

สมบัติของจำนวนเต็มลิปชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน และจำนวนเต็มไฮเพอร์โบ
ลิกควอเทอร์เนียน

(Properties of Lipschitz integers, split quaternion integers and hyperbolic
quaternion integers)

นางสาวสุภาพร ตั้งตัว
รหัส 620510542

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

สมบัติของจำนวนเต็มลิปชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน และจำนวนเต็มไฮเพอร์โบ
ลิกควอเทอร์เนียน

(Properties of Lipschitz integers, split quaternion integers and hyperbolic
quaternion integers)

สุภาพร ตั้งตัว

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

อัญชลี เข้มเพ็ชร

(รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร)

ประธานกรรมการ

นราวดี ภูดลสิทธิ์พัฒน์

(รองศาสตราจารย์ ดร.นราวดี ภูดลสิทธิ์พัฒน์)

กรรมการ

วันที่ 3 เดือน เมษายน พ.ศ. 2566

สมบัติของจำนวนเต็มลิปชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน และจำนวนเต็มไฮเพอร์โบ
ลิกควอเทอร์เนียน
(Properties of Lipschitz integers, split quaternion integers and hyperbolic
quaternion integers)

นางสาวสุภาพร ตั้งตัว
รหัส 620510542

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในหัวข้อเรื่อง สมบัติของจำนวนเต็มลิพชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเตอร์เนียนและจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเตอร์เนียน

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระนี้เป็นอย่างสูงที่ได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำ และช่วยอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ตลอดจนช่วยตรวจสอบ พิจารณาและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ งานงานค้นคว้าอิสระนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี และขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.นรวดี ภูตลลิตธิพัฒน์ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระ ที่ได้ตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสมและให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้ดียิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนให้ความรู้และคำแนะนำอันเป็นประโยชน์แก่ผู้ค้นคว้า ซึ่งนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาและครอบครัวผู้ให้กำลังใจอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนจบสมบูรณ์และตลอดการศึกษา รวมทั้งกราบขอบพระคุณไปยังผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ ซึ่งผู้ค้นคว้าไม่ได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ด้วย

หากผลงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดประโยชน์ประการใด ผู้ค้นคว้าขอขอบคำชื่นชมและคุณความดีแก่บิดา มารดา ครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนผู้ค้นคว้าตั้งแต่ปฐมวัยจนถึงปัจจุบัน ในทางตรงกันข้ามหากผลงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เกิดข้อผิดพลาดประการใดผู้ค้นคว้าขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

สุภาพร ตั้งตัว

หัวข้อ (ภาษาไทย)	สมบัติของจำนวนเต็มลิปชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน และจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน
(ภาษาอังกฤษ)	Properties of Lipschitz integers, split quaternion integers and hyperbolic quaternion integers
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นางสาวสุภาพร ตั้งตัว รหัสนักศึกษา 620510542
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร
ชื่อกรรมการสอบ	รองศาสตราจารย์ ดร.นราวดี ภูดลสิทธิพัฒน์

บทคัดย่อ

ในการค้นคว้าอิสระครั้งนี้ เราได้ทำการศึกษาจำนวนเต็มสามจำนวน ได้แก่ จำนวนเต็มลิปชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน และจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน ที่อยู่ในรูปของ $z = a + bi + cj + dk$ โดยที่ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็ม นอกจากนี้เราได้พิสูจน์สมบัติบางประการและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มทั้งสามจำนวน

Abstract

In this independent study, we study three integers, namely, Lipschitz integers, split quaternion integers and hyperbolic quaternion integers, which are in the form of $z = a + bi + cj + dk$, where a, b, c and d are integers. In addition, we prove some properties and related theorems of the three integers.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
3 ผลการศึกษา (Results)	4
บรรณานุกรม	20

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

จากการศึกษาค้นคว้าบทความ "Gaussian, parabolic and hyperbolic numbers [s] ของ W. Miller และ R. Boehning" ซึ่งบทความดังกล่าวเป็นการศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของจำนวนเกาส์เซียน จำนวนพาราโบลิกและจำนวนไฮเพอร์โบลิก ที่อยู่ในรูปของ $z = a + bi$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z}$ และพบว่านิยาม สมบัติและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสามจำนวนนี้มีความคล้ายคลึงกัน ผู้ทำการศึกษาก็ได้ขยายแนวคิดและสนใจที่จะศึกษาจำนวนเต็มอื่นอีกสามจำนวนได้แก่ จำนวนเต็มลิพชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเตอร์เนียนและจำนวนไฮเพอร์โบลิกควอเตอร์เนียน อยู่ในรูปของ $z = a + bi + cj + dk$ โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

ในการค้นคว้าอิสระครั้งนี้ ได้ทำการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับสมบัติของจำนวนเต็มลิพชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเตอร์เนียนและจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเตอร์เนียน โดยในบทที่ 2 เราจะศึกษานิยามและทฤษฎีบทที่เป็นความรู้พื้นฐาน และ ในบทที่ 3 เราจะนิยามเงื่อนไขต่างๆ ของแต่ละจำนวนเต็ม และทำการพิสูจน์สมบัติบางประการและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มทั้งสามจำนวน

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

สำเนา 2.1. สมบัติพื้นฐานของจำนวนเต็ม

1. สมบัติปิดการบวก ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $a + b \in \mathbb{Z}$
2. สมบัติการสลับที่การบวก ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $a + b = b + a$
3. เอกลักษณ์การบวก ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $a + 0 = 0 + a = a$
4. สมบัติปิดการคูณ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $ab \in \mathbb{Z}$
5. เอกลักษณ์การคูณ ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $a1 = 1a = a$

บทนิยาม 2.2. ตัวประกอบของจำนวนเต็ม

ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ เราจะกล่าวว่า a เป็นตัวประกอบของ b ถ้ามี $c \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $b = ac$

บทนิยาม 2.3. ให้ $p \in \mathbb{Z}^+$ เราจะกล่าวว่า p เป็นจำนวนเฉพาะ (prime number) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $p = ab$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก a และ b แล้ว a หรือ b ต้องเป็น 1 เพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 2.4. จำนวนเกาส์เซียน

เราจะกล่าวว่า z เป็นจำนวนเกาส์เซียน (Gaussian integers) ถ้า z เป็นจำนวนที่อยู่ในรูป

$$a + bi \text{ โดยที่ } a, b \in \mathbb{Z} \text{ และ } i^2 = -1$$

และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{Z}[i]$ แทนเซตของจำนวนเกาส์เซียน

