัดเลือกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของมุม มีทรงหลายหน้าที่ผ่านเงื่อนไข 3.4 และสามารถแยกเป็นรูปหลายเหลี่ยม ทั้งหมด 5 รูปแบบ ดังนี้

ชื่อ	รูป	แฟ้มสี่ของรูปหลายเหลี่ยม	
Octahedron		3 of	
Cuboctahedron		4 of	
Icosidodecahedron		6 of	
Small Rhombicosidodecahedron		12 of	
Small Rhombicuboctahedron		6 of	

ภาพที่ 24 ผลลัพธ์ของการแยกทรงหลายหน้าที่ออกเป็นแฟ้มสี่ของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน

3. การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟ้มสี่ของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ

เพื่อตรวจสอบทรงหลายหน้าที่มีสมบัติที่สอดคล้องกับการคัดเลือกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของความเป็นระนาบ จึงนำทรงหลายหน้าที่ผ่านการกรองด้วยขั้นตอนที่ 1 เข้าสู่กระบวนการดังนี้

นำเข้าข้อมูล (input)

- ชื่อของทรงหลายหน้าทั้ง 29 รูปแบบ
- ตำแหน่งพิกัดจุดของทรงหลายหน้าเรียงตามดัชนี
- เซตดัชนีของจุด 2 จุดที่เป็นเส้นของของทรงหลายหน้า (จุด 2 จุดที่ประชิดกัน)
- เซตดัชนีของจุดที่เป็นจุดยอดของแต่ละหน้าตัดบนทรงหลายหน้า

กระบวนการ (procedure)

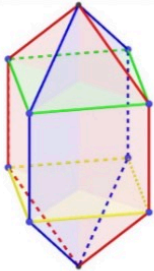


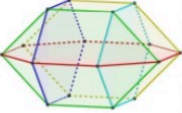
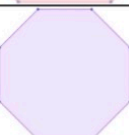

- หาจุดติดกันโดยมี i เป็นจุดอ้างอิง
- หาจุดตรงข้ามโดยมี i เป็นจุดอ้างอิง
- สร้าง 3 จุดของวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกัน
- สร้างเซตเพื่อรวบรวม 3 จุดของวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกัน
- ทำซ้ำขั้นตอนที่ 1-4 โดยเปลี่ยนดัชนีของ i ให้ครบทุกจุดของทรงหลายหน้าดังกล่าว จะได้เซตของ 3 จุดของวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกันสะสม
- สร้างวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปพร้อมทั้งตรวจสอบความเป็นระนาบหลังจากขั้นตอนการหาสมาชิกตัวถัดไป

- 6.1. หากสมาชิกจุดทั้งหมดในเซตเก็บสมาชิก อยู่บนระนาบเดียวกัน จะพิจารณาจุดต่อไปจนครบวัฏจักร เดินตรงข้ามลดรูป เมื่อครบวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปแล้ว เซตดังกล่าวจะเรียกว่าเซตของ สมาชิกจุด 3 จุดที่เกี่ยวข้อง
- 6.2. หากสมาชิกจุดทั้งหมดในเซตเก็บสมาชิก ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน จะไม่แสดงผล และจะพิจารณา ทรงหลายหน้าถัดไป
7. กำหนดเซต 3 จุดของวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกันสะสมใหม่ โดยจะนำสมาชิกเดิมลบกับ สมาชิกจุด 3 จุดที่เกี่ยวข้อง และ ส่วนกลับของสมาชิกจุด 3 จุดที่เกี่ยวข้อง
8. ล้างข้อมูล สมาชิกจุด 3 จุดที่เกี่ยวข้อง, ส่วนกลับของสมาชิกจุด 3 จุดที่เกี่ยวข้อง, ตัวหยุด 1, ตัวหยุด 2 และวัฏจักรเดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกัน
9. ทำซ้ำขั้นตอน 6-8 จนกว่าจำนวนสมาชิกของเซตจุด 3 จุดที่ติดกันและเป็นส่วนประกอบของวัฏจักร เดินตรงข้ามลดรูปที่ติดกันสะสม เป็น 0

แสดงผลข้อมูล (output)

1. รูปทรงหลายหน้าที่ผ่านมาเงื่อนไขของระนาบ
2. ชื่อของทรงหลายหน้าดังกล่าว
3. จำนวนของรูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบ
4. รูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบ

การคัดเลือกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ มีทรงหลายหน้าที่ผ่านเงื่อนไข 3.5 และสามารถแยกเป็นรูปหลายเหลี่ยม โดยมีผลลัพธ์เพิ่มเติมจากเงื่อนไขของ 3.4 ทั้งหมด 2 รูปแบบ ดังนี้

ชื่อ	รูป	แฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยม	
Elongated Square Dipyrmaid		2 of	
		2 of	
Square Orthobicupola		1 of	
		4 of	

ภาพที่ 25 ผลลัพธ์ของการแยกทรงหลายหน้าที่ออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ เพิ่มเติมจาก ภาพที่ 24

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จากการศึกษาการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นรูปหลายเหลี่ยม โดยแสดงทรงหลายหน้าในความสัมพันธ์ของจุดและเส้นลงบนกราฟ 3 มิติ และใช้ข้อมูลของทรงหลายหน้า ได้แก่ จุด เส้นขอบ และหน้า ในการพิจารณาเงื่อนไขที่เกี่ยวข้อง อีกทั้งยังใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ เพื่อการคำนวณและแสดงผลที่ถูกต้อง โดยเริ่มจากการแจกแจงด้วยเงื่อนไขของจุดทุกจุดมีดีกรีเป็นคู่ ซึ่งจากเดิมต้องพิจารณาทรงหลายหน้าทั้งหมด 110 รูปแบบ เหลือเพียง 29 รูปแบบ และนำทรงหลายหน้าทั้ง 29 รูปแบบนี้ ไปพิจารณา การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน และการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมบรณะนาบ

4.1 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน

เนื่องจากรูปหลายเหลี่ยมปกติเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันทุกมุม ดังนั้นการนำรูปหลายเหลี่ยมปกติมาประกอบกัน จะทำให้มุมระหว่าง จุดสามจุด (จุดตรงข้ามจุดที่หนึ่ง, จุดอ้างอิง และจุดตรงข้ามจุดที่สอง) ของทุกจุดในทรงหลายหน้าที่พิจารณามีค่าเท่ากัน ซึ่งมีทั้งหมด 5 รูปแบบ ได้แก่ ทรงแปดหน้า (octahedron), cuboctahedron, ทรงยี่สิบหน้า (icosahedron), small rhombicosidodecahedron และ small rhombicuboctahedron

4.2 การแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมบรณะนาบ

สำหรับรูปหลายเหลี่ยมบรณะนาบจะต้องใช้ความเป็นวัฏจักรในการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นกลุ่ม พร้อมทั้งตรวจสอบการอยู่บรณะนาบ เพื่อให้รูปหลายเหลี่ยมที่แยกออกมาอยู่บรณะนาบเดียวกัน ซึ่งมีทั้งหมด 7 รูปแบบ โดย 5 รูปแบบแรก คือ ทรงหลายหน้าชนิดเดียวกับการแยกทรงหลายหน้าออกเป็นแฟมิลีของรูปหลายเหลี่ยมปกติชนิดเดียวกัน ในหัวข้อ 4.1 สำหรับ 2 รูปแบบที่ผ่านเงื่อนไขเพิ่มเติม ได้แก่ Elongated Square Dipyramid และ Square Orthobicupola

ข้อเสนอแนะ

สำหรับการค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ และสามารถประยุกต์ใช้ในการประดิษฐ์คอมพิวเตอร์ในรูปแบบใหม่ได้ นอกจากนี้ผู้จัดทำคิดว่าในอนาคตจะศึกษาเพิ่มเติม การลดเงื่อนไขของความเป็นบรณะนาบ โดยใช้เงื่อนไขของการเป็นวัฏจักรเดินตรงข้าม และการเป็นวัฏจักรที่ไม่เป็นวัฏจักรเดินตรงข้าม ในการแยกทรงหลายหน้า ออกเป็นรูปอื่นๆต่อไป

บรรณานุกรม

- [1] กองสวัสดิการสังคม เทศบาลเมืองลำพูน. เอกสารคู่มือการทำโคลนลานนา. สืบค้นเมื่อวันที่ 21 กรกฎาคม 2565, จาก <https://lamphuncity.go.th/wp-content/uploads/2019/02/โคลน.pdf>
- [2] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมวิชาคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5, บทที่ 3 เวกเตอร์. 260-284.
- [3] สมภพ มูลชัย. (2559). เอกสารคำสอนกระบวนวิชา 206211 แคลคูลัส 3, บทที่ 1 เวกเตอร์ในปริภูมิสองมิติและสามมิติ. 28-30.
- [4] สายัญ ปันมา. (2564). เอกสารประกอบการสอนวิชาวิยุตคณิต, บทที่ 5 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น, 2-15.
- [5] Devadoss S., O'Rourke J. Discrete and computational geometry 2011. Polyhedra. Princeton University Press, 158-160.
- [6] International Textbook Company. (1906). International library of technology. Geometry. Stationers' Hall, London. 12-13.
- [7] Johnson, N. W. (1966). Convex polyhedra with regular faces. Canadian Journal of mathematics, 18, 169-200.
- [8] Holden, A. (1980). Regular Polylinks. Structural topology 1980 n°um 4.
- [9] Udit, A., Umeshpal, S. (2009). Graph Theory. Walk, Parts and Circuits. 115.

ภาคผนวก

1. โปรแกรมการตรวจสอบดีกรีคู่อของทรงหลายหน้า 110 รูปแบบ
ใช้คัดแยกดีกรีของจุดทั้ง 110 รูปแบบ หากจุดของรูปแบบใดมีดีกรีเป็นจำนวนคี่ จะถูกคัดออก ฉะนั้นแล้ว
ทรงหลายหน้าที่ผ่านการตรวจสอบ ทุกจุดจะมีดีกรีเป็นคู่
2. โปรแกรมการคัดเลือกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของมุม
สำหรับโปรแกรมในส่วนนี้จะแสดงผลเซตที่เกิดจากการยุบเนียนของสมาชิกที่เป็นขนาดของมุมของแต่ละทรง
หลายหน้า โดยจะแสดงผลลัพธ์ทั้ง 29 รูปแบบ
3. โปรแกรมการคัดเลือกทรงหลายหน้าด้วยเงื่อนไขของระนาบ พร้อมทั้งระบุจำนวนของรูปหลายเหลี่ยมที่นำมาประกอบ
กัน
การเขียนโปรแกรมขั้นสุดท้ายนี้มีจุดประสงค์เพื่อระบุทรงหลายหน้าทั้ง 29 รูปแบบ ว่ามีทรงหลายหน้ารูป
แบบใดบ้างที่สอดคล้องกับการประกอบโดยใช้รูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ และสำหรับทรงหลายหน้าที่สอดคล้อง
กับการประกอบโดยใช้รูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ ใช้รูปหลายเหลี่ยมชนิดใดในการประกอบ พร้อมทั้งระบุจำนวน
รูปหลายเหลี่ยมที่ใช้

```

In[1]:= PD1 = "Tetrahedron";
PD2 = "Cube";
PD3 = "Octahedron";
PD4 = "Dodecahedron";
PD5 = "Icosahedron";
PD6 = "Cuboctahedron";
PD7 = "GreatRhombicosidodecahedron";
PD8 = "GreatRhombicuboctahedron";
PD9 = "Icosidodecahedron";
PD10 = "SmallRhombicosidodecahedron";
PD11 = "SmallRhombicuboctahedron";
PD12 = "SnubCube";
PD13 = "SnubDodecahedron";
PD14 = "TruncatedCube";
PD15 = "TruncatedDodecahedron";
PD16 = "TruncatedIcosahedron";
PD17 = "TruncatedOctahedron";
PD18 = "TruncatedTetrahedron";
PD19 = "AugmentedDodecahedron";
PD20 = "AugmentedHexagonalPrism";
PD21 = "AugmentedPentagonalPrism";
PD22 = "AugmentedSphenocorona";
PD23 = "AugmentedTriangularPrism";
PD24 = "AugmentedTridiminishedIcosahedron";
PD25 = "AugmentedTruncatedCube";
PD26 = "AugmentedTruncatedDodecahedron";
PD27 = "AugmentedTruncatedTetrahedron";
PD28 = "BiaugmentedPentagonalPrism";
PD29 = "BiaugmentedTriangularPrism";
PD30 = "BiaugmentedTruncatedCube";
PD31 = "BigyrateDiminishedRhombicosidodecahedron";
PD32 = "Bilunabirotunda";
PD33 = "DiminishedRhombicosidodecahedron";
PD34 = {"Dipyramid", 3};
PD35 = {"Dipyramid", 5};
PD36 = "Disphenocingulum";
PD37 = "ElongatedPentagonalCupola";
PD38 = "ElongatedPentagonalDipyramid";
PD39 = "ElongatedPentagonalGyrobicupola";
PD40 = "ElongatedPentagonalGyrobirotunda";
PD41 = "ElongatedPentagonalGyrocupolarotunda";
PD42 = "ElongatedPentagonalOrthobicupola";
PD43 = "ElongatedPentagonalOrthobirotunda";
PD44 = "ElongatedPentagonalOrthocupolarotunda";
PD45 = "ElongatedPentagonalPyramid";
PD46 = "ElongatedPentagonalRotunda";
PD47 = "ElongatedSquareCupola";
PD48 = "ElongatedSquareDipyramid";
PD49 = "ElongatedSquareGyrobicupola";
PD50 = "ElongatedSquarePyramid";

