

การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นโดยวิธีการแทนค่า
(Solving Nonlinear Sound Wave Equation by Substitution Methods)

นางสาวธัญญา ปราบหงษ์
รหัส 620510324

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นโดยวิธีการแทนค่า
(Solving Nonlinear Sound Wave Equation by Substitution Methods)

ธัญญา ปราบหงษ์

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

.....
ดร. ฐพล พลอยมะกล้า

ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ฐพล พลอยมะกล้า)

.....
ดร. เบน วงศ์สายใจ

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เบน วงศ์สายใจ)

3/04/2566

การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นโดยวิธีการแทนค่า
(Solving Nonlinear Sound Wave Equation by Substitution Methods)

นางสาวธัญญา ปราบหงษ์
รหัส 620510324

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระเล่มนี้สามารถประสบความสำเร็จได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความอนุเคราะห์ความช่วยเหลือจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพล พลอยมะกล้า ซึ่งเป็นอาจารย์ที่คอยให้คำปรึกษา และเปิดโอกาสให้ข้าพเจ้าได้ทำการศึกษา งานค้นคว้าอิสระเรื่องนี้ อีกทั้งยังคอยให้ความช่วยเหลือให้ความรู้และคำแนะนำต่าง ๆ ตลอดจนเป็นผู้พิจารณาตรวจสอบ และแก้ไขจนทำให้การศึกษางานค้นคว้าอิสระเล่มนี้เสร็จสมบูรณ์ไปด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เบน วงศ์สายใจ อาจารย์กรรมการสอบ งานค้นคว้าอิสระ รวมทั้งตรวจสอบ ความคืบหน้าความถูกต้องของงานค้นคว้าอิสระเล่มนี้ อีกทั้งคอยให้ คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงาน ค้นคว้าอิสระเล่มนี้ให้ดียิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ทุก ๆ ท่าน ที่ได้ให้ความรู้ทั้งด้าน ในและนอกตำรา เรียนให้แก่ข้าพเจ้า ซึ่งทำให้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษางานค้นคว้าอิสระเล่มนี้ ได้เป็นอย่างดี

นอกจากนี้ ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณมารดา และครอบครัว ผู้ที่ให้กำลังใจแก่ข้าพเจ้ามาโดยตลอด รวมถึงผู้มี พระคุณทุกท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับงานค้นคว้าอิสระเล่มนี้ ซึ่งไม่ได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ด้วย

สุดท้ายนี้ หวังว่างานค้นคว้าอิสระเล่มนี้จะมีประโยชน์ต่อผู้ศึกษาไม่มากนักน้อย หากผลงานการ ค้นคว้าอิสระเล่มนี้ เกิดข้อผิดพลาดประการใดหรือขาดตกบกพร่องประการใด ข้าพเจ้าก็ขออภัยมา ณ ที่นี้ ด้วย

ธนัชญา ปราบหงษ์

หัวข้อ (ภาษาไทย)	การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นโดยวิธีการแทนค่า
(ภาษาอังกฤษ)	Solving Nonlinear Sound Wave Equation by Substitution Methods
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นางสาวธนัชญา ปราบหงษ์ รหัสนักศึกษา 620510324
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพล พลอยมะกล้า
ชื่อกรรมการสอบ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เบน วงศ์สายใจ

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษานิยามและคุณสมบัติทางฟิสิกส์ของสมการคลื่นเสียงแบบไม่เชิงเส้น และได้ศึกษาวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันต่าง ๆ เช่น ฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฯลฯ เพื่อหาคำตอบที่ได้จากวิธีการแทนค่า นอกจากนี้เรายังได้ศึกษาการใช้โปรแกรมเพื่อสร้างกราฟสามมิติจากสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น

คำสำคัญ : สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย, สมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น, วิธีการแทนค่า

Abstract

In this independent study, we investigate the definition and the physical meaning of nonlinear sound wave equations. Then, we attempt to find solutions of the partial differential equation using substitution techniques, such as the sine-cosine method, the exponential method, etc. We also use software to create a 3D graph of the solution to the nonlinear sound wave equation obtained from the substitution technique.

Keywords : Partial Differential Equations, Nonlinear Sound Wave Equation, Substitution methods

Contents

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (introduction)	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
2.1 กฎลูกโซ่ (Chain rule)	2
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations)	2
2.3 สมการคลื่นเสียง (Sound Wave Equations)	3
2.4 วิธีการแทนค่า (Substitution Methods)	5
3 การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นโดยวิธีการแทนค่า (Solving Nonlinear Sound Wave Equation by Substitution Methods)	7
3.1 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ (Sine-Cosine Method)	7
3.2 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Method)	9
3.3 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก (Tanh Method)	9
4 ผลการศึกษา (Results)	12
4.1 การหาคำตอบของสมการฟิ-โฟร์	12
4.1.1 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์	12
4.1.2 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	14
4.1.3 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก	15

4.2	การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น	18
4.2.1	วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์	18
4.2.2	วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	19
4.3	การหาคำตอบสมการคลื่นเสียงในของไหล	21
4.3.1	สมการคลื่นเสียงในของไหล	21
4.3.2	สมการคลื่นเสียงในของไหลแบบไม่เชิงเส้น	24
4.4	สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	30
บรรณานุกรม		31
บรรณานุกรม		31

Chapter 1

บทนำ (introduction)

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

คลื่นคือปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่ขึ้นอยู่กับเวลา ซึ่งสามารถอธิบายผ่านรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งมีตัวแปรอิสระ $u(x, t)$ (แสดงถึงค่าของคลื่น) และตัวแปรอิสระ t (เวลา) และอีกหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งตัวแปรอิสระเกี่ยวกับตำแหน่ง $x \in \mathbb{R}^n$ ซึ่งโดยทั่วไป $n = 1, 2, 3$ รูปแบบปกติของคลื่นขึ้นอยู่กับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น เงื่อนไขค่าขอบของโดเมนของคำตอบ และความแปรปรวน ส่วนมากคลื่นจะปรากฏในกฎเกณฑ์เกี่ยวกับวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ตัวอย่างเช่น กลศาสตร์ของไหล แสง แม่เหล็กไฟฟ้า กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์โครงสร้าง กลศาสตร์ควอนตัม ฯลฯ คลื่นสำหรับการประยุกต์ต่อไปนี้จะถูกอธิบายด้วยคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

คลื่นเสียงเป็นปรากฏการณ์ที่อธิบายถึงการกระจายตัวของคลื่นในตัวกลางหนึ่ง เป็นปรากฏการณ์ที่พบเห็นได้ตามธรรมชาติ และเป็นแบบจำลองของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติต่าง ๆ แสดงให้เห็นถึงพฤติกรรมของคลื่น สมการคลื่นเสียงมีรูปแบบทั่วไปคือ $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ แต่ในกรณีนี้เราจะศึกษาสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น ซึ่งเขียนในรูปของสมการความต่อเนื่องของของไหล $\rho_t + (\rho v)_x = 0$ และสมการของออยเลอร์ $\rho(v_t + v v_x) = -P_x$ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น

วิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมีหลายวิธี เช่น วิธีลักษณะเฉพาะ (Characteristic method) วิธีแยกตัวแปร (Separable method) แต่มีอีกวิธีหนึ่งที่เหมาะสมสำหรับการหาคำตอบของคลื่นสัญญาณ (Traveling Wave) คือวิธีการแทนค่า (Substitution method) ซึ่งเป็นการแทนค่าสมการด้วยฟังก์ชันต่าง ๆ ในที่นี้เราจะศึกษาวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ (The sine-cosine method) ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (The exponential method) และฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิค (The tanh method)

Chapter 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

2.1 กฎลูกโซ่ (Chain rule)

กฎลูกโซ่ คือสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ นั่นคือ หากตัวแปร y เปลี่ยนแปลงตามตัวแปร u ซึ่งเปลี่ยนแปลงตามตัวแปร x แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x หาได้จากผลคูณ ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ u คูณกับ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ u เทียบกับ x