บทนิยาม 2.5. ให้ $z = a + bi$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z}$

นิยาม **นอร์ม** ของจำนวนเกาส์เซียน จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $N(z)$ กำหนดโดย

$$N(z) = N(a + bi) = a^2 + b^2$$

บทนิยาม 2.6. สังยุค

ให้ $z = a + bi$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z}$

นิยาม **สังยุค** ของ z ซึ่งจะเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ กำหนดโดย $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

บทตั้ง 2.7. สำหรับ $z \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า

1. $N(z) = z\bar{z}$
2. $N(\bar{z}) = N(z)$

พิสูจน์. ให้ $z = a + bi$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z}$

จากบทนิยาม 2.6 ได้ว่า $\bar{z} = a - bi$

1. พิจารณา

$$\begin{aligned}
 N(z) &= a^2 + b^2 && \text{(จากบทนิยาม 2.5)} \\
 &= a^2 - abi + abi + b^2 \\
 &= (a + bi)(a - bi) \\
 &= z\bar{z}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } N(z) = z\bar{z}$$

2. พิจารณา

$$\begin{aligned}
 N(\bar{z}) &= N(a - bi) \\
 &= a^2 + b^2 && \text{(จากบทนิยาม 2.5)} \\
 &= N(a + bi) \\
 &= N(z)
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } N(\bar{z}) = N(z)$$

□

บทนิยาม 2.8. สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนด $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะกล่าวได้ว่า

1. $z_1 = z_2$ หรือ $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3. $kz_1 = k(a + bi) = ka + kbi$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
4. $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

บทนิยาม 3.1. จำนวนเต็มลิพชิตซ์

เราจะกล่าวว่า z เป็นจำนวนเต็มลิพชิตซ์ (Lipschitz integers) หรือจำนวนเต็มควอเทอร์เนียน (quaternion integers) ถ้า z เป็นจำนวนที่อยู่ในรูป

$$z = a + bi + cj + dk \text{ โดยที่ } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ และ}$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i \text{ และ } ki = -ik = j$$

และจะใช้สัญลักษณ์ L แทนเซตของจำนวนเต็มลิพชิตซ์

บทนิยาม 3.2. จำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน

เราจะกล่าวว่า z เป็นจำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน (split quaternion integers) ถ้า z เป็นจำนวนที่อยู่ในรูป

$$z = a + bi + cj + dk \text{ โดยที่ } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ และ}$$
$$i^2 = -1, j^2 = k^2 = ijk = 1, ij = -ji = k, jk = -kj = -i \text{ และ } ki = -ik = j$$

และจะใช้สัญลักษณ์ S แทนเซตของจำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียน

บทนิยาม 3.3. จำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน

เราจะกล่าวว่า z เป็นจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน (hyperbolic quaternion integers) ถ้า z เป็นจำนวนที่อยู่ในรูป

$$z = a + bi + cj + dk \text{ โดยที่ } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ และ}$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 1, ij = -ji = k, jk = -kj = i \text{ และ } ki = -ik = j$$

และจะใช้สัญลักษณ์ H แทนเซตของจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน

บทนิยาม 3.4. การเท่ากันและการบวก

ให้ $z_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k \in L$ โดยที่ $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ และ $n = 1, 2$

1 นิยามการเท่ากันใน L ดังนี้

$$z_1 = z_2 \text{ ถ้า } a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2 \text{ และ } d_1 = d_2$$

2 นิยามการบวกใน L ดังนี้

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

หมายเหตุ เราจะนิยามการเท่ากันและการบวกใน S และ H ในทำนองเดียวกันกับนิยามการเท่ากันและการบวกใน L ในบทนิยาม 3.4

ทฤษฎีบท 3.5. สมบัติปิดการบวก

1. ให้ $z_1, z_2 \in L$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 \in L$
2. ให้ $z_1, z_2 \in S$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 \in S$
3. ให้ $z_1, z_2 \in H$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 \in H$

พิสูจน์. ให้ $z_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ โดยที่ $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ และ $n = 1, 2$ จะได้ว่า

1. ให้ $z_1, z_2 \in L$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2 \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $z_1 + z_2 \in L$

2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1
3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1

□

ทฤษฎีบท 3.6. สมบัติการสลับที่การบวก

1. ให้ $z_1, z_2 \in L$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \in L$
2. ให้ $z_1, z_2 \in S$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \in S$
3. ให้ $z_1, z_2 \in H$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \in H$

พิสูจน์. ให้ $z_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ โดยที่ $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ และ $n = 1, 2$ จะได้ว่า

1. ให้ $z_1, z_2 \in L$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1) i + (c_2 + c_1) j + (d_2 + d_1) k \\ &= (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \in L$

2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1
3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1

□

ทฤษฎีบท 3.7. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก

1. ให้ $z_1, z_2, z_3 \in L$ จะได้ว่า $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \in L$
2. ให้ $z_1, z_2, z_3 \in L$ จะได้ว่า $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \in S$
3. ให้ $z_1, z_2, z_3 \in L$ จะได้ว่า $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \in H$

พิสูจน์. ให้ $z_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ โดยที่ $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ และ $n = 1, 2, 3$ จะได้ว่า

- 1 ให้ $z_1, z_2 \in L$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k] + (a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) i + (c_1 + c_2 + c_3) j + (d_1 + d_2 + d_3) k \\ &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) i + (c_2 + c_3) j + (d_2 + d_3) k] \\ &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \in L$

2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1
3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1

□

บทนิยาม 3.8. การคูณ

ให้ $z_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, z_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ โดยที่ $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{Z}$

1. ให้ $z_1, z_2 \in L$ นิยามการคูณใน L ดังนี้

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ &\quad + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ &\quad + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

2. ให้ $z_1, z_2 \in S$ นิยามการคูณใน S ดังนี้

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) \\ &\quad + (a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ &\quad + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

3. ให้ $z_1, z_2 \in H$ นิยามการคูณใน H ดังนี้

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) \\ &\quad + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ &\quad + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.9. สมบัติปิดการคูณ

1. ให้ $z_1, z_2 \in L$ จะได้ว่า $z_1 z_2 \in L$
2. ให้ $z_1, z_2 \in S$ จะได้ว่า $z_1 z_2 \in S$
3. ให้ $z_1, z_2 \in H$ จะได้ว่า $z_1 z_2 \in H$