```

```

PD51 = "ElongatedTriangularCupola";
PD52 = "ElongatedTriangularDipyramid";
PD53 = "ElongatedTriangularGyrobicupola";
PD54 = "ElongatedTriangularOrthobicupola";
PD55 = "ElongatedTriangularPyramid";
PD56 = "GyrateBidiminishedRhombicosidodecahedron";
PD57 = "GyrateRhombicosidodecahedron";
PD58 = "Gyrobifastigium";
PD59 = "GyroelongatedPentagonalBicupola";
PD60 = "GyroelongatedPentagonalBirotonda";
PD61 = "GyroelongatedPentagonalCupola";
PD62 = "GyroelongatedPentagonalCupolarotunda";
PD63 = "GyroelongatedPentagonalPyramid";
PD64 = "GyroelongatedPentagonalRotunda";
PD65 = "GyroelongatedSquareBicupola";
PD66 = "GyroelongatedSquareCupola";
PD67 = "GyroelongatedSquareDipyramid";
PD68 = "GyroelongatedSquarePyramid";
PD69 = "GyroelongatedTriangularBicupola";
PD70 = "GyroelongatedTriangularCupola";
PD71 = "Hebesphenomegacorona";
PD72 = "MetabiaugmentedDodecahedron";
PD73 = "MetabiaugmentedHexagonalPrism";
PD74 = "MetabiaugmentedTruncatedDodecahedron";
PD75 = "MetabidiminishedIcosahedron";
PD76 = "MetabidiminishedRhombicosidodecahedron";
PD77 = "MetabigyrateRhombicosidodecahedron";
PD78 = "MetagyrateDiminishedRhombicosidodecahedron";
PD79 = "ParabiaugmentedDodecahedron";
PD80 = "ParabiaugmentedHexagonalPrism";
PD81 = "ParabiaugmentedTruncatedDodecahedron";
PD82 = "ParabidiminishedRhombicosidodecahedron";
PD83 = "ParabigyrateRhombicosidodecahedron";
PD84 = "ParagyrateDiminishedRhombicosidodecahedron";
PD85 = "PentagonalCupola";
PD86 = "PentagonalGyrobicupola";
PD87 = "PentagonalGyrocupolarotunda";
PD88 = "PentagonalOrthobicupola";
PD89 = "PentagonalOrthobirotonda";
PD90 = "PentagonalOrthocupolarotunda";
PD91 = "PentagonalRotunda";
PD92 = {"Pyramid", 4};
PD93 = {"Pyramid", 5};
PD94 = "SnubDisphenoid";
PD95 = "SnubSquareAntiprism";
PD96 = "Sphenocorona";
PD97 = "Sphenomegacorona";
PD98 = "SquareCupola";
PD99 = "SquareGyrobicupola";
PD100 = "SquareOrthobicupola";