ในทางพีชคณิต กฎลูกโซ่ระบุว่า ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $g(x)$ และฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ x คือเราจะได้

$$f \circ g = f(g(x)) \quad f \circ g = f(g(x)) \quad (2.1)$$

ดังนั้น

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (2.2)$$

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations)

บทนิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) เขียนแทนด้วย PDE เป็นสมการสำหรับฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระ (Independent Variables) มากกว่า 1 ตัวแปรขึ้นไป ซึ่งประกอบไปด้วยอนุพันธ์ย่อย เขียนอยู่ในรูปแบบของ

$$F(x, y, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

สำหรับฟังก์ชัน F และฟังก์ชันไม่ทราบค่า u ของตัวแปร $x, y, \dots$ เขียนแทนด้วย

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$$

บทนิยาม 2.2 อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย หมายถึง อันดับสูงสุดของการหาอนุพันธ์ย่อยในสมการนั้น

บทนิยาม 2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น (Linear Partial Differential Equation) คือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ตัวแปรตาม และอนุพันธ์ย่อยอันดับต่าง ๆ ไม่คูณกันและมีเลขกำลังเป็น 1 เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

เป็น PDE ที่มีอันดับ 2 และเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น

บทนิยาม 2.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (Nonlinear Partial Differential Equation) คือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นสมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น

2.3 สมการคลื่นเสียง (Sound Wave Equations)

บทนิยาม 2.7 สมการคลื่น (Wave Equation) คือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่แสดงถึงความสามารถในการถ่ายโอนของคลื่น กำหนดโดย

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

โดยที่ u คือระยะการเคลื่อนตัวของคลื่น, x คือพิกัดตำแหน่งบนตัวกลาง และ t คือเวลา

ในที่นี่จะหาคำตอบของสมการคลื่นแบบไม่เชิงเส้น 3 สมการ ได้แก่ สมการฟิ-โฟร์ สมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น และสมการคลื่นเสียงในของไหล

บทนิยาม 2.8 สมการฟิ-โฟร์ (Phi-Four Equation) เป็นรูปแบบเฉพาะของสมการไคลน์-กอร์ดอน (The Klein-Gordon equation) ซึ่งเป็นแบบจำลองของปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ เมื่อคลื่นนิ่งคิงก์ (Kink solitary waves) และคลื่นนิ่งแอนติคิงก์ (Anti-kink solitary waves) กระทำต่อกัน

กำหนดโดย

$$u_{tt} - ku_{xx} - u + u^3 = 0 \quad (2.4)$$

บทนิยาม 2.9 สมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น (Nonlinear Sound Wave Equation) เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับคลื่นเสียงที่แอมพลิจูดมีค่ามากพอ ซึ่งจะต้องใช้ระบบสมการของพลศาสตร์ของไหล (Fluid dynamic) สำหรับคลื่นเสียงในของเหลวและแก๊ส ระบบสมการนี้ โดยทั่วไปแล้วจะอยู่ในรูปแบบระบบสมการไม่เชิงเส้น เราจะศึกษาจากคลื่นที่แผ่กระจายในหนึ่งมิติเท่านั้น ดังนั้นตัวแปรของฟังก์ชันจะมีเพียง x (ระยะทางที่คลื่นแผ่กระจาย) t (เวลา) เท่านั้น จะได้สมการความต่อเนื่องของของไหลคือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

ในสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นมักจะใช้ตัวแปร p สำหรับความดันจากค่าเริ่มต้น p_0 ดังนั้นจึงให้ P เป็นความดันทั้งหมด จะได้สมการของออยเลอร์คือ

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.6)$$

โดย ρ คือความหนาแน่นของของไหล, v คือความเร็วของของไหล, P คือความดันของของไหล, x ระยะในการแผ่กระจายของคลื่นเสียง และ t คือเวลา

บทนิยาม 2.10 คลื่นเสียงในของไหล (Sound Wave in fluid) ถูกเขียนในรูปของสมการเชิงเส้น นั่นคือแต่ละพจน์ในสมการ ตัวแปรที่ไม่เป็นอิสระ (Dependent variable) และอนุพันธ์ของตัวมันเองจะมีเลขชี้กำลังสูงสุดคือ 1 พิจารณาการแผ่กระจายของคลื่นเสียงในของไหล สามารถเขียนออกมาได้ 2 สมการคือ

สมการความต่อเนื่องของของไหล (Continuity Equation)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_f^2 \rho_f \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

สมการโมเมนตัมแบบเชิงเส้น (Linear momentum laws equation)

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

บทนิยาม 2.11 สมการคลื่นเสียงในของไหลแบบไม่เชิงเส้น

จากสมการคลื่นเสียงในของไหลจะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น จึงเพิ่มพจน์เพื่อให้สมการคลื่นเสียงในของไหลเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น โดยอ้างอิงจากสมการพี-โพร์ พจน์ที่อยู่ในรูปไม่เชิงเส้น คือ u^3 และสมการคลื่นเสียงในของไหล พจน์ที่เป็นไม่เชิงเส้นที่เพิ่มเข้ามาคือ p^2 จะได้สมการความต่อเนื่องของของไหลและสมการโมเมนตัมเชิงเส้น ดังนี้

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_f^2 \rho_f \frac{\partial v}{\partial x} = 4kp(1-p) \quad (2.9)$$

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

โดยที่ $p(x, t)$ คือความดันของของไหล, $v(x, t)$ คือความเร็วของของไหล, ρ_f คือความหนาแน่นของของไหล, c_f คือความเร็วของเสียงในของไหล และ k คือค่าคงที่

2.4 วิธีการแทนค่า (Substitution Methods)

เป็นวิธีการแทนคำตอบของสมการด้วยฟังก์ชันต่าง ๆ กัน โดยจะพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบของ

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.11)$$

โดยที่ $u(x, t)$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยข้างต้น จะใช้การเปลี่ยนตัวแปร

$$u(x, t) = f(\xi) \quad (2.12)$$

ให้

$$\xi = x - \lambda t$$

สามารถใช้การแปลงค่าต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = -\lambda \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdot), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdot) \quad (2.13)$$

ใช้สมการ (2.13) เพื่อเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น

$$Q(f, f', f'', f''', \dots) = 0 \quad (2.14)$$

ต่อจากนี้จะกำหนด u ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบางประเภท เช่น ฟังก์ชันไซน์-โคไซน์, ฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก ฯลฯ และนำไปแทนค่าลงในสมการเพื่อหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าต่อไป

Chapter 3

การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นโดย วิธีการแทนค่า (Solving Nonlinear Sound Wave Equation by Substitution Methods)

เราจะศึกษาวิธีแทนค่าด้วยฟังก์ชันต่าง ๆ ได้แก่ฟังก์ชันไซน์-โคไซน์, ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก โดยใช้สมการโบสสิเนส (Boussinesq Equation) เป็นกรณีศึกษา

3.1 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ (Sine-Cosine Method)

บทนิยาม 3.1 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ [3]

หลังจากเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแล้ว คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของ

$$f(\xi) = \alpha \sin^\beta(\mu\xi) \quad (3.1)$$

หรือ

$$f(\xi) = \alpha \cos^\beta(\mu\xi) \quad (3.2)$$

ตัวอย่าง 3.2 สมการโบสสิเนส

$$u_{tt} - au_{xx} + 3(u^2)_{xx} - bu_{xxxx} = 0$$

ใช้สมการ (2.13) เพื่อเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น

$$\lambda^2 au_{\xi\xi} - u_{\xi\xi} + 3(u^2)_{\xi\xi} - bu_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

อินทิเกรตสองครั้ง

$$\lambda^2 au - u + 3(u^2) - bu_{\xi\xi} = 0$$

$$(\lambda^2 - a)u + 3u^2 - bu_{\xi\xi} = 0 \quad (3.3)$$

แทนค่า $u = \alpha \cos^\beta(\mu\xi)$ ลงในสมการ (3.3)

$$(\lambda^2 - a)\alpha \cos^\beta(\mu\xi) + 3\alpha^2 \cos^{2\beta}(\mu\xi) - b[(\alpha\beta(\beta - 1)\mu^2 \cos^{\beta-2}(\mu\xi) - \alpha\beta^2\mu^2 \cos^\beta(\mu\xi))] = 0 \quad (3.4)$$