พิสูจน์. ให้ $z_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, z_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ โดยที่ $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{Z}$

1. ให้ $z_1, z_2 \in L$ จากบทนิยาม 3.8 ข้อ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ &\quad + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ &\quad + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $z_1 z_2 \in L$

2. ให้ $z_1, z_2 \in S$ จากบทนิยาม 3.8 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) \\ &\quad + (a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ &\quad + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1c_2, a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 \in \mathbb{Z}$
 ดังนั้น $z_1z_2 \in S$

3. ให้ $z_1, z_2 \in H$ จากบทนิยาม 3.8 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) \\ &\quad + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ &\quad + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 \in \mathbb{Z}$
 ดังนั้น $z_1z_2 \in H$

□

ตัวอย่าง 3.10. ให้ $z_1 = 1 + i + 2j + 3k$ และ $z_2 = 1 + 2i + 4j + 5k$
 กรณี $z_1, z_2 \in L$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (1 + 2i + 4j + 5k)(1 + i + 2j + 3k) \\ &= (1 - 2 - 8 - 15) \\ &\quad + (2 + 1 - 10 + 12)i \\ &\quad + (4 + 5 + 2 - 6)j \\ &\quad + (5 - 4 + 4 + 5)k \\ &= -24 + 5i + 5j + 10k \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} z_2z_1 &= (1 + i + 2j + 3k)(1 + 2i + 4j + 5k) \\ &= (1 - 2 - 8 - 15) \\ &\quad + (2 + 1 + 10 - 12)i \\ &\quad + (4 - 5 + 2 + 6)j \\ &\quad + (5 + 4 - 4 + 3)k \\ &= -24 + i + 7j + 8k \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1z_2 = -24 + 5i + 5j + 10k \neq -24 + i + 7j + 8k = z_2z_1$ นั่นคือ $z_1z_2 \neq z_2z_1$

กรณี $z_1, z_2 \in S$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (1 + 2i + 4j + 5k)(1 + i + 2j + 3k) \\ &= (1 - 2 + 8 + 15) \\ &\quad + (2 + 1 + 10 - 12)i \\ &\quad + (4 + 5 + 2 - 6)j \\ &\quad + (3 - 4 + 4 + 5)k \\ &= 22 + i + 5j + 8k \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 z_2 z_1 &= (1 + i + 2j + 3k)(1 + 2i + 4j + 5k) \\
 &= (1 - 2 + 8 + 15) \\
 &\quad + (2 + 1 - 10 + 12)i \\
 &\quad + (4 - 5 + 2 + 6)j \\
 &\quad + (5 + 4 - 4 + 3)k \\
 &= 22 + 5i + 7j + 8k
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 z_2 = 22 + i + 5j + 8k \neq 22 + 5i + 7j + 8k = z_2 z_1$ นั่นคือ $z_1 z_2 \neq z_2 z_1$

กรณี $z_1, z_2 \in H$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (1 + 2i + 4j + 5k)(1 + i + 2j + 3k) \\
 &= (1 + 2 + 8 + 15) \\
 &\quad + (2 + 1 - 10 + 12)i \\
 &\quad + (4 + 5 + 2 - 6)j \\
 &\quad + (3 - 4 + 4 + 5)k \\
 &= 26 + 5i + 5j + 8k
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 z_2 z_1 &= (1 + i + 2j + 3k)(1 + 2i + 4j + 5k) \\
 &= (1 + 2 + 8 + 15) \\
 &\quad + (2 + 1 + 10 - 12)i \\
 &\quad + (4 - 5 + 2 + 6)j \\
 &\quad + (5 + 4 - 4 + 3)k \\
 &= 26 + i + 7j + 8k
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 z_2 = 26 + 5i + 5j + 8k \neq 26 + i + 7j + 8k = z_2 z_1$ นั่นคือ $z_1 z_2 \neq z_2 z_1$

ข้อสังเกต 3.11. จำนวนเต็มลิพชิตซ์ จำนวนเต็มสปลิตควอเทอร์เนียนและจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียนไม่มีสมบัติการสลับที่การคูณ

บทตั้ง 3.12. ให้ $z \in L, S$ หรือ H และ $\alpha \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $\alpha z = z\alpha$

พิสูจน์. ให้ $z = a + bi + cj + dk \in L, S$ หรือ H โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ และ $\alpha \in \mathbb{Z}$
พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \alpha z &= \alpha(a + bi + cj + dk) \\
 &= \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk \\
 &= a\alpha + b\alpha i + c\alpha j + d\alpha k \\
 &= (a + bi + cj + dk)\alpha \\
 &= z\alpha
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\alpha z = z\alpha$

□

ทฤษฎีบท 3.13. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณใน L

ให้ $z_1, z_2, z_3 \in L$ จะได้ว่า $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

พิสูจน์. ให้ $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k, z_3 = a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k \in L$

โดยที่ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (z_1 z_2) z_3 &= [(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)](a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \\
 &= [(a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\
 &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\
 &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\
 &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k](a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \\
 &= [(a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - c_1 c_2 a_3 - d_1 d_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3 - c_1 d_2 b_3 + d_1 c_2 b_3 \\
 &\quad - a_1 c_2 c_3 + b_1 d_2 c_3 - c_1 a_2 c_3 - d_1 b_2 c_3 - a_1 d_2 d_3 - b_1 c_2 d_3 + c_1 b_2 d_3 - d_1 a_2 d_3) \\
 &\quad + (a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + c_1 d_2 a_3 - d_1 c_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 - c_1 c_2 b_3 - d_1 d_2 b_3 \\
 &\quad - a_1 d_2 c_3 - b_1 c_2 c_3 + c_1 b_2 c_3 - d_1 a_2 c_3 + a_1 c_2 d_3 - b_1 d_2 d_3 + c_1 a_2 d_3 + d_1 b_2 d_3) i \\
 &\quad + (a_1 c_2 a_3 - b_1 d_2 a_3 + c_1 a_2 a_3 + d_1 b_2 a_3 + a_1 d_2 b_3 + b_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 b_3 + d_1 a_2 b_3 \\
 &\quad + a_1 a_2 c_3 - b_1 b_2 c_3 - c_1 c_2 c_3 - d_1 d_2 c_3 - a_1 b_2 d_3 - b_1 a_2 d_3 - c_1 d_2 d_3 + d_1 c_2 d_3) j \\
 &\quad + (a_1 d_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 + d_1 a_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 d_2 b_3 - c_1 a_2 b_3 - d_1 b_2 b_3 \\
 &\quad + a_1 b_2 c_3 + b_1 a_2 c_3 + c_1 d_2 c_3 - d_1 c_2 c_3 + a_1 a_2 d_3 - b_1 b_2 d_3 - c_1 c_2 d_3 - d_1 d_2 d_3) k] \\
 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)[(a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 - d_2 d_3) \\
 &\quad + (a_2 b_3 + b_2 a_3 + c_2 d_3 - d_2 c_3) i \\
 &\quad + (a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 + d_2 b_3) j \\
 &\quad + (a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + d_2 a_3) k] \\
 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)[(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)(a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k)] \\
 &= z_1 (z_2 z_3)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