```

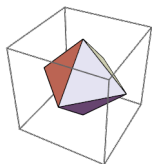
```

PD101 = "TriangularCupola";
PD102 = "TriangularHebesphenorotunda";
PD103 = "TriangularOrthobicupola";
PD104 = "TriaugmentedDodecahedron";
PD105 = "TriaugmentedHexagonalPrism";
PD106 = "TriaugmentedTriangularPrism";
PD107 = "TriaugmentedTruncatedDodecahedron";
PD108 = "TridiminishedIcosahedron";
PD109 = "TridiminishedRhombicosidodecahedron";
PD110 = "TrigyratedRhombicosidodecahedron";

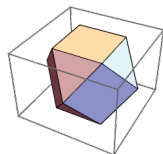
NAME = {PD1, PD2, PD3, PD4, PD5, PD6, PD7, PD8, PD9, PD10, PD11, PD12, PD13, PD14, PD15,
        PD16, PD17, PD18, PD19, PD20, PD21, PD22, PD23, PD24, PD25, PD26, PD27, PD28, PD29,
        PD30, PD31, PD32, PD33, PD34, PD35, PD36, PD37, PD38, PD39, PD40, PD41, PD42, PD43,
        PD44, PD45, PD46, PD47, PD48, PD49, PD50, PD51, PD52, PD53, PD54, PD55, PD56, PD57,
        PD58, PD59, PD60, PD61, PD62, PD63, PD64, PD65, PD66, PD67, PD68, PD69, PD70, PD71,
        PD72, PD73, PD74, PD75, PD76, PD77, PD78, PD79, PD80, PD81, PD82, PD83, PD84, PD85,
        PD86, PD87, PD88, PD89, PD90, PD91, PD92, PD93, PD94, PD95, PD96, PD97, PD98, PD99,
        PD100, PD101, PD102, PD103, PD104, PD105, PD106, PD107, PD108, PD109, PD110};

p = 0;
For[kk = 1, kk ≤ Length[NAME], kk++,
  A = N[PolyhedronData[NAME[[kk]], "VertexCoordinates"]];
  B = PolyhedronData[NAME[[kk]], "EdgeIndices"];
  For[i = 1, i ≤ Length[A], i++,
    k = 0; n = 0;
    For[j = 1, j ≤ Length[B], j++,
      If[MemberQ[B[[j]], i] == True,
        k = k + 1;
        (*Print[i, B[[j]], k, n];*)
      ];
    ];
    If[EvenQ[k] == False,
      (*Print["k=", k];*)
      n = 1;
      Break[]
    ];
    (*Print[n];*)
  ];
  (*Print[n];*)
  (*Print["-----"];*)
  If[n == 0,
    Print[PolyhedronData[NAME[[kk]],
      kk, " ", NAME[[kk]], " has even degree of all point"];
    p = p + 1;
  ];
];
Print["There are ", p, " Form"];

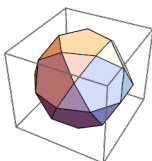
```



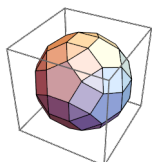
3 Octahedron has even degree of all point



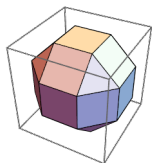
6 Cuboctahedron has even degree of all point



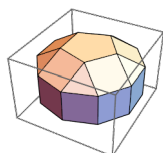
9 Icosidodecahedron has even degree of all point



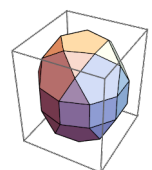
10 SmallRhombicosidodecahedron has even degree of all point



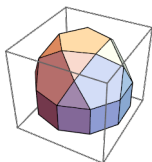
11 SmallRhombicuboctahedron has even degree of all point



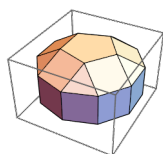
39 ElongatedPentagonalGyrobicupola has even degree of all point



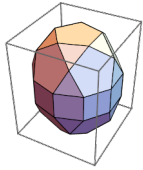
40 ElongatedPentagonalGyrobirotunda has even degree of all point



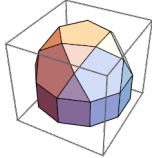
41 ElongatedPentagonalGyrocupolarotunda has even degree of all point



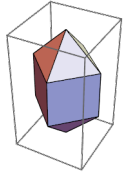
42 ElongatedPentagonalOrthobicupola has even degree of all point



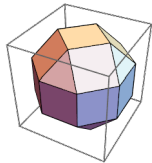
43 ElongatedPentagonalOrthobirotunda has even degree of all point



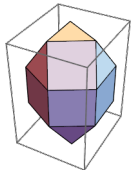
44 ElongatedPentagonalOrthocupolarotunda has even degree of all point



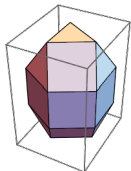
48 ElongatedSquareDipyramid has even degree of all point



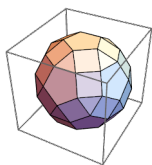
49 ElongatedSquareGyrobicupola has even degree of all point



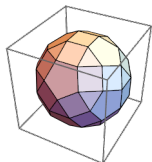
53 ElongatedTriangularGyrobicupola has even degree of all point



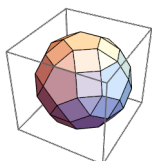
54 ElongatedTriangularOrthobicupola has even degree of all point



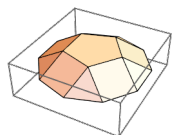
57 GyrateRhombicosidodecahedron has even degree of all point



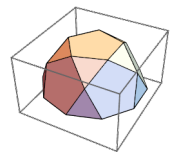
77 MetabigyrateRhombicosidodecahedron has even degree of all point



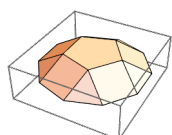
83 ParabigyrateRhombicosidodecahedron has even degree of all point



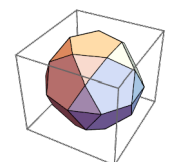
86 PentagonalGyrobicupola has even degree of all point



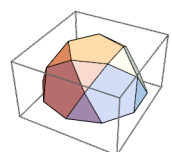
87 PentagonalGyrocupolarotunda has even degree of all point



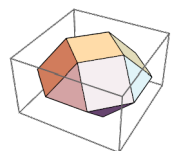
88 PentagonalOrthobicupola has even degree of all point



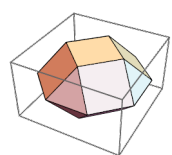
89 PentagonalOrthobirotunda has even degree of all point



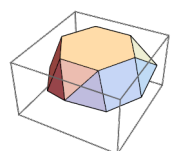
90 PentagonalOrthocupolarotunda has even degree of all point



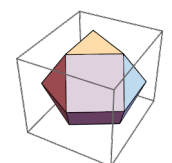
99 SquareGyrobicupola has even degree of all point



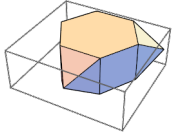
100 SquareOrthobicupola has even degree of all point



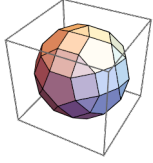
102 TriangularHebesphenorotunda has even degree of all point