พิจารณา

$$(\lambda^2 - a)\alpha \cos^\beta(\mu\xi) + 3\alpha^2 \cos^{2\beta}(\mu\xi) = b[\alpha\beta^2\mu^2 \cos^\beta(\mu\xi)] + b[(\alpha\beta(\beta - 1)\mu^2 \cos^{\beta-2}(\mu\xi))]$$

$$(\lambda^2 - a)\alpha \cos^\beta(\mu\xi) = b[\alpha\beta^2\mu^2 \cos^\beta(\mu\xi)] \quad (3.5)$$

$$3\alpha^2 \cos^{2\beta}(\mu\xi) = b[(\alpha\beta(\beta - 1)\mu^2 \cos^{\beta-2}(\mu\xi))] \quad (3.6)$$

จากสมการ (3.6) ให้ $\cos^{2\beta}(\mu\xi) = \cos^{\beta-2}(\mu\xi)$ จะได้ว่า

$$2\beta = \beta - 2 \text{ จะได้ } \beta = -2$$

และจากสมการ (3.5) $(\lambda^2 - a) = \beta^2\mu^2$ ทำให้ได้ว่า

$$(\lambda^2 - a) = 4\mu^2$$

$$3\alpha = b\beta(\beta - 1)\mu^2 = 6b\mu^2$$

$$\mu^2 = \frac{\lambda^2 - a}{4b}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda^2 - a}{4b}}$$

$$\alpha = \frac{\lambda^2 - a}{2}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ

$$u(x, t) = \left(\frac{\lambda^2 - a}{2} \right) \sec^2 \left[\sqrt{\frac{\lambda^2 - a}{4b}} (x - \lambda t) \right]$$

หรือ

$$u(x, t) = \left(\frac{\lambda^2 - a}{2} \right) \csc^2 \left[\sqrt{\frac{\lambda^2 - a}{4b}} (x - \lambda t) \right]$$

3.2 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Method)

บทนิยาม 3.3 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบของ

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.7)$$

โดยที่ $u(x, t)$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยข้างต้น เราจะใช้การเปลี่ยนตัวแปร

$$u = u(\xi) \quad (3.8)$$

โดยให้

$$\xi = x - \lambda t$$

คำตอบของสมการจะอยู่ในรูปของ

$$u(x, t) = Ae^{n\xi} \quad (3.9)$$

3.3 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิค (Tanh Method)

บทนิยาม 3.4 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิค [4] ให้ตัวแปรอิสระตัวใหม่คือ Y และ

$$Y = \tanh(\mu\xi) \quad (3.10)$$

โดยให้

$$\xi = x - \lambda t \quad (3.11)$$

ใช้การแปลงค่าดังต่อไปนี้

$$\frac{d}{d\xi} = (1 - Y^2) \frac{d}{dY} \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = -2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} \quad (3.13)$$

เราจะให้คำตอบอยู่ในรูปของอนุกรมต่อไปนี้

$$u(\xi) = S(Y) = \sum_{i=0}^n a_i Y^i \quad (3.14)$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 3.5 สมการโบสลิเนส

$$u_{tt} - au_{xx} + 3(u^2)_{xx} - bu_{xxxx} = 0$$

ใช้สมการ (3.12) แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น

$$(a - \lambda^2)u_{\xi\xi} = 3(u^2)_{\xi\xi} - bu_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.15)$$

จากสมการ (3.14) จะได้ว่า $u(\xi) = S = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_n Y^n$ แทนค่า u ลงในสมการ (3.15) จะได้

$$\begin{aligned} (a - \lambda^2) \left[(1 - Y^2)^2 \frac{d^2 S}{dY^2} - 2Y(1 - Y^2) \frac{dS}{dY} \right] &= 3 \left[(2(1 - Y^2)^2 \frac{d^2 S}{dY^2} - 4Y(1 - Y^2) \frac{dS}{dY}) S \right] \\ &\quad + 2(1 - Y^2)^2 \left(\frac{dS}{dY} \right)^2 + b[(1 - Y^2)^4 \frac{d^4 S}{dY^4} \\ &\quad - 12Y(1 - Y^2)^3 \frac{d^3 S}{dY^3} + (1 - Y^2)^2 (36Y^2 - 8) \frac{d^2 S}{dY^2} \\ &\quad + 2Y(1 - Y^2)(8 - 12Y^2) \frac{dS}{dY}] \end{aligned} \quad (3.16)$$

เทียบอันดับสูงสุดของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกับพจน์ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น

$$\begin{aligned} 2(1 - Y^2)^2 \left(\frac{dS}{dY} \right)^2 &= (1 - Y^2)^4 \frac{d^4 S}{dY^4} \\ Y^{(4+2(n-1))} &= Y^{(8+n-4)} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $n = 2$ ดังนั้น $u(\xi) = S = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2$ เมื่อนำไปแทนค่าในสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &(a - \lambda^2) \left[(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) - 2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) \right] \\ &= 3 \left[(2(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) - 4Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2)) (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) \right] \\ &\quad + 2(1 - Y^2)^2 \left(\frac{d}{dY} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) \right)^2 + b[(1 - Y^2)^4 \frac{d^4}{dY^4} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) \\ &\quad - 12Y(1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) + (1 - Y^2)^2 (36Y^2 - 8) \frac{d^2}{dY^2} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2) \\ &\quad + 2Y(1 - Y^2)(8 - 12Y^2) \frac{d}{dY} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ Y ในสมการ (3.17)

$$Y^0 : 2(a - \lambda^2)a_2 = 3(4a_0a_2 + 2a_1^2) - 16a_2b$$

$$Y^1 : -2(a - \lambda^2)a_1 = 3(-4a_0a_1 + 12a_1a_2) + 16a_1b$$

$$Y^2 : -8(a - \lambda^2)a_2 = 3(-16a_0a_2 + 4a_1^2) + 136a_2b$$

$$Y^3 : 2(a - \lambda^2)a_1 = 3(4a_0a_1 - 36a_1a_2) - 40a_1b$$

$$Y^4 : 6(a - \lambda^2)a_2 = 3(-26a_1^2 + 12a_0a_2) - 240a_2b$$

$$Y^5 : 24a_1b + 72a_1a_2a = 0$$

$$Y^6 : 60a_2a(a_2 + 2a) = 0$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ว่า $a_0 = \frac{8a-4\lambda^2-a}{6b}$, $a_1 = 0$ และ $a_2 = -2a$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า a_0, a_1 และ a_2 ลงในสมการแล้ว จะได้คำตอบของสมการคือ

$$u(x, t) = \frac{8a + 4\lambda^2 - a}{6b} - 2a \tanh^2(x - \lambda t)$$

Chapter 4

ผลการศึกษา (Results)

ในที่นี้จะศึกษาวิธีการหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นแบบต่าง ๆ โดยในที่นี้จะศึกษาสมการพี-โพร์ ซึ่งเป็นสมการคลื่นสัญจรแบบไม่เชิงเส้นชนิดหนึ่ง, สมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น และสมการคลื่นเสียงในของไหล ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่เราได้ศึกษา

4.1 การหาคำตอบของสมการพี-โพร์

เริ่มทำการศึกษาจากสมการพี-โพร์ ซึ่งเป็นสมการคลื่นไม่เชิงเส้น โดยจะใช้วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์และฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก

$$u_{tt} - ku_{xx} - u + u^3 = 0 \quad (4.1)$$

4.1.1 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์

ให้ $u = f(\xi) = \alpha \sin^\beta(\mu\xi)$ หรือ $u = f(\xi) = \alpha \cos^\beta(\mu\xi)$ และ $\xi = x - \lambda t$ แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.1) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\lambda^2 u_{\xi\xi} - ku_{\xi\xi} - u + u^3 = 0 \quad (4.2)$$

แทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์

$$\begin{aligned} & \lambda^2 [\alpha\beta(\beta-1)\mu^2 \sin^{\beta-2}(\mu\xi) - \alpha\beta^2\mu^2 \sin^\beta(\mu\xi)] \\ & - k[\alpha\beta(\beta-1)\mu^2 \sin^{\beta-2}(\mu\xi) - \alpha\beta^2\mu^2 \sin^\beta(\mu\xi)] - \alpha \sin^\beta(\mu\xi) + \alpha^3 \sin^{3\beta}(\mu\xi) = 0 \\ & (\lambda^2 - k)\alpha\beta(\beta-1)\mu^2 \sin^{\beta-2}(\mu\xi) + (k - \lambda^2)\alpha\beta^2\mu^2 \sin^\beta(\mu\xi) - \alpha \sin^\beta(\mu\xi) + \alpha^3 \sin^{3\beta}(\mu\xi) = 0 \end{aligned}$$

แทนค่าด้วยฟังก์ชันโคไซน์

$$\begin{aligned} & \lambda^2 [\alpha \beta (\beta - 1) \mu^2 \cos^{\beta-2}(\mu \xi) - \alpha \beta^2 \mu^2 \cos^\beta(\mu \xi)] \\ & - a [\alpha \beta (\beta - 1) \mu^2 \cos^{\beta-2}(\mu \xi) - \alpha \beta^2 \mu^2 \cos^\beta(\mu \xi)] - \alpha \cos^\beta(\mu \xi) + \alpha^3 \cos^{3\beta}(\mu \xi) = 0 \\ & (\lambda^2 - k) \alpha \beta (\beta - 1) \mu^2 \cos^{\beta-2}(\mu \xi) + (k - \lambda^2) \alpha \beta^2 \mu^2 \cos^\beta(\mu \xi) - \alpha \cos^\beta(\mu \xi) + \alpha^3 \cos^{3\beta}(\mu \xi) = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ (4.3)

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - k) \alpha \beta (\beta - 1) \mu^2 \sin^{\beta-2}(\mu \xi) = -\alpha^3 \sin^{3\beta}(\mu \xi) \\ & (k - \lambda^2) \alpha \beta^2 \mu^2 \sin^\beta(\mu \xi) = \alpha \sin^\beta(\mu \xi) \\ & \beta - 2 = 3\beta \\ & \beta = -1 \\ & (k - \lambda^2) \alpha \beta^2 \mu^2 = 1 \\ & \mu = \frac{1}{\sqrt{k - \lambda^2}} \\ & (\lambda^2 - k) \alpha \beta (\beta - 1) \mu^2 = -\alpha^2 \\ & 2(\lambda^2 - k) \mu^2 = -\alpha^2 \\ & \alpha = \sqrt{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการพี-โพร์ คือ

$$u(x, t) = \alpha \sin^\beta(\mu \xi) = \sqrt{2} \csc \left[\frac{1}{\sqrt{k - \lambda^2}} (x - \lambda t) \right]$$

หรือ

$$u(x, t) = \alpha \cos^\beta(\mu \xi) = \sqrt{2} \sec \left[\frac{1}{\sqrt{k - \lambda^2}} (x - \lambda t) \right]$$

4.1.2 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

จะการใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลดังนี้

$$u(x, t) = Ae^{n\xi} \quad (4.4)$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรในสมการ (4.1) แล้วแทนค่า จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - k)An^2e^{n\xi} - Ae^{n\xi} + A^3e^{3n\xi} &= 0 \\ \lambda^2 An^2e^{n\xi} + A^3e^{3n\xi} &= kAn^2e^{n\xi} + Ae^{n\xi} \end{aligned} \quad (4.5)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lambda^2 An^2e^{n\xi} &= kAn^2e^{n\xi} \\ \lambda^2 &= k \\ \lambda &= \pm\sqrt{k} \end{aligned} \quad (4.6)$$

และ

$$\begin{aligned} A^3e^{3n\xi} &= Ae^{n\xi} \\ A^2e^{2n\xi} &= 1 \\ A &= \pm e^{-n\xi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (4.6) และสมการ (4.7) ลงในสมการ (4.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} e^{-n\xi}n^2e^{n\xi} - e^{-n\xi}e^{n\xi} + e^{-3n\xi}e^{3n\xi} &= 0 \\ n &= 0 \end{aligned}$$

ได้ว่า $A = e \pm e^{-n\xi}$, $n = 0$ และ $\lambda = \pm\sqrt{k}$ ดังนั้น

$$u(x, t) = Ae^{n\xi} = \pm e^{-n\xi}e^{n\xi} = 1$$

เนื่องจากคำตอบของสมการเป็นค่าคงที่ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันที่ไม่เป็นค่าคงที่ วิธีเอกซ์โพเนนเชียลจึงไม่เหมาะสมกับสมการพี-โพร์

4.1.3 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก

แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.1) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\lambda^2 u_{\xi\xi} - k u_{\xi\xi} - u + u^3 = 0 \quad (4.8)$$

จาก $Y = \tanh(\xi)$ และ $p = S = a_0 + a_1 Y + \dots + a_n Y^n$

และกำหนดอนุพันธ์คือ

$$\frac{d}{d\xi} = (1 - Y^2) \frac{d}{dY}, \quad \frac{d^2}{d\xi^2} = (1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} - 2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} \quad (4.9)$$

เมื่อแทนค่าแล้วจะได้ว่า

$$(\lambda^2 - k) \left[(1 - Y^2)^2 \frac{d^2 S}{dY^2} - 2Y(1 - Y^2) \frac{dS}{dY} \right] - S + S^3 = 0 \quad (4.10)$$

เทียบอันดับสูงสุดของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกับเทอมที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น จะได้ว่า $n = 1$ ดังนั้น $u(\xi) = S = a_0 + a_1 Y$ แทนค่าในสมการ (4.10) ได้ว่า

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - k) \left[(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} (a_0 + a_1 Y) - 2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} (a_0 + a_1 Y) \right] - (a_0 + a_1 Y) + (a_0 + a_1 Y)^3 &= 0 \\ (\lambda^2 - k)(-2Y a_1 + 2Y^3 a_1) - a_0 - a_1 Y + a_0^3 + 3a_0^2 a_1 Y + 3a_0 a_1^2 Y^2 + a_1^3 Y^3 &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $\lambda^2 - k = A$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ Y แต่ละเลขชี้กำลัง

$$Y^0 : -a_0 + a_0^3 = 0$$

$$Y^1 : -2A a_1 - a_1 + 3a_0^2 a_1 = 0$$

$$Y^2 : 3a_0 a_1^2 = 0$$

$$Y^3 : 2A a_1 + a_1^3 = 0$$

จะได้ว่า

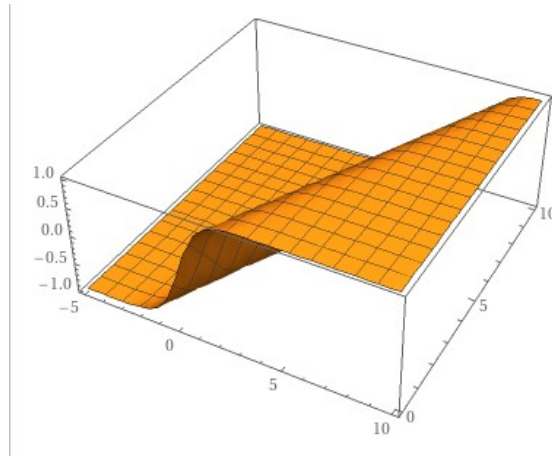
$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \pm 1$$