□

ทฤษฎีบท 3.14. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณใน S

ให้ $z_1, z_2, z_3 \in S$ จะได้ว่า $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

พิสูจน์. ให้ $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k, z_3 = a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k \in S$

โดยที่ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (z_1 z_2) z_3 &= [(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)](a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \\
 &= [(a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\
 &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 + d_1 c_2) i \\
 &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\
 &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k] (a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \\
 &= [(a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 + c_1 c_2 a_3 + d_1 d_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3 + c_1 d_2 b_3 - d_1 c_2 b_3 \\
 &\quad + a_1 c_2 c_3 - b_1 d_2 c_3 + c_1 a_2 c_3 + d_1 b_2 c_3 + a_1 d_2 d_3 + b_1 c_2 d_3 - c_1 b_2 d_3 + d_1 a_2 d_3) \\
 &\quad + (a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 - c_1 d_2 a_3 + d_1 c_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_2 b_3 + c_1 c_2 b_3 + d_1 d_2 b_3 \\
 &\quad + a_1 d_2 c_3 + b_1 c_2 c_3 - c_1 b_2 c_3 + d_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 d_3 + b_1 d_2 d_3 - c_1 a_2 d_3 - d_1 b_2 d_3) i \\
 &\quad + (a_1 c_2 a_3 - b_1 d_2 a_3 + c_1 a_2 a_3 + d_1 b_2 a_3 + a_1 d_2 b_3 + b_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 b_3 + d_1 a_2 b_3 \\
 &\quad + a_1 a_2 c_3 - b_1 b_2 c_3 + c_1 c_2 c_3 + d_1 d_2 c_3 - a_1 b_2 d_3 - b_1 a_2 d_3 + c_1 d_2 d_3 - d_1 c_2 d_3) j \\
 &\quad + (a_1 d_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 + d_1 a_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 d_2 b_3 - c_1 a_2 b_3 - d_1 b_2 b_3 \\
 &\quad + a_1 b_2 c_3 + b_1 a_2 c_3 - c_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 c_3 + a_1 a_2 d_3 - b_1 b_2 d_3 + c_1 c_2 d_3 + d_1 d_2 d_3) k] \\
 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) [(a_2 a_3 - b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3) \\
 &\quad + (a_2 b_3 + b_2 a_3 - c_2 d_3 + d_2 c_3) i \\
 &\quad + (a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 + d_2 b_3) j \\
 &\quad + (a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + d_2 a_3) k] \\
 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) [(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)(a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k)] \\
 &= z_1 (z_2 z_3)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

□

ตัวอย่าง 3.15. ให้ $z_1 = i, z_2 = 5 + 3j + 4k, z_3 = 5 - 3j - 4k \in H$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (z_1 z_2) z_3 &= [i(5 + 3j + 4k)](5 - 3j - 4k) \\
 &= (5i + 3ij + 4ik)(5 - 3j - 4k) \\
 &= (5i - 4j + 3k)(5 - 3j - 4k) \\
 &= (12 - 12) + (25 + 9 + 16)i + (-20 + 20)j + (15 - 15)k \\
 &= 50i
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 z_1 (z_2 z_3) &= i[(5 + 3j + 4k)(5 - 3j - 4k)] \\
 &= i(0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(z_1 z_2) z_3 = 50i \neq 0 = z_1 (z_2 z_3)$

นั่นคือ $(z_1 z_2) z \neq z_1 (z_2 z_3)$

ข้อสังเกต 3.16. จำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเทอร์เนียน ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ

บทนิยาม 3.17. สังยุค

ให้ $z = a + bi + cj + dk \in L, S$ หรือ H โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

นิยามสังยุคของ z ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ กำหนดโดย $\bar{z} = a - bi - cj - dk$

ทฤษฎีบท 3.18. ถ้า $z_1, z_2 \in L$ หรือ $z_1, z_2 \in S$ หรือ $z_1, z_2 \in H$ แล้ว $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_2 \bar{z}_1$

พิสูจน์. ให้ $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ และ $z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ โดยที่ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$
 จะได้ว่า $\bar{z}_1 = a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k$ และ $\bar{z}_2 = a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k$
 กรณี $z_1, z_2 \in L$ จากนิยามการคูณใน L จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\ &\quad - (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ &\quad - (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\ &\quad - (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k \\ &= (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1) \\ &\quad + (-b_2 a_1 - a_2 b_1 - d_2 c_1 + c_2 d_1) i \\ &\quad + (-c_2 a_1 + d_2 b_1 - a_2 c_1 - b_2 d_1) j \\ &\quad + (-d_2 a_1 - c_2 b_1 + b_2 c_1 - a_2 d_1) k \\ &= (a_2 a_1 - (-b_2)(-b_1) - (-c_2)(-c_1) - (-d_2)(-d_1)) \\ &\quad + (a_2(-b_1) + (-b_2)a_1 + (-c_2)(-d_1) - (-d_2)(-c_1)) i \\ &\quad + (a_2 c_1 - (-b_2)(-d_1) + (-c_2)a_1 + (-d_2)(-b_1)) j \\ &\quad + (a_2(-d_1) + (-b_2)(-c_1) - (-c_2)(-b_1) + (-d_2)a_1) k \\ &= (a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k)(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k) \\ &= \bar{z}_2 \bar{z}_1 \end{aligned}$$