103 TriangularOrthobicupola has even degree of all point



105 TriaugmentedHexagonalPrism has even degree of all point



110 TrigyrateRhombicosidodecahedron has even degree of all point

There are 29 Form

In[115]:=

```
PD1 = "Octahedron";
PD2 = "Cuboctahedron";
PD3 = "Icosidodecahedron";
PD4 = "SmallRhombicosidodecahedron";
PD5 = "SmallRhombicuboctahedron";
PD6 = "ElongatedSquareDipyramid";
PD7 = "TriangularOrthobicupola";
PD8 = "SquareOrthobicupola";
PD9 = "SquareGyrobicupola";
PD10 = "PentagonalOrthobicupola";
PD11 = "PentagonalGyrobicupola";
PD12 = "PentagonalOrthocupolarotunda";
PD13 = "PentagonalGyrocupularotunda";
PD14 = "PentagonalOrthobirotunda";
PD15 = "ElongatedTriangularOrthobicupola";
PD16 = "ElongatedTriangularGyrobicupola";
PD17 = "ElongatedSquareGyrobicupola";
PD18 = "ElongatedPentagonalOrthobicupola";
PD19 = "ElongatedPentagonalGyrobicupola";
PD20 = "ElongatedPentagonalOrthocupolarotunda";
PD21 = "ElongatedPentagonalGyrocupularotunda";
PD22 = "ElongatedPentagonalOrthobirotunda";
PD23 = "ElongatedPentagonalGyrobirotunda";
PD24 = "TriaugmentedHexagonalPrism";
PD25 = "GyrateRhombicosidodecahedron";
PD26 = "ParabigyrateRhombicosidodecahedron";
PD27 = "MetabigyrateRhombicosidodecahedron";
PD28 = "TrigyrateRhombicosidodecahedron";
PD29 = "TriangularHebesphenorotunda";

(*CS1 = "TrickisTetrahedron";
CS2 = "RhombicDodecahedron";
CS3 = "TriakisOctahedron";
CS4 = "TetrakisHexahedron";
CS5 = "DeltoidalIcositetrahedron";
CS6 = "DisdyakisDodecahedron";
CS7 = "PentagonalIcositetrahedron";
CS8 = "RhombicTriacontahedron";
CS9 = "TriakisIcosahedron";
CS10 = "Pentakisdodecahedron";
CS11 = "DeltoidalHexecontahedron";
CS12 = "DisdyakisTriacontahedron";
CS13 = "PentagonalHexecontahedron";*)

NAME = {PD1, PD2, PD3, PD4, PD5, PD6, PD7, PD8, PD9, PD10, PD11, PD12, PD13, PD14, PD15,
        PD16, PD17, PD18, PD19, PD20, PD21, PD22, PD23, PD24, PD25, PD26, PD27, PD28, PD29};
(*NAME = {CS1, CS2, CS3, CS4, CS5, CS6, CS7, CS8, CS9, CS10, CS11, CS12, CS13};*)

For[kk = 1, kk ≤ Length[NAME], kk ++,
```

```

A = {};
B = {};
F = {};
ANS = {};
A = N[PolyhedronData[NAME[[kk]], "VertexCoordinates"]];
(*เซตของตำแหน่งของจุด 3 มิติของทรงหลายเหลี่ยมข้างต้น*)
B = PolyhedronData[NAME[[kk]], "EdgeIndices"];
(*เซตของจุด 2 จุดที่ลากเป็นเส้นขอบของแต่ละทรงหลายเหลี่ยม*)
F = PolyhedronData[NAME[[kk]], "FaceIndices"];
(*เซตของจุดที่เชื่อมกันของแต่ละหน้าตัดของทรงหลายเหลี่ยมข้างต้น*)
GGG = {};
For[i = 1, i ≤ Length[A], i++,
  AA = {};
  For[j = 1, j ≤ Length[F], j++,
    If[MemberQ[F[[j]], i] == True,
      AA = Append[AA, F[[j]]];
      (*พิจารณาสมาชิกของ F[[j]] ถ้ามี
        i อยู่ในสมาชิกของ F[[j]] แล้ว AA จะเก็บเซตของ F[[j]] ข้างต้น*)
    ];
    For[k = 1, k ≤ Length[AA], k++,
      While[i ≠ First[AA[[k]]],
        AA[[k]] = RotateLeft[AA[[k]]];
      ];
      (*เลื่อนทุกตำแหน่งไปทางซ้าย (ตัวแรกไปท้ายสุด) จนกว่า i จะเป็นสมาชิกตัวแรกของ AA *)
    ];
  ];
BB = {};
For[j = 1, j ≤ Length[B], j++,
  If[MemberQ[B[[j]], i] == True,
    BB = Append[BB, B[[j]]];
    (*ให้ BB เก็บเซตของเส้นที่เกี่ยวข้องกับจุดที่ i *)
  ];
];
CB = Complement[Union[Catenate[BB]], {i}];
(*ฟังก์ชัน Catenate[BB] คือ รวมสมาชิกทั้งหมดของ BB เป็นเซตเดียว (นับตัวซ้ำด้วย*)
(*ฟังก์ชัน Union ในที่นี้ใช้เพื่อนำตัวซ้ำออก*)
(*ฟังก์ชัน Complement ในที่นี้ใช้เพื่อนำ ค่า i ออก*)

(*ขั้นตอน BB และ CB (ผลลัพธ์ของ CB) สามารถแทนด้วย ฟังก์ชัน AdjacencyList[B,i] ได้เลย*)

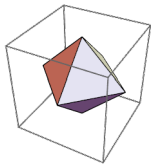
CC = {};
For[k = 1, k ≤ Length[AA], k++,
  CC = Append[CC, Intersection[AA[[k]], CB]];
];
(*Loop ข้างต้นใช้พิจารณาว่า ที่เกี่ยวข้องกับจุด i โดยที่ไม่รวม i*)
EE = {};
EEE = {};
For[j = 1, j ≤ Length[CB], j++,