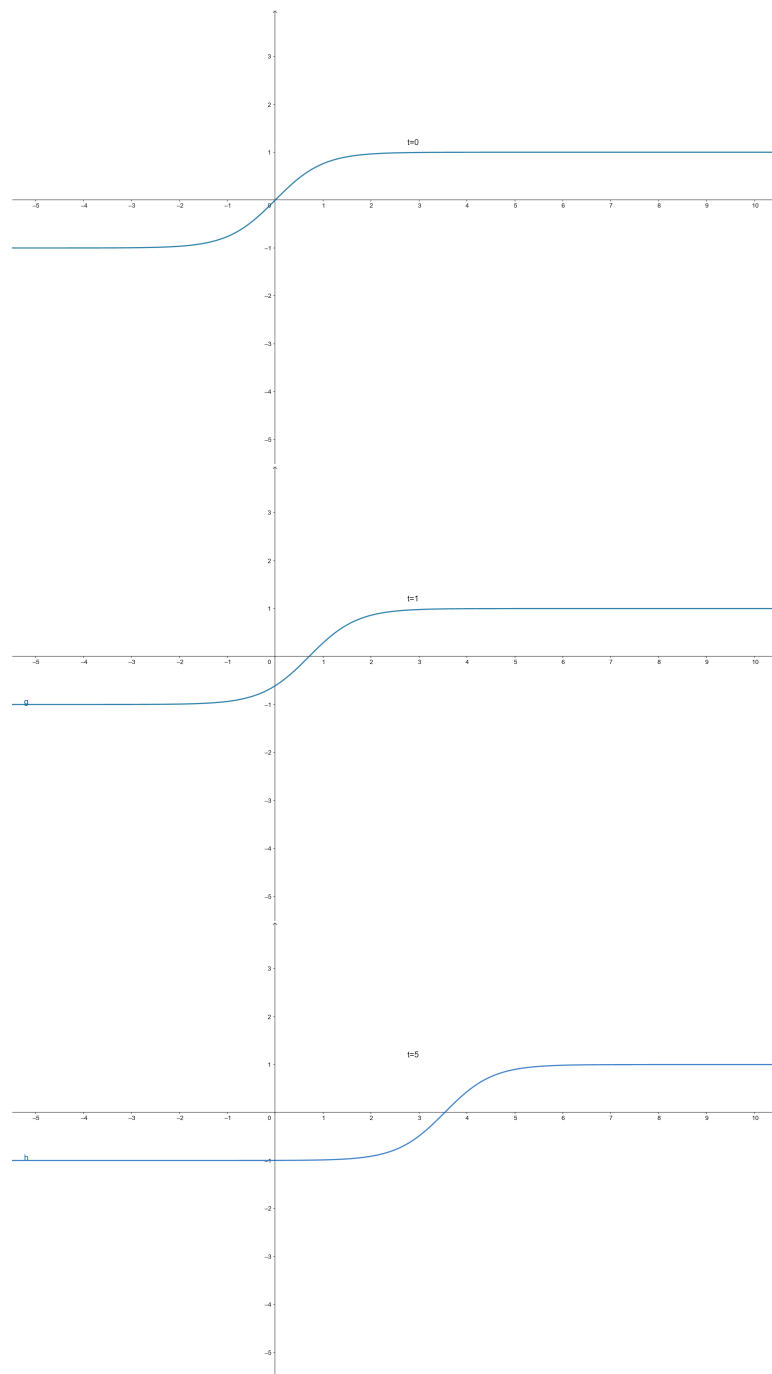
$$A = \frac{1}{2}$$

จาก $A = \lambda^2 - k$ จะได้ว่า $\lambda = \pm\sqrt{k - \frac{1}{2}}$ ดังนั้น คำตอบของสมการพี-โพร์คือ

$$u(x, t) = \pm \tanh(x \pm \sqrt{k - \frac{1}{2}}t)$$



รูปภาพ 4.1: กราฟของสมการพี-โพร์เมื่อหาคำตอบโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิค เมื่อให้คำตอบคือ $u(x, t) = \tanh(x - \sqrt{k - \frac{1}{2}}t)$ ให้ $x \in [-5, 10]$, $t \in [0, 10]$ และให้ $k = 1$



รูปภาพ 4.2: กราฟของสมการพี-โพร์เมื่อหาคำตอบโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิค เมื่อให้คำตอบคือ $u(x, t) = \tanh(x - \sqrt{k - \frac{1}{2}t})$ และให้ $k = 1$ และ $t = 0, t = 1$ และ $t = 5$ ตามลำดับ

4.2 การหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น

จะใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลกับการหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น
พิจารณาสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น ได้แก่ สมการความต่อเนื่องของของไหล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

และสมการของออยเลอร์

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (4.12)$$

4.2.1 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์

ใช้วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ ดังนี้

$$\rho = a \sin^b(m\xi) \quad (4.13)$$

$$v = p \sin^q(n\xi) \quad (4.14)$$

และ $\xi = x - \lambda t$ เปลี่ยนตัวแปรในสมการ (4.11) และสมการ (4.12) ได้ว่า

$$-\lambda \rho_\xi + (\rho v)_\xi = 0 \quad (4.15)$$

$$-\lambda \rho v_\xi + \rho v v_\xi + c^2 \rho_\xi = 0 \quad (4.16)$$

อินทิเกรตสมการ (4.15)

$$-\lambda \rho + (\rho v) = 0 \quad (4.17)$$

เมื่อแทนค่าด้วยสมการ (4.13) และสมการ (4.14) แล้วจะได้ว่า

$$-\lambda(a \sin^b(m\xi)) + [(a \sin^b(m\xi))(p \sin^q(n\xi))] = 0 \quad (4.18)$$

ได้ว่า

$$a \sin^b(m\xi) = 0$$

หรือ

$$p \sin^q(n\xi) - \lambda = 0$$

$$p \sin^q(n\xi) = \lambda$$

$$v(x, t) = \lambda$$

เมื่อแทนค่า v ลงในสมการ (4.11) แล้วจะได้ว่า

$$\rho_t + \lambda \rho_x = 0$$

$$\rho(x, t) = f(x, t)$$

จะได้สมการการเคลื่อนที่ (Transport Equation) เมื่อ $v(x, t)$ เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง $\rho(x, t)$ จะเป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า จึงได้ว่าวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ไม่สามารถใช้หาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นที่ไม่เป็นค่าคงที่ได้

4.2.2 วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

จะใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ดังนี้

$$\rho = Ae^{m\xi}$$

$$v = Be^{n\xi}$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรในสมการ (4.11) และ (4.12) แล้วแทนค่าแล้วจะได้ว่า

$$-\lambda Ae^{m\xi} + (Ae^{m\xi})(Be^{n\xi}) = 0$$

$$Ae^{m\xi}(Be^{n\xi} - \lambda) = 0$$

$$\lambda = Be^{n\xi} = v \quad (4.19)$$

$$B = \lambda e^{-n\xi} \quad (4.20)$$

แทนค่าสมการ (4.19) ลงในสมการ (4.16)

$$[(Ae^{m\xi})(Be^{n\xi})](Be^{n\xi} - \lambda) + c^2 Ae^{m\xi} = 0$$

$$Bne^{n\xi}(Be^{n\xi} - \lambda) + c^2 m = 0$$

แทนค่าด้วยสมการ (4.20)

$$n(\lambda^2 e^{-2n\xi})(e^{2n\xi}) - \lambda B n e^{n\xi} = -c^2 m$$

แทนค่าด้วยสมการ (4.19)

$$c^2 m = 0$$

$$m = 0$$

$$n = \frac{-c^2 m}{\lambda(\lambda - B e^{n\xi})} = 0$$

จะได้ว่า

$$A = \text{constant}$$

$$B = \lambda$$

$$m = 0$$

$$n = 0$$

คำตอบของสมการจะอยู่ในรูปของ

$$\rho(x, t) = A$$

$$v(x, t) = \lambda$$

เนื่องจาก $\rho(x, t)$ และ $v(x, t)$ เป็นค่าคงที่ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันที่ไม่เป็นค่าคงที่ วิธีเอกซ์โพเนนเชียลจึงไม่เหมาะสมกับสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น

ดังนั้นสรุปได้ว่าสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นอาจจะหาคำตอบไม่ได้โดยวิธีการแทนค่า เพื่อเป็นการพิสูจน์ข้อสังเกตนี้พิจารณาสมการ (4.15) และสมการ (4.16)