กรณี $z_1, z_2 \in S$ จากนิยามการคูณใน S จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 + d_1 c_2) i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\
&\quad - (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\
&\quad - (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j \\
&\quad - (+a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k \\
&= (a_2 a_1 - b_2 b_1 + c_2 c_1 + d_2 d_1) \\
&\quad + (-a_2 b_1 - b_2 a_1 - c_2 d_1 - d_2 c_1)i \\
&\quad + (-a_2 c_1 - b_2 d_1 - c_2 a_1 + d_2 b_1)j \\
&\quad + (-a_2 d_1 + b_2 c_1 - c_2 b_1 - d_2 a_1)k \\
&= (a_2 a_1 - (-b_2)(-b_1) + (-c_2)(-c_1) + (-d_2)(-d_1)) \\
&\quad + (a_2(-b_1) + (-b_2)a_1 + (-c_2)(-d_1) - (-d_2)(-c_1))i \\
&\quad + (a_2(-c_1) - (-b_2)(-d_1) + (-c_2)a_1 + (-d_2)(-b_1))j \\
&\quad + (a_2(-d_1) + (-b_2)(-c_1) - (-c_2)(-b_1) + (-d_2)a_1)k \\
&= (a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k)(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k) \\
&= \bar{z}_2 \bar{z}_1
\end{aligned}$$

กรณี $z_1, z_2 \in H$ จากนิยามการคูณใน H จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\
&\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\
&\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j \\
&\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k
\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\
&\quad - (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\
&\quad - (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j \\
&\quad - (+a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k \\
&= (a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 + d_2 d_1) \\
&\quad + (-a_2 b_1 - b_2 a_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1)i \\
&\quad + (-a_2 c_1 - b_2 d_1 - c_2 a_1 + d_2 b_1)j \\
&\quad + (-a_2 d_1 + b_2 c_1 - c_2 b_1 - d_2 a_1)k \\
&= (a_2 a_1 + (-b_2)(-b_1) + (-c_2)(-c_1) + (-d_2)(-d_1)) \\
&\quad + (a_2(-b_1) + (-b_2)a_1 + (-c_2)(-d_1) - (-d_2)(-c_1))i \\
&\quad + (a_2(-c_1) - (-b_2)(-d_1) + (-c_2)a_1 + (-d_2)(-b_1))j \\
&\quad + (a_2(-d_1) + (-b_2)(-c_1) - (-c_2)(-b_1) + (-d_2)a_1)k \\
&= (a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k)(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k) \\
&= \bar{z}_2 \bar{z}_1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_2 \bar{z}_1$ โดยที่ $z_1, z_2 \in L$ หรือ $z_1, z_2 \in S$ หรือ $z_1, z_2 \in H$

□

บทนิยาม 3.19. ให้ $z = a + bi + cj + dk \in L, S$ หรือ H โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
 นิยาม **นอร์ม** (norm) ของ z ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $N(z)$ กำหนดโดย

$$N(z) = z\bar{z}$$

ข้อสังเกต 3.20. จากบทนิยาม 3.19
 กรณี $z \in L$ จะได้

$$N(z) = z\bar{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

กรณี $z \in S$ จะได้

$$N(z) = z\bar{z} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

กรณี $z \in H$ จะได้

$$N(z) = z\bar{z} = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$$

ตัวอย่าง 3.21. ให้ $z = 1 + i + 6j + 5k \in L$
 จะได้ว่า $\bar{z} = 1 - i - 6j - 5k$ ดังนั้น

$$N(z) = z\bar{z} = (1 + i + 6j + 5k)(1 - i - 6j - 5k) = 1 + 1 + 36 + 25 = 63$$

ตัวอย่าง 3.22. ให้ $z = 2 - i + 2j + 8k \in S$
 จะได้ว่า $\bar{z} = 2 + i - 2j - 8k$ ดังนั้น

$$N(z) = z\bar{z} = (2 - i + 2j + 8k)(2 + i - 2j - 8k) = 4 + 1 - 4 - 64 = -63$$

ตัวอย่าง 3.23. ให้ $z = -5 + 2i + 8j - 5k \in H$
 จะได้ว่า $\bar{z} = -5 - 2i - 8j + 5k$ ดังนั้น

$$N(z) = z\bar{z} = (-5 + 2i + 8j - 5k)(-5 - 2i - 8j + 5k) = 25 - 4 - 64 - 25 = -68$$

ข้อสังเกต 3.24. $N(z)$ เป็นจำนวนเต็มสำหรับทุก $z \in L, S$ หรือ H

ทฤษฎีบท 3.25. ให้ $z_1, z_2 \in L$ หรือ $z_1, z_2 \in S$ จะได้ว่า $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$

พิสูจน์. กรณี $z_1, z_2 \in L$
 พิจารณา

$$\begin{aligned} N(z_1 z_2) &= (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} \\ &= (z_1 z_2) (\bar{z}_2 \bar{z}_1) && \text{(จากทฤษฎีบท 3.18)} \\ &= ((z_1 z_2) \bar{z}_2) \bar{z}_1 && \text{(จากทฤษฎีบท 3.13)} \\ &= (z_1 (z_2 \bar{z}_2)) \bar{z}_1 && \text{(จากทฤษฎีบท 3.13)} \\ &= (z_1 N(z_2)) \bar{z}_1 \\ &= z_1 (N(z_2) \bar{z}_1) && \text{(จากทฤษฎีบท 3.13)} \\ &= z_1 (\bar{z}_1 N(z_2)) && \text{(จากบทตั้ง 3.12)} \\ &= (z_1 \bar{z}_1) N(z_2) && \text{(จากทฤษฎีบท 3.13)} \\ &= N(z_1) N(z_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$ โดยที่ $z_1, z_2 \in L$

□

พิสูจน์. กรณี $z_1, z_2 \in S$
พิจารณา

$$\begin{aligned}
 N(z_1 z_2) &= (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} \\
 &= (z_1 z_2) (\bar{z}_2 \bar{z}_1) && \text{(จากทฤษฎีบท 3.18)} \\
 &= ((z_1 z_2) \bar{z}_2) \bar{z}_1 && \text{(จากทฤษฎีบท 3.14)} \\
 &= (z_1 (z_2 \bar{z}_2)) \bar{z}_1 && \text{(จากทฤษฎีบท 3.14)} \\
 &= (z_1 N(z_2)) \bar{z}_1 \\
 &= z_1 (N(z_2) \bar{z}_1) && \text{(จากทฤษฎีบท 3.14)} \\
 &= z_1 (\bar{z}_1 N(z_2)) && \text{(จากบทตั้ง 3.12)} \\
 &= (z_1 \bar{z}_1) N(z_2) && \text{(จากทฤษฎีบท 3.14)} \\
 &= N(z_1) N(z_2)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2)$ โดยที่ $z_1, z_2 \in S$ □