```

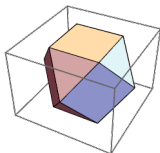
```

DD = {};
For[k = 1, k ≤ Length[CC], k++,
  If[MemberQ[CC[[k]], CB[[j]]] == True,
    DD = Append[DD, CC[[k]]];
  ];
];
(*Loop ข้างต้นเป็นการแยกเซตของ CC[[k]] ที่มี CB[[j]] เกี่ยวข้อง*)
EE = Join[{CB[[j]]}, Complement[CB, Union[Catenate[DD]]]];
(*EE จะเป็นตัวออกด้านตรงข้ามของสมาชิก *)
EEE = Append[EEE, EE];
(*EEE จะเก็บเซตของตัวด้านตรงข้ามของสมาชิกทั้งหมด *)
];
FF = Union[EEE, SameTest → (First[#1] == Last[#2] &)];
(*FF จะทำให้เซต EEE ที่ซ้ำกัน เหลือเพียงเซตเดียวเท่านั้น *)
GG = {};
For[j = 1, j ≤ Length[FF], j++,
  GG = VectorAngle[A[[FF[[j]][[1]]] - A[[i]], A[[FF[[j]][[2]]] - A[[i]]];
  (*GG คือมุมระหว่าง 2 เวกเตอร์ที่ตรงกันข้ามกัน *)
  GGG = Append[GGG, GG];
];
];
ANS = Union[GGG];
Print[PolyhedronData[NAME[[kk]], kk, " ", NAME[[kk]], " ", ANS];
];

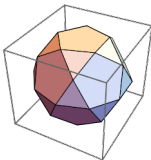
```



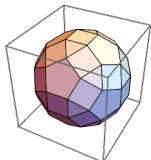
1 Octahedron {1.5708}



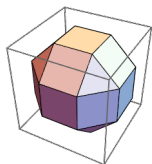
2 Cuboctahedron {2.0944, 2.0944}



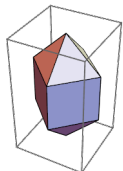
3 Icosidodecahedron {2.51327}



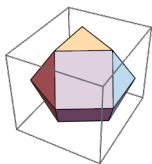
4 SmallRhombicuboctahedron {2.51327, 2.51327, 2.51327}



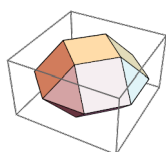
5 SmallRhombicuboctahedron {2.35619}



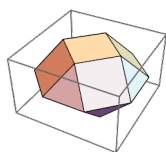
6 ElongatedSquareDipyramid {1.5708, 2.35619}



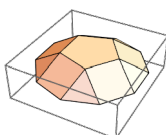
7 TriangularOrthobicupola {1.91063, 1.91063, 2.0944, 2.0944, 2.0944}



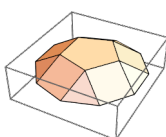
8 SquareOrthobicupola {1.5708, 2.35619}



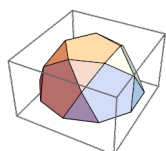
9 SquareGyrobicupola {1.71777, 2.35619}



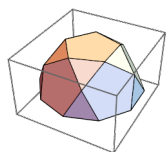
10 PentagonalOrthobicupola {1.10715, 1.10715, 2.51327}



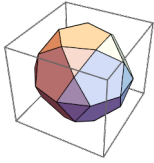
11 PentagonalGyrobicupola {1.25664, 2.51327}



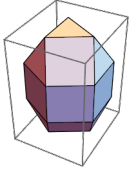
12 PentagonalOrthocupolarotunda {1.88496, 1.88496, 1.88496, 2.51327}



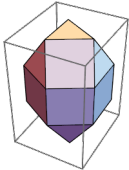
13 PentagonalGyrocupolarotunda {1.65631, 1.65631, 2.51327}



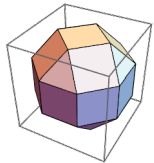
14 PentagonalOrthobirotunda {2.03444, 2.03444, 2.51327}



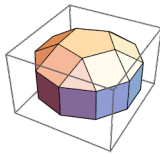
15 ElongatedTriangularOrthobicupola {2.0944, 2.0944, 2.52611}



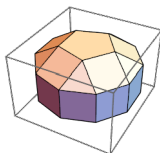
16 ElongatedTriangularGyrobicupola {2.0944, 2.0944, 2.52611}



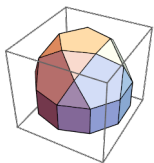
17 ElongatedSquareGyrobicupola {2.35619}



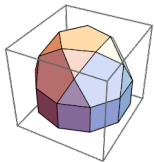
18 ElongatedPentagonalOrthobicupola {2.12437, 2.51327}



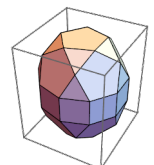
19 ElongatedPentagonalGyrobicupola {2.12437, 2.51327}



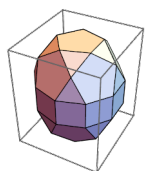
20 ElongatedPentagonalOrthocupolarotunda {2.12437, 2.51327, 2.58802}



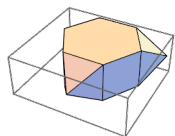
21 ElongatedPentagonalGyrocupularotunda {2.12437, 2.51327, 2.58802}



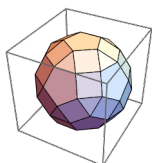
22 ElongatedPentagonalOrthobirotunda {2.51327, 2.58802}



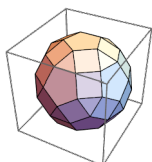
23 ElongatedPentagonalGyrobicuboctahedron {2.51327, 2.58802}



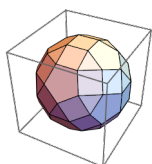
24 TruncatedHexagonalPrism {1.5708, 2.61073, 2.61073}