เมื่ออินทิเกรตสมการ (4.15) แล้วจะได้ว่า

$$-\lambda\rho + \rho v = 0$$

$$\rho(-\lambda + v) = 0$$

ได้ว่า

$$\rho = 0 \quad (4.21)$$

$$-\lambda + v = 0 \quad (4.22)$$

จากสมการ (4.16) จะได้ว่า

$$\rho(-\lambda + v)v_\xi + c^2\rho_\xi = 0$$

กรณีสมการ (4.21) $\rho = 0$ จะได้ $v = \lambda$

กรณีสมการ (4.22) $-\lambda + v = 0$ จะได้ $\rho = 0$

ดังนั้นได้ว่า $\rho(x, t)$ และ $v(x, t)$ อยู่ในรูปของค่าคงที่ และสรุปได้ว่าสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นหาคำตอบไม่ได้โดยวิธีแทนค่า ซึ่งนั่นก็คือ จะไม่มีคำตอบที่เป็นรูปของคลื่นสัจจร ทำให้ได้ว่าไม่สามารถหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นโดยวิธีแทนไฮเพอร์โบลิกได้เช่นกัน

4.3 การหาคำตอบสมการคลื่นเสียงในของไหล

ในการหาคำตอบของสมการคลื่นเสียงในของไหล จะใช้วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิกเพื่อหาคำตอบของสมการ

พิจารณาสมการคลื่นเสียงในของไหล ได้แก่ สมการความต่อเนื่องของของไหล

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_f^2 \rho_f \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.23)$$

และสมการโมเมนตัมแบบเชิงเส้น

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.24)$$

4.3.1 สมการคลื่นเสียงในของไหล

จะใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ดังนี้

$$p = Ae^{m\xi}$$

$$v = Be^{n\xi}$$

และ $\xi = x - \lambda t$ เมื่อเปลี่ยนตัวแปรแล้วจะได้ว่า

$$-\lambda p_\xi + c^2 \rho v_\xi = 0 \quad (4.25)$$

$$-\lambda \rho v_\xi + p_\xi = 0 \quad (4.26)$$

อินทิเกรตสมการ (4.25) และสมการ (4.26)

$$\begin{aligned} -\lambda p + c^2 \rho v &= 0 \\ c^2 \rho v &= \lambda p \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} -\lambda \rho v + p &= 0 \\ p &= \lambda \rho v \end{aligned} \quad (4.28)$$

แทนค่าสมการ (4.28) ลงในสมการ (4.27) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c^2 \rho v &= \lambda^2 \rho v \\ c &= \lambda \end{aligned} \quad (4.29)$$

แทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลลงในสมการ (4.28)

$$Ae^{m\xi} = c\rho Be^{n\xi} \quad (4.30)$$

แทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลลงในสมการ (4.25) แล้วแทนค่าด้วยสมการ (4.28) และสมการ (4.29)

$$\begin{aligned} -\lambda A m e^{m\xi} + c^2 \rho B n e^{n\xi} &= 0 \\ c^2 \rho B n e^{n\xi} &= c A m e^{m\xi} \\ c^2 \rho B n e^{n\xi} &= c m (c \rho B e^{n\xi}) \\ n &= m \end{aligned}$$

จากสมการ (4.30) จะได้ว่า

$$A = c\rho B$$

และจากสมการ (4.26) ได้ว่า

$$-c\rho Bne^{n\xi} + Ame^{m\xi} = 0$$

$$ne^{n\xi}(A - c\rho B) = 0$$

$$n = 0 = m$$

นั่นคือ

$$p(x, t) = A = c\rho B$$

$$v(x, t) = B$$

ดังนั้น ได้ว่า $p(x, t)$ และ $v(x, t)$ อยู่ในรูปของค่าคงที่ และสรุปได้ว่าวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลไม่เหมาะสมกับสมการคลื่นเสียงในของไหล เพื่อเป็นการพิสูจน์ข้อสังเกตนี้ พิจารณาสมการ (4.29) ได้ว่า

$$c = \lambda$$

จะได้ว่า

$$p = c\rho v$$

$$v = \frac{1}{c\rho}p$$

แทนค่า ρ และ v ลงในสมการ (4.23) ได้ว่า

$$c\rho(v_t + cv_x) = 0$$

$$p_t + cp_x = 0$$

จะได้ว่า

$$c\rho = 0$$

หรือ

$$p_t + cp_x = 0 \tag{4.31}$$

$$v_t + cv_x = 0 \tag{4.32}$$

จะได้ว่าสมการ (4.31) และสมการ (4.32) เป็นสมการการเคลื่อนที่ นั่นคือ คำตอบของสมการอยู่ในรูปของ

$$p = f(x - ct)$$

$$v = g(x - ct)$$

เนื่องจาก $p(x, t)$ และ $v(x, t)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่าใด ๆ ดังนั้นสรุปได้ว่า วิธีเอกซ์โพเนนเชียลไม่เหมาะสมกับสมการคลื่นเสียงในของไหล

4.3.2 สมการคลื่นเสียงในของไหลแบบไม่เชิงเส้น

พิจารณาสมการคลื่นเสียงในของไหล เนื่องจากสมการคลื่นเสียงในของไหลเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้น ดังนั้นเราจึงเพิ่มพจน์เพื่อทำให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_f^2 \rho_f \frac{\partial v}{\partial x} = 4kp(1 - p) \quad (4.33)$$

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.34)$$

เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยกำหนดให้ $\xi = x - \lambda t$ ได้ว่า

$$-\lambda p_\xi + c^2 \rho v_x = 4kp(1 - p) \quad (4.35)$$

$$-\lambda \rho v_\xi + p_\xi = 0 \quad (4.36)$$

วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์

กำหนดคำตอบให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

$$p = a \cos^b(m\xi)$$

$$v = s \cos^t(n\xi)$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (4.35) จะได้ว่า

$$\lambda abm \sin^{b-1}(m\xi) \cos(m\xi) - cpstn \sin^{t-1}(n\xi) \cos(n\xi) = 4ka \cos^b(m\xi) - 4ka^2 \cos^{2b}(m\xi)$$

$$\lambda abm \sin^{b-1}(m\xi) \cos(m\xi) + 4ka^2 \cos^{2b}(m\xi) = cpstn \sin^{t-1}(n\xi) \cos(n\xi) + 4ka \cos^b(m\xi)$$

จะได้ว่า

$$\lambda a b m \sin^{b-1}(m\xi) \cos(m\xi) = c p s t n \sin^{t-1}(n\xi) \cos(n\xi)$$

$$4ka^2 \cos^{2b}(m\xi) = 4ka \cos^b(m\xi)$$

ได้ว่า $b = t = 0$, $m = n$ และ $a = 1$ ดังนั้น

$$p = a \cos^b(m\xi) = 1$$

$$v = s \cos^t(n\xi) = s$$

จะได้ว่า $p(x, t)$ และ $v(x, t)$ อยู่ในรูปค่าคงที่ จึงสรุปได้ว่าวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ไม่สามารถใช้หาคำตอบของสมการคลื่นเสียงในของไหลที่ไม่เป็นค่าคงที่ได้

วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก

พิจารณาสมการ (4.36)

$$p_\xi = \lambda \rho v_\xi$$

$$v_\xi = \frac{1}{c\rho} p_\xi \quad (4.37)$$

แทนค่าสมการ (4.37) ลงในสมการ (4.35)

$$-\lambda p_\xi + \frac{c^2}{\lambda} p_\xi = 4kp(1-p) \quad (4.38)$$

จะใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก ดังนี้

จาก $Y = \tanh(\xi)$ และ $p = S = a_0 + a_1 Y + \dots + a_n Y^n$

และกำหนดอนุพันธ์คือ

$$\frac{d}{d\xi} = (1 - Y^2) \frac{d}{dY}$$

เมื่อแทนค่าในสมการ (4.38) แล้วจะได้ว่า

$$\left(\frac{c^2}{\lambda} - \lambda\right)(1 - Y^2) \frac{dS}{dY} = 4kS(1 - S)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{c^2}{\lambda} - \lambda\right)(1 - Y^2) \frac{d}{dY} (a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_n Y^n) &= 4k(a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_n Y^n) \\ &\quad - 4k(a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_n Y^n)^2 \end{aligned}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีอันดับสูงสุดกับพจน์ที่เป็นไม่เชิงเส้น จะได้ว่า $n = 1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c^2}{\lambda} - \lambda\right)(1 - Y^2) \frac{d}{dY}(a_0 + a_1 Y) = 4k(a_0 + a_1 Y) - 4k(a_0 + a_1 Y)^2 \\ & \left(\frac{c^2}{\lambda} - \lambda\right)a_1 - \left(\frac{c^2}{\lambda} - \lambda\right)a_1 Y^2 - 4ka_0 - 4ka_1 Y + 4ka_0^2 + 8ka_0 a_1 Y + 4ka_1^2 Y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ให้ } \left(\frac{c^2}{\lambda} - \lambda\right) = B$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ Y แต่ละเลขชี้กำลัง

$$Y^0 : Ba_1 - 4ka_0 + 4ka_0^2 = 0$$

$$Y^1 : -4ka_1 + 8ka_0 a_1 = 0$$

$$Y^2 : -Ba_1 + 4ka_1^2 = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } a_0 = \frac{1}{2} \text{ และ } a_1 = \frac{B}{4k}$$

เมื่อแทนค่า B ในสมการ จะได้ว่า $B = \pm 2k$

$$\text{ดังนั้น } k = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{\lambda} - \lambda\right)$$

$$\text{จะได้ว่า } a_1 = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{และ } \lambda = \pm k \pm \sqrt{k^2 + c^2}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ

$$p(x, t) = S = a_0 + a_1 Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left(x \pm (k \pm \sqrt{k^2 + c^2})t \right)$$

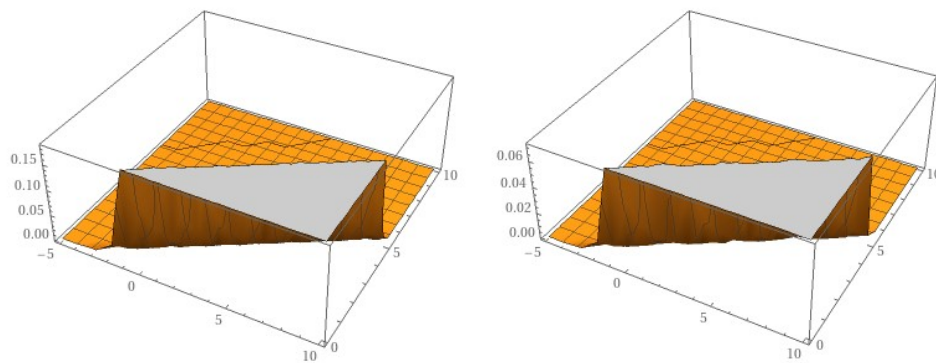
และ

$$v(x, t) = \frac{1}{\lambda \rho} p = \frac{1}{2(\pm k \pm \sqrt{k^2 + c^2})\rho} + \frac{1}{2(\pm k \pm \sqrt{k^2 + c^2})\rho} \tanh \left(x \pm (k \pm \sqrt{k^2 + c^2})t \right)$$

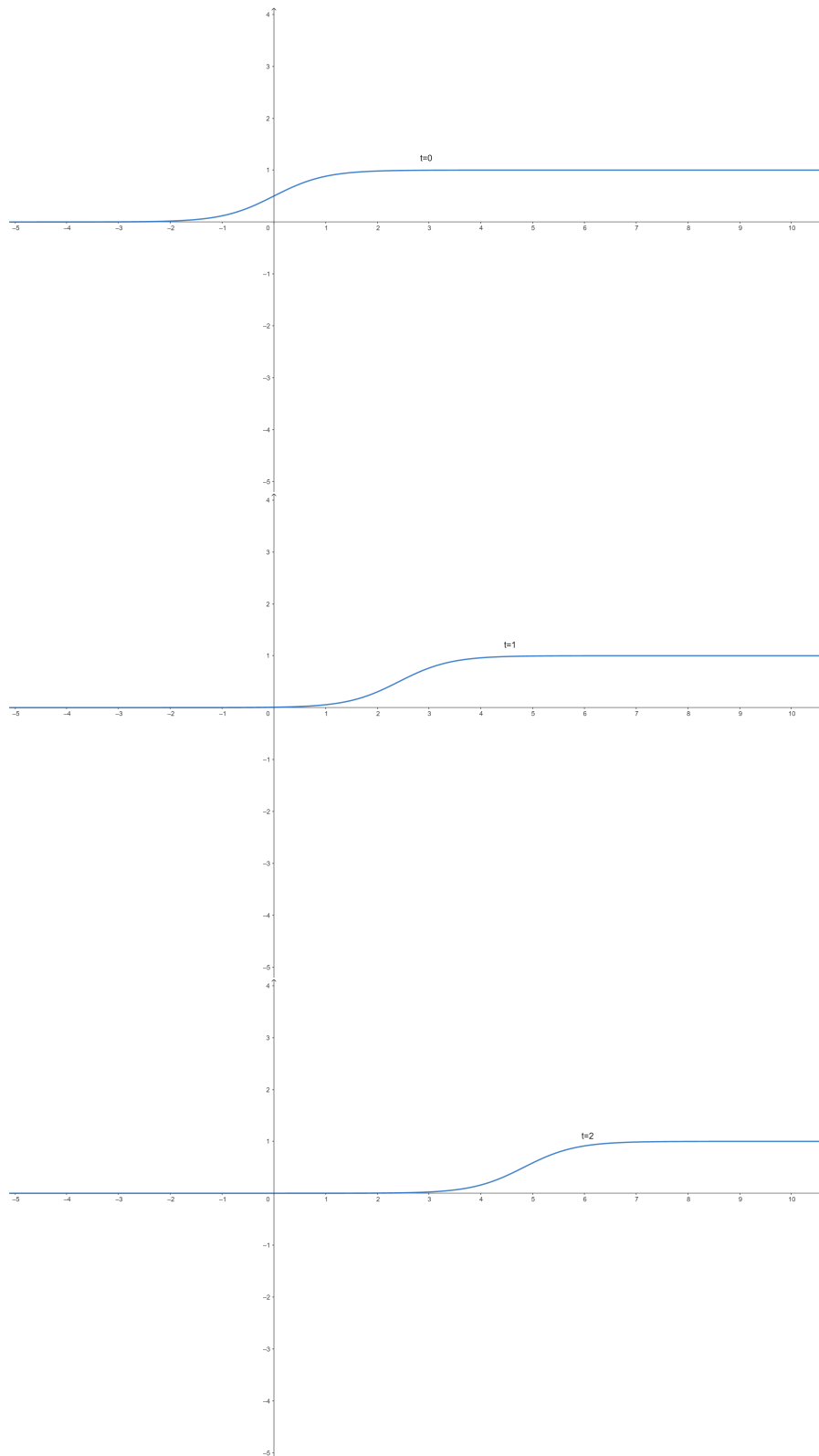
เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นคือ $p(x, 0) = f(x)$ และ $v(x, 0) = g(x)$ และกำหนดค่าขอบคือ $-5 \leq x \leq 10$ และ $t \geq 0$ จะได้ว่า