สรุปได้ว่า $N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2)$ สำหรับ $z_1, z_2 \in L$ หรือ $z_1, z_2 \in S$

ตัวอย่าง 3.26. กำหนดให้ $z_1, z_2 \in H$ โดยที่ $z_1 = 5 + 3j + 4k$ และ $z_2 = 3 - i$
จากข้อสังเกต 3.20 จะได้ว่า $N(z_1) = 5^2 - 3^2 - 4^2 = 0$ และ $N(z_2) = 3^2 - 1^2 = 8$
นั่นคือ $N(z_1) N(z_2) = 0 \cdot 8 = 0$
พิจารณา

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= 5(3 - i) + 3j(3 - i) + 4k(3 - i) \\
 &= 15 - 5i + 9 - 3k + 12k - 4j \\
 &= 15 - 5i + 13j + 9k
 \end{aligned}$$

จากข้อสังเกต 3.20 ได้ว่า $N(z_1 z_2) = 15^2 + 5^2 - 13^2 - 9^2 = 225 - 25 - 9 - 441 = -250$

ดังนั้น $N(z_1 z_2) \neq N(z_1) N(z_2)$ โดยที่ $z_1, z_2 \in H$

ข้อสังเกต 3.27. ทฤษฎีบท 3.25 ไม่จริงสำหรับจำนวนเต็มไฮเพอร์โบลิกควอเตอร์เนียน

บทนิยาม 3.28. ตัวประกอบ

ให้ $z_1, z_2 \in L$ เราจะกล่าวว่า z_2 เป็น**ตัวประกอบ** (factor) ของ z_1 ถ้ามี $z \in L$ ซึ่ง $z_1 = z z_2$ หรือ $z_1 = z_2 z$

หมายเหตุ เราจะนิยามตัวประกอบใน S และ H ในทำนองเดียวกันกับนิยามตัวประกอบใน L ในบทนิยาม 3.28

ทฤษฎีบท 3.29. ให้ $z_1, z_2 \in L$ หรือ $z_1, z_2 \in S$ ถ้า z_2 เป็นตัวประกอบของ z_1 แล้ว $N(z_2)$ เป็นตัวประกอบของ $N(z_1)$

พิสูจน์. ให้ $z_1, z_2 \in L$ สมมติว่า z_2 เป็นตัวประกอบของ z_1 นั่นคือ มี $z \in L$ ซึ่ง $z_1 = z z_2$ หรือ $z_1 = z_2 z$
กรณีที่ 1 $z_1 = z z_2$ จากทฤษฎีบท 3.25 จะได้ว่า

$$N(z_1) = N(z z_2) = N(z) N(z_2)$$

ดังนั้น $N(z_2)$ เป็นตัวประกอบ $N(z_1)$

กรณีที่ 2 $z_1 = z z_2$ จากทฤษฎีบท 3.25 จะได้ว่า

$$N(z_1) = N(z z_2) = N(z) N(z_2)$$

ดังนั้น $N(z_2)$ เป็นตัวประกอบ $N(z_1)$

สำหรับ $z_1, z_2 \in S$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ $z_1, z_2 \in L$

สรุปได้ว่าถ้า z_2 เป็นตัวประกอบของ z_1 แล้ว $N(z_2)$ เป็นตัวประกอบของ $N(z_1)$ สำหรับ $z_1, z_2 \in L$ หรือ $z_1, z_2 \in S$ $\square$

บทนิยาม 3.30. ยูนิต

ให้ $z \in L$ เราจะกล่าวว่า z เป็นยูนิต (unit) ถ้า z เป็นตัวประกอบของ 1

หมายเหตุ เราจะนิยามยูนิตใน S และ H ในทำนองเดียวกันกับนิยามยูนิตใน L ในบทนิยาม 3.30

ตัวอย่าง 3.31. พิจารณา

$$(1)(1) = (-1)(-1) = 1 \quad \text{นั่นคือ } 1 \text{ และ } -1 \text{ เป็นตัวประกอบของ } 1$$

$$(i)(-i) = (-i)(i) = 1 \quad \text{นั่นคือ } i \text{ และ } -i \text{ เป็นตัวประกอบของ } 1$$

$$(j)(-j) = (-j)(j) = 1 \quad \text{นั่นคือ } j \text{ และ } -j \text{ เป็นตัวประกอบของ } 1$$

$$(k)(-k) = (-k)(k) = 1 \quad \text{นั่นคือ } k \text{ และ } -k \text{ เป็นตัวประกอบของ } 1$$

ดังนั้น $\pm 1, \pm i, \pm j$ และ $\pm k$ เป็นยูนิต

ทฤษฎีบท 3.32. ให้ $z \in L$ จะได้ว่า $N(z) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$

พิสูจน์. ให้ $z = a + bi + cj + dk \in L$ โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

สมมติว่า $N(z) = 1$ นั่นคือ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$

เนื่องจาก a^2, b^2, c^2 และ d^2 เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

จะได้ว่า $a^2 = 1$ หรือ $b^2 = 1$ หรือ $c^2 = 1$ หรือ $d^2 = 1$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

นั่นคือ $a = \pm 1$ หรือ $b = \pm 1$ หรือ $c = \pm 1$ หรือ $d = \pm 1$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ดังนั้น z ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$

ในทางกลับกัน ถ้า $z = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ แล้วจะเห็นได้ชัดว่า $N(z) = 1$

สรุปได้ว่า $N(z) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ สำหรับ $z \in L$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.33. ให้ $z \in S$ จะได้ว่า $N(z) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = \pm 1 \pm bi \pm cj \pm dk$ โดยที่ $b^2 = c^2 + d^2$ หรือ $z = \pm a \pm i \pm cj \pm dk$ โดยที่ $a^2 = c^2 + d^2$

พิสูจน์. ให้ $z = a + bi + cj + dk \in S$ โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

สมมติว่า $N(z) = 1$ นั่นคือ $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 1$

เนื่องจาก a^2 และ b^2 เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ $-c^2$ และ $-d^2$ เป็นจำนวนเต็มลบหรือศูนย์

จะได้ว่า $a^2 = 1$ หรือ $b^2 = 1$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

นั่นคือ $a = \pm 1$ หรือ $b = \pm 1$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