25 GyrateRhombicuboctahedron {2.51327, 2.51327, 2.51327, 2.67795}

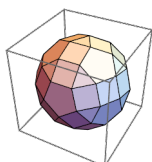


26 ParagyrateRhombicuboctahedron {2.51327, 2.51327, 2.51327, 2.67795}



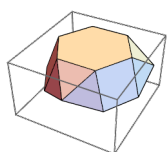
27 MetagyrateRhombicuboctahedron

{2.51327, 2.51327, 2.51327, 2.67795, 2.67795}



28 TrigrateRhombicuboctahedron

{2.51327, 2.51327, 2.51327, 2.51327, 2.51327, 2.67795, 2.67795, 2.67795}



29 TriangularHebesphenorotunda {1.88496, 1.88496, 2.51327}

In[146]:=

```
PD1 = "Octahedron";
PD2 = "Cuboctahedron";
PD3 = "Icosidodecahedron";
PD4 = "SmallRhombicosidodecahedron";
PD5 = "SmallRhombicuboctahedron";
PD6 = "ElongatedSquareDipyramid";
PD7 = "TriangularOrthobicupola";
PD8 = "SquareOrthobicupola";
PD9 = "SquareGyrobicupola";
PD10 = "PentagonalOrthobicupola";
PD11 = "PentagonalGyrobicupola";
PD12 = "PentagonalOrthocupolarotunda";
PD13 = "PentagonalGyrocupularotunda";
PD14 = "PentagonalOrthobirotunda";
PD15 = "ElongatedTriangularOrthobicupola";
PD16 = "ElongatedTriangularGyrobicupola";
PD17 = "ElongatedSquareGyrobicupola";
PD18 = "ElongatedPentagonalOrthobicupola";
PD19 = "ElongatedPentagonalGyrobicupola";
PD20 = "ElongatedPentagonalOrthocupularotunda";
PD21 = "ElongatedPentagonalGyrocupularotunda";
PD22 = "ElongatedPentagonalOrthobirotunda";
PD23 = "ElongatedPentagonalGyrobirotunda";
PD24 = "TriaugmentedHexagonalPrism";
PD25 = "GyrateRhombicosidodecahedron";
PD26 = "ParabigyrateRhombicosidodecahedron";
PD27 = "MetabigyrateRhombicosidodecahedron";
PD28 = "TrigyrateRhombicosidodecahedron";
PD29 = "TriangularHebesphenorotunda";

(*CS1 = "TrickisTetrahedron";
CS2 = "RhombicDodecahedron";
CS3 = "TriakisOctahedron";
CS4 = "TetrakisHexahedron";
CS5 = "DeltoidalIcositetrahedron";
CS6 = "DisdyakisDodecahedron";
CS7 = "PentagonalIcositetrahedron";
CS8 = "RhombicTriacontahedron";
CS9 = "TriakisIcosahedron";
CS10 = "Pentakisdodecahedron";
CS11 = "DeltoidalHexecontahedron";
CS12 = "DisdyakisTriacontahedron";
CS13 = "PentagonalHexecontahedron";*)

NAME = {PD1, PD2, PD3, PD4, PD5, PD6, PD7, PD8, PD9, PD10, PD11, PD12, PD13, PD14, PD15,
        PD16, PD17, PD18, PD19, PD20, PD21, PD22, PD23, PD24, PD25, PD26, PD27, PD28, PD29};
(*NAME = {CS1, CS2, CS3, CS4, CS5, CS6, CS7, CS8, CS9, CS10, CS11, CS12, CS13};*)

For[kk = 1, kk ≤ Length[NAME], kk++,
```

```

A = {};
B = {};
F = {};
ANS = {};
A = N[PolyhedronData[NAME[[kk]], "VertexCoordinates"]];
(*เซตของตำแหน่งของจุด 3 มิติของทรงหลายเหลี่ยมข้างต้น*)
B = PolyhedronData[NAME[[kk]], "EdgeIndices"];
(*เซตของจุด 2 จุดที่ลากเป็นเส้นขอบของแต่ละทรงหลายเหลี่ยม*)
F = PolyhedronData[NAME[[kk]], "FaceIndices"];
(*เซตของจุดที่เชื่อมกันของแต่ละหน้าตัดของทรงหลายเหลี่ยมข้างต้น*)
GGG = {};
For[i = 1, i ≤ Length[A], i++,
  AA = {};
  For[j = 1, j ≤ Length[F], j++,
    If[MemberQ[F[[j]], i] == True,
      AA = Append[AA, F[[j]]];
      (*พิจารณาสมาชิกของ F[[j]] ถ้ามี
        i อยู่ในสมาชิกของ F[[j]] แล้ว AA จะเก็บเซตของ F[[j]] ข้างต้น*)
    ];
    For[k = 1, k ≤ Length[AA], k++,
      While[i ≠ First[AA[[k]]],
        AA[[k]] = RotateLeft[AA[[k]]];
      ];
      (*เลื่อนทุกตำแหน่งไปทางซ้าย (ตัวแรกไปท้ายสุด) จนกว่า i จะเป็นสมาชิกตัวแรกของ AA *)
    ];
  ];
BB = {};
For[j = 1, j ≤ Length[B], j++,
  If[MemberQ[B[[j]], i] == True,
    BB = Append[BB, B[[j]]];
    (*ให้ BB เก็บเซตของเส้นที่เกี่ยวข้องกับจุดที่ i *)
  ];
];
CB = Complement[Union[Catenate[BB]], {i}];
(*ฟังก์ชัน Catenate[BB] คือ รวมสมาชิกทั้งหมดของ BB เป็นเซตเดียว (นับตัวซ้ำด้วย*)
(*ฟังก์ชัน Union ในที่นี้ใช้เพื่อนำตัวซ้ำออก*)
(*ฟังก์ชัน Complement ในที่นี้ใช้เพื่อนำ ค่า i ออก*)
CC = {};
For[k = 1, k ≤ Length[AA], k++,
  CC = Append[CC, Intersection[AA[[k]], CB]];
];
(*Loop ข้างต้นใช้พิจารณาว่า ที่เกี่ยวข้องกับจุด i โดยที่ไม่รวม i*)
EE = {};
EEE = {};
For[j = 1, j ≤ Length[CB], j++,
  DD = {};
  For[k = 1, k ≤ Length[CC], k++,
    If[MemberQ[CC[[k]], CB[[j]]] == True,