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(x)$$

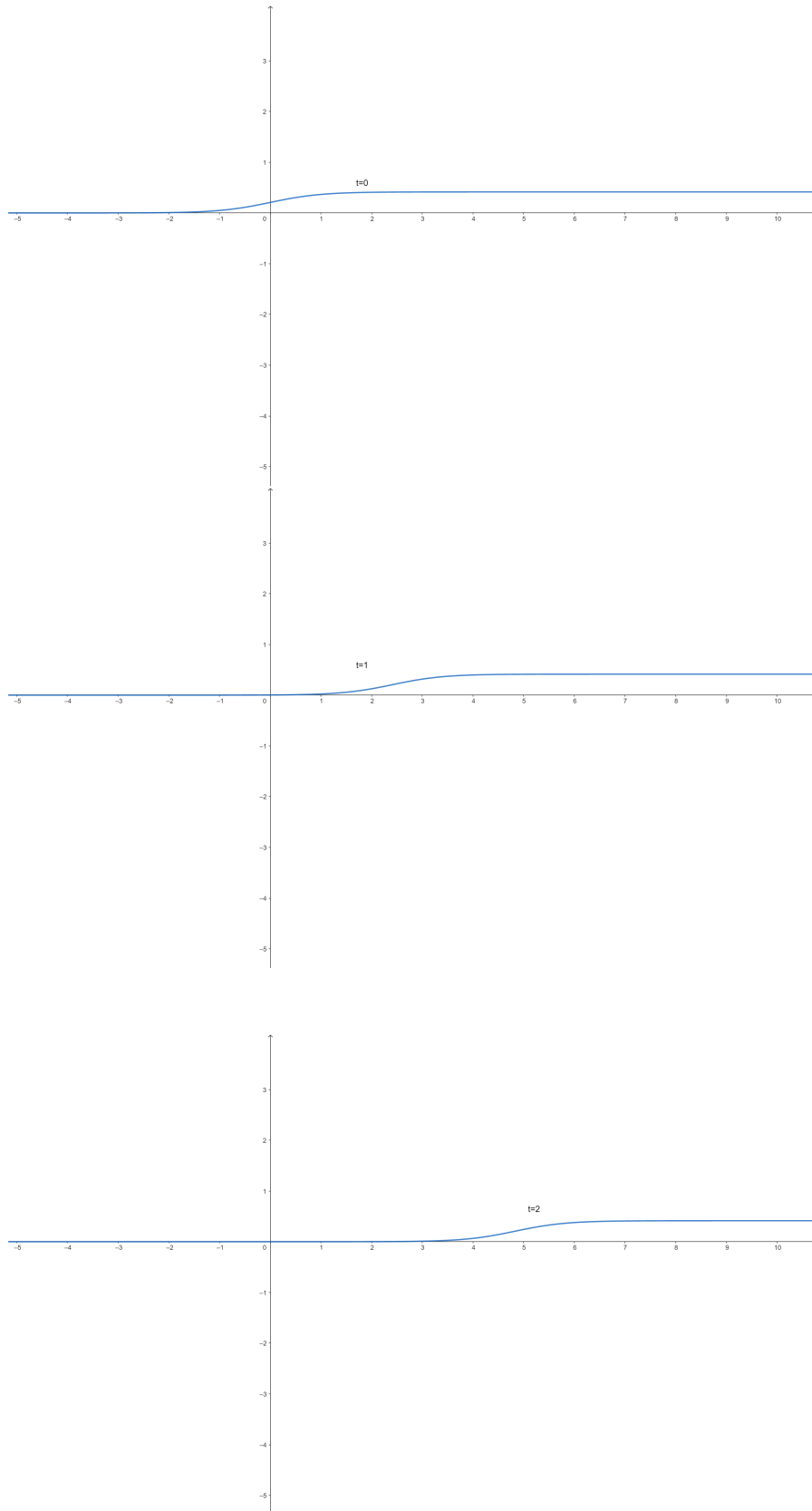
$$g(x) = \frac{1}{2(\pm k \pm \sqrt{k^2 + c^2})\rho} + \frac{1}{2(\pm k \pm \sqrt{k^2 + c^2})\rho} \tanh(x)$$



รูปภาพ 4.3: กราฟของสมการคลื่นเสียงในของไหล โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก เมื่อให้ $p(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left(x - (k + \sqrt{k^2 + c^2})t \right)$ และ $v(x, t) = \frac{1}{2(k + \sqrt{k^2 + c^2})\rho} + \frac{1}{2(k + \sqrt{k^2 + c^2})\rho} \tanh \left(x - (k + \sqrt{k^2 + c^2})t \right)$ ตามลำดับ ให้ $x \in [-5, 10]$ และ $t \in [0, 10]$ และให้ค่าคงที่ $k = 1$, ความเร็วเสียง $c = 1$ และความหนาแน่นของของไหล $\rho = 1$



รูปภาพ 4.4: กราฟของสมการคลื่นเสียงในของไหล เมื่อหาคำตอบของ p โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก เมื่อให้ $p(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left(x - (k + \sqrt{k^2 + c^2})t \right)$ ให้เวลา $t = 0, t = 1$ และ $t = 2$ ตามลำดับ และให้ค่าคงที่ $k = 1$ และความเร็วเสียง $c = 1$



รูปภาพ 4.5: กราฟของสมการคลื่นเสียงในของไหล เมื่อหาคำตอบของ v โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก เมื่อให้ $v(x, t) = \frac{1}{2(k+\sqrt{k^2+c^2})\rho} + \frac{1}{2(k+\sqrt{k^2+c^2})\rho} \tanh(x - (k + \sqrt{k^2 + c^2})t)$ ให้เวลา $t = 0, t = 1$ และ $t = 2$ ตามลำดับ และให้ค่าคงที่ $k = 1$, ความเร็วเสียง $c = 1$ และ ความหนาแน่นของของไหล $\rho = 1$

4.4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาการแก้สมการพี-โพร์ สมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้น และสมการคลื่นเสียงในของไหล โดยวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก ซึ่งจากการศึกษาพบว่า สมการพี-โพร์ สามารถหาคำตอบด้วยวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์ ได้คำตอบของสมการคือ

$$u(x, t) = \sqrt{2} \csc \frac{1}{\sqrt{k - \lambda^2}} (x - \lambda t)$$

และฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก ได้คำตอบของสมการคือ

$$u(x, t) = \pm \tanh(x \pm \sqrt{k - \frac{1}{2}} t)$$

เนื่องจาก สมการคลื่นเสียงไม่เชิงเส้นสามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันไซน์-โคไซน์, ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิก แต่คำตอบที่ได้เป็นค่าคงที่ ดังนั้นวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันเหล่านี้อาจจะไม่ใช่วิธีที่เหมาะสม เนื่องจากต้องการคำตอบที่อยู่ในรูปแบบของสมการคลื่นสัญญาณ และสมการคลื่นเสียงในของไหล เมื่อเพิ่มพจน์ที่ทำให้อยู่ในรูปสมการไม่เชิงเส้นแล้ว สามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิกได้ และคำตอบของสมการคือ

$$p(x, t) = a_0 + a_1 Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(x \pm (k \pm \sqrt{k^2 + c^2}) t)$$

และ

$$v(x, t) = \frac{1}{2(\pm k \pm \sqrt{k^2 + c^2})\rho} + \frac{1}{2(\pm k \pm \sqrt{k^2 + c^2})\rho} \tanh(x \pm (k \pm \sqrt{k^2 + c^2}) t)$$

บรรณานุกรม

- [1] Bengt O. Enflo and Lars H. Soderholm, Partial Differential Equations with Applications to Wave Theory, MEKANIK, KTH, SE-100 44 STOCKHOLM, SWEDEN
- [2] P.J. Matuszyk, L. F. Demkowicz, C. Torres-Verdin, Solution of Coupled Acoustic-Elastic Wave Propagation Problems with Anelastic Attenuation Using Automatic, ICES REPORT, 2011
- [3] A.-M. Wazwaz, A Sine-Cosine for Handling Nonlinear Wave Equations, Saint Xavier University, Chicago, USA, 2003
- [4] Uttam Ghosh (1), Srijan Sengupta (2a), Susmita Sarkar (2b), Shantanu Das (3), Analytical solution with tanh-method and fractional sub-equation method for non-linear partial differential equations and corresponding fractional differential equation composed with Jumarie fractional derivative, Nabadwip Vidyasagar College, University of Calcutta, Jadavpur University, India,
- [5] Dr. Anwar Ja'afar Mohamad- Jawad, The Sine-Cosine Function Method for Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Al-Rafidain University College, 2013
- [6] Abdul-Majid Wazwaz, New solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and the Kawahara equations, Saint Xavier University, Chicago, USA, 2006
- [7] <http://scholarpedia.org/article/Linear-and-nonlinear-waves>