กรณีที่ 1 $a = \pm 1$

จากสมการ $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 1$ จะได้ว่า

$$1 + b^2 - c^2 - d^2 = 1$$

$$b^2 - c^2 - d^2 = 0$$

$$b^2 = c^2 + d^2$$

กรณีที่ 2 $b = \pm 1$

จากสมการ $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 + 1 - c^2 - d^2 &= 1 \\ a^2 - c^2 - d^2 &= 0 \\ a^2 &= c^2 + d^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $z = \pm 1 \pm bi \pm cj \pm dk$ โดยที่ $b^2 = c^2 + d^2$ หรือ $z = \pm a \pm i \pm cj \pm dk$ โดยที่ $a^2 = c^2 + d^2$
ในทางกลับกัน กรณีที่ 1 ถ้า $z = \pm 1 \pm bi \pm cj \pm dk$ โดยที่ $b^2 = c^2 + d^2$
จาก ข้อสังเกต 3.20 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N(z) &= 1^2 + b^2 - c^2 - d^2 \\ &= 1^2 + c^2 + d^2 - c^2 - d^2 \quad (\text{เนื่องจาก } b^2 = c^2 + d^2) \\ N(z) &= 1 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $z = \pm a \pm i \pm cj \pm dk$ โดยที่ $a^2 = c^2 + d^2$
จาก ข้อสังเกต 3.20 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N(z) &= a^2 + 1^2 - c^2 - d^2 \\ &= c^2 + d^2 + 1^2 - c^2 - d^2 \quad (\text{เนื่องจาก } a^2 = c^2 + d^2) \\ N(z) &= 1 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $N(z) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = \pm 1 \pm bi \pm cj \pm dk$ โดยที่ $b^2 = c^2 + d^2$ หรือ
 $z = \pm a \pm i \pm cj \pm dk$ โดยที่ $a^2 = c^2 + d^2$ สำหรับ $z \in S$ □

ทฤษฎีบท 3.34. ให้ $z \in H$ จะได้ว่า $N(z) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = \pm 1$

พิสูจน์. ให้ $z = a + bi + cj + dk \in H$ โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

สมมติว่า $N(z) = 1$ นั่นคือ $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1$

เนื่องจาก a^2 เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ $-b^2, -c^2, -d^2$ เป็นจำนวนเต็มลบหรือศูนย์
จะได้ว่า $a^2 = 1$ และจาก $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 - b^2 - c^2 - d^2 &= 1 \\ -b^2 - c^2 - d^2 &= 0 \\ b^2 + c^2 + d^2 &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = \pm 1, b = 0, c = 0$ และ $d = 0$ นั่นคือ $z = \pm 1$

ในทางกลับกัน ถ้า $z = \pm 1$ แล้วจะเห็นได้ชัดว่า $N(z) = 1$

สรุปได้ว่า $N(z) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = \pm 1$ สำหรับ $z \in H$ □

ทฤษฎีบท 3.35. ให้ $z \in L$ จะได้ว่า z เป็นยูนิต ก็ต่อเมื่อ $N(z) = 1$

พิสูจน์. ให้ z เป็นยูนิต

จะได้ว่า $zz_1 = 1$ หรือ $z_1z = 1$ สำหรับบาง $z_1 \in L$

พิจารณา $N(z_1)N(z) = N(1) = 1$ ดังนั้น $N(z) \neq 0$

เนื่องจาก $N(z)$ เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ดังนั้น $N(z) = 1$

ในทางกลับกัน ให้ $N(z) = 1$

จากบทนิยาม 3.30 จะได้ว่า $z = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$

และจากตัวอย่าง 3.31 จะได้ว่า $z = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ เป็นยูนิต

สรุปได้ว่า z เป็นยูนิต ก็ต่อเมื่อ $N(z) = 1$ สำหรับ $z \in L$ □

บทนิยาม 3.36. จำนวนเฉพาะ

ให้ $z \in L$ เราจะกล่าวว่า z เป็น **จำนวนเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $z = z_1 z_2$ สำหรับบาง $z_1, z_2 \in L$ แล้ว z_1 หรือ z_2 ต้องเป็นยูนิตเพียงตัวเดียวเท่านั้น

หมายเหตุ เราจะนิยามจำนวนเฉพาะใน S และ H ในทำนองเดียวกันกับนิยามจำนวนเฉพาะใน L ในบทนิยาม 3.36

ตัวอย่าง 3.37. ให้ $z = 1 + i + j + k \in L$

ได้ว่า $z = (1 + i + j + k)(1) = (1)(1 + i + j + k)$ ซึ่ง 1 เป็นยูนิต

นอกจากนี้ $(1 + i)(1 + j) = 1 + i + j + ij = 1 + i + j + k$

ซึ่ง $1 + j$ ไม่เป็นยูนิต เพราะ จากทฤษฎีบท 3.35 $N(1 + j) = 2 \neq 1$

ดังนั้น $z = 1 + i + j + k \in L$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

ทฤษฎีบท 3.38. ให้ $z \in L$ ถ้า $N(z)$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว z เป็นจำนวนเฉพาะใน L

พิสูจน์. ให้ $z \in L$

สมมติว่า $N(z)$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $N(z) > 1$ จะแสดงว่า z เป็นจำนวนเฉพาะใน L

ให้ $z = z_1 z_2$ สำหรับบาง $z_1, z_2 \in L$

จากทฤษฎีบท 3.25 จะได้ว่า $N(z) = N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$

จาก $N(z) > 1$ จะได้ว่า $N(z) \neq 0$ ดังนั้น $N(z_1) \neq 0$ และ $N(z_2) \neq 0$

สมมติว่า z_1 และ z_2 ไม่ใช่ยูนิต

จากทฤษฎีบท 3.35 $N(z_1) \neq 1$ และ $N(z_2) \neq 1$

เนื่องจากนอร์มใน L เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ จะได้ว่า $N(z_1) > 1$ และ $N(z_2) > 1$

ดังนั้น $N(z) = N(z_1)N(z_2)$ ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน

นั่นคือ z_1 หรือ z_2 เป็นยูนิต

สังเกตว่าถ้า z_1 และ z_2 เป็นยูนิต จะได้ $N(z_1) = N(z_2) = 1$

ดังนั้น $N(z) = N(z_1)N(z_2) = 1$ เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจาก $N(z) > 1$

นั่นคือ z_1 หรือ z_2 เป็นยูนิตได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ดังนั้น z เป็นจำนวนเฉพาะใน L

สรุปได้ว่า สำหรับ $z \in L$ ถ้า $N(z)$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว z เป็นจำนวนเฉพาะใน L □