```



```

    DD = Append[DD, CC[[k]]];
  ];
];
(*Loop ช้างต้นเป็นการแยกเซตของ CC[[k]] ที่มี CB[[j]] เกี่ยวข้อง*)
EE = Join[{CB[[j]]}, Complement[CB, Union[Catenate[DD]]]];
(*EE จะเป็นตัวออกด้านตรงข้ามของสมาชิก *)
EEE = Append[EEE, EE];
(*EEE จะเก็บเซตของตัวด้านตรงข้ามของสมาชิกทั้งหมด *)
];
GG = {{EEE[[1]][[1]], i, EEE[[1]][[2]], {EEE[[2]][[1]], i, EEE[[2]][[2]],
  {EEE[[3]][[1]], i, EEE[[3]][[2]], {EEE[[4]][[1]], i, EEE[[4]][[2]]}}};
GGG = Union[GGG, {GG[[1]]}, {GG[[2]]}, {GG[[3]]}, {GG[[4]]}];
];
Cycle = {};
ACycle = {};
ll = {};
While[Length[GGG] ≠ 0,
  test = GGG[[1]];
  stop1 = test[[1]];
  stop2 = test[[2]];
  HH = {test};
  TT = {test[[1]]};
  Angle =
Round[VectorAngle[A[[test[[1]]]] - A[[test[[2]]]], A[[test[[3]]]] - A[[test[[2]]]]] / π * 180];
  EACycle = {Angle};
  ALL = {test, Reverse[test]};
  While[test[[2]] ≠ stop1 && test[[3]] ≠ stop2,
    For[l = 1, l ≤ Length[GGG], l++,
      If[test[[2]] == GGG[l][[1]] && test[[3]] == GGG[l][[2]],
        test = GGG[l];
        (*Print[TT];*)
        TT = Append[TT, test[[1]]];
        Angle =
Round[VectorAngle[A[[test[[1]]]] - A[[test[[2]]]], A[[test[[3]]]] - A[[test[[2]]]]] / π * 180];
        Break[]
      ];
    ];
  If[CoplanarPoints[A[[TT]]],
    ,
    Break[]
  ];
  EACycle = Append[EACycle, Angle];
  HH = Append[HH, {test}];
  ALL = Append[ALL, test];
  ALL = Append[ALL, Reverse[test]];
  GGG = Complement[GGG, ALL];
];
ACycle = Append[ACycle, EACycle];
Cycle = Append[Cycle, TT];
If[CoplanarPoints[A[[TT]]],

```

```

        ll = 0;,
        ll = 1;
        Break[]
    ];
];
If[ll == 0,
  For[l = 1, l ≤ Length[ACycle], l++,
    If[CoplanarPoints[A[[ACycle[[l]]]],
      ll = 0;,
      ll = 1;
      Break[]
    ];
  ];
];
UACycle = Union[ACycle];
If[ll == 0,
  Print["☑", kk, " ", NAME[[kk]], " is Coplanar.☑"];
  For[l = 1, l ≤ Length[UACycle], l++,
    jj = 0;
    For[k = 1, k ≤ Length[ACycle], k++,
      If[UACycle[[l]] == ACycle[[k]], jj++];
    ];
  Print["    ", jj, " of ", Length[UACycle[[l]],
    "-gons and has angle ", UACycle[[l]], " respectively."];
  ];
  Print["✗", kk, " ", NAME[[kk]], " is not Coplanar.✗"];
];
];

```

1 Octahedron is Coplanar.☑

3 of 4-gons and has angle {90, 90, 90, 90} respectively.

2 Cuboctahedron is Coplanar.☑

4 of 6-gons and has angle {120, 120, 120, 120, 120, 120} respectively.

3 Icosidodecahedron is Coplanar.☑

6 of 10-gons and has angle {144, 144, 144, 144, 144, 144, 144, 144, 144, 144} respectively.

4 SmallRhombicosidodecahedron is Coplanar.☑

12 of 10-gons and has angle {144, 144, 144, 144, 144, 144, 144, 144, 144, 144, 144} respectively.

5 SmallRhombicuboctahedron is Coplanar.☑

6 of 8-gons and has angle {135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135} respectively.

6 ElongatedSquareDipyramid is Coplanar.☑

2 of 4-gons and has angle {90, 90, 90, 90} respectively.

2 of 6-gons and has angle {135, 135, 90, 135, 135, 90} respectively.

7 TriangularOrthobicupola is not Coplanar.✗

8 SquareOrthobicupola is Coplanar.☑

4 of 6-gons and has angle {135, 90, 135, 135, 90, 135} respectively.

1 of 8-gons and has angle {135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135} respectively.

- ✗9 SquareGyrobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗10 PentagonalOrthobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗11 PentagonalGyrobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗12 PentagonalOrthocupolarotunda is not Coplanar. ✗
- ✗13 PentagonalGyrocupolarotunda is not Coplanar. ✗
- ✗14 PentagonalOrthobirotunda is not Coplanar. ✗
- ✗15 ElongatedTriangularOrthobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗16 ElongatedTriangularGyrobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗17 ElongatedSquareGyrobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗18 ElongatedPentagonalOrthobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗19 ElongatedPentagonalGyrobicupola is not Coplanar. ✗
- ✗20 ElongatedPentagonalOrthocupolarotunda is not Coplanar. ✗
- ✗21 ElongatedPentagonalGyrocupolarotunda is not Coplanar. ✗
- ✗22 ElongatedPentagonalOrthobirotunda is not Coplanar. ✗
- ✗23 ElongatedPentagonalGyrobirotunda is not Coplanar. ✗
- ✗24 TriaugmentedHexagonalPrism is not Coplanar. ✗
- ✗25 GyrateRhombicosidodecahedron is not Coplanar. ✗
- ✗26 ParabigyrateRhombicosidodecahedron is not Coplanar. ✗
- ✗27 MetabigyrateRhombicosidodecahedron is not Coplanar. ✗
- ✗28 TrigyrateRhombicosidodecahedron is not Coplanar. ✗
- ✗29 TriangularHebesphenorotunda is not Coplanar. ✗