ตัวอย่าง 3.39. ให้ $z = 1 + i + j \in L$

พิจารณา $N(z) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ

จากทฤษฎีบท 3.38 จะได้ว่า z เป็นจำนวนเฉพาะใน L

ทฤษฎีบท 3.40. ให้ $z_1, z_2 \in L$ จะได้ว่า $z_1 z_2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $N(z_1) = 0$ หรือ $N(z_2) = 0$

พิสูจน์. ให้ $z_1, z_2 \in L$

สมมติว่า $z_1 z_2 = 0$

พิจารณา $N(z_1)N(z_2) = N(z_1 z_2) = N(0) = 0$

เนื่องจากนอร์มใน L เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

จะได้ว่า $N(z_1) = 0$ หรือ $N(z_2) = 0$

ในทางกลับกัน สมมติว่า $N(z_1) = 0$ หรือ $N(z_2) = 0$

กรณีที่ 1 $N(z_1) = 0$

นั่นคือ $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 0$

จะได้ว่า $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$

นั่นคือ $z_1 = 0$ ดังนั้น $z_1 z_2 = 0$

กรณีที่ 2 $N(z_2) = 0$

นั่นคือ $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = 0$

จะได้ว่า $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0$

นั่นคือ $z_2 = 0$ ดังนั้น $z_1 z_2 = 0$

สรุป $z_1 z_2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $N(z_1) = 0$ หรือ $N(z_2) = 0$ โดยที่ $z_1, z_2 \in L$ □

ทฤษฎีบท 3.41. ให้ $z_1, z_2 \in S$ ถ้า $z_1 z_2 = 0$ แล้ว $N(z_1) = 0$ หรือ $N(z_2) = 0$

พิสูจน์. ให้ $z_1 z_2 = 0$

จากทฤษฎีบท 3.25 จะได้ $N(z_1)N(z_2) = N(z_1 z_2) = N(0) = 0$

ดังนั้น $N(z_1) = 0$ หรือ $N(z_2) = 0$

สรุปได้ว่า ถ้า $z_1 z_2 = 0$ แล้ว $N(z_1) = 0$ หรือ $N(z_2) = 0$ สำหรับ $z_1, z_2 \in S$ □

ทฤษฎีบท 3.42. ให้ $z, z_1, z_2 \in L$ ถ้า $N(z) \neq 0$ และ $z = z_1 z_2$ โดยที่ z_1 และ z_2 ที่ไม่เป็นยูนิต แล้ว $N(z_1) < N(z)$ และ $N(z_2) < N(z)$

พิสูจน์. ให้ $z, z_1, z_2 \in L$ สมมติว่า $N(z) \neq 0$ และ $z = z_1 z_2$ โดยที่ z_1 และ z_2 ที่ไม่เป็นยูนิต

พิจารณา $N(z) = N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$

เนื่องจาก $N(z) \neq 0$ จะได้ว่า $N(z_1) \neq 0$ และ $N(z_2) \neq 0$

เนื่องจาก z_1 และ z_2 ไม่ใช่ยูนิต

จากทฤษฎีบท 3.35 จะได้ว่า $N(z_1) \neq 1$ และ $N(z_2) \neq 1$

เนื่องจากนอร์มใน L เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ จะได้ว่า $N(z_1) > 1$ และ $N(z_2) > 1$

ดังนั้น $N(z) = N(z_1)N(z_2) > N(z_1)$ และ $N(z) = N(z_1)N(z_2) > N(z_2)$

สรุปได้ว่าถ้า $N(z) \neq 0$ และ $z = z_1 z_2$ โดยที่ z_1 และ z_2 ที่ไม่เป็นยูนิต แล้ว $N(z_1) < N(z)$ และ $N(z_2) < N(z)$

เมื่อ $z, z_1, z_2 \in L$ □

ทฤษฎีบท 3.43. ให้ $z, z_1, z_2 \in S$ ถ้า $N(z) \neq 0$ และ $z = z_1 z_2$ โดยที่ z_1 และ z_2 ที่ไม่เป็นยูนิต แล้ว $|N(z_1)| < |N(z)|$ และ $|N(z_2)| < |N(z)|$

พิสูจน์. ให้ $z \in S$ สมมติว่า $N(z) \neq 0$

สมมติ $z = z_1 z_2$ สำหรับบาง $z_1, z_2 \in S$

จากทฤษฎีบท 3.25 ได้ว่า $N(z) = N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$

จากทฤษฎีบท 3.42 จะได้ว่า $N(z_1) \neq 0$ และ $N(z_2) \neq 0$

สมมติว่า z_1 และ z_2 ไม่ใช่ยูนิต

ได้ว่า $|N(z_1)| > 1$ และ $|N(z_2)| > 1$

ดังนั้น $N(z)$ ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน

สรุปได้ว่า z_1 หรือ z_2 ต้องเป็นยูนิต

ดังนั้น z เป็นจำนวนเฉพาะใน S

นั่นคือ ถ้า $N(z) \neq 0$ และ $z = z_1 z_2$ โดยที่ z_1 และ z_2 ที่ไม่เป็นยูนิต แล้ว $|N(z_1)| < |N(z)|$ และ $|N(z_2)| < |N(z)|$ สำหรับ $z, z_1, z_2 \in S$ $\square$

บรรณานุกรม

- [1] กุลนาถ ทีปประพันธ์ณี, สมบัติของจำนวนเต็ม. สืบค้นเมื่อ 2 กุมภาพันธ์ 2566, จาก <https://tuemaster.com/blog/author/tmtyai/>
- [2] ปราภนา ใจผ่อง (2562), แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์. ความรู้พื้นฐาน, 22.
- [3] อติศักดิ์ มหาวรรณ, สมบัติของจำนวนนับ. สืบค้นเมื่อ 2 กุมภาพันธ์ 2566, จาก <https://sites.google.com/a/web1.dara.ac.th/count/--sara-kar-reiyn-ru/--thvsdibth-pi-tha-ko-ras>
- [4] Y. Jia (2013), Quaternions and rotations, The Mathematics Teacher, September 2013 : 477 – 577.
- [5] K. McCrimmon (2004), A taste of Jordan algebras, Universitext, Springer ISBN 0-387-95447-3 MR2014924
- [6] W. Miller and R. Boehning (1968), Gaussian, parabolic and hyperbolic numbers, The Mathematics Teacher, April 1968 : 377 – 382.
- [7] N. Tsopanidis (2020), The Hurwitz and Lipschitz integers and some applications, Hurwitz and Pall on Integral Quaternions : 25 – 43.