

ฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนของวิถี
(Locally Strong Homomorphisms of Paths)

นายณัฐพงศ์ วงศ์กำ
รหัส 620510561

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

ฟังก์ชันสาคีสัญฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนของวิถี
(Locally Strong Homomorphisms of Paths)

ณัฐพงศ์ วงศ์กำ

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

ศาสตราจารย์ ดร.สาธิต ปิ่นมา

ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สาธิต ปิ่นมา)

ศาสตราจารย์ ดร.สุปรีย์ เต่งสกุล

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุปรีย์ เต่งสกุล)

วันที่ 30 เดือน มีนาคม ปี 2566

ฟังก์ชันสาคีสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนของวิถี
(Locally Strong Homomorphisms of Paths)

นายณัฐพงศ์ วงศ์กำ
รหัส 620510561

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษา เรื่อง ฟังก์ชันสาคูสสณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนของวิธี

ผู้ค้นคว้าขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. สายัญ ปันมา อาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระที่คอยช่วยเหลือให้คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ การนำเสนอ การจัดทำรูปเล่มรายงาน และให้คำปรึกษาตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องพิจารณาแก้ไข จนทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสิ้นสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่าน ที่ได้อบรม สั่งสอน และให้ความรู้ทั้งในและนอกตำราเรียนให้แก่ผู้ค้นคว้า อันเป็นประโยชน์และสามารถนำมา ประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้ และขอขอบคุณเพื่อนๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ และผู้เกี่ยวข้องที่ช่วยสนับสนุนให้คำปรึกษาและช่วยเหลือขณะที่ผู้ค้นคว้ากำลังศึกษาค้นคว้าอิสระขึ้นนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณบิดา มารดา ครอบครัว เพื่อน รุ่นพี่ รวมทั้งขอขอบคุณไปยังทุกท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ที่ได้ให้การช่วยเหลือ และกำลังใจ ซึ่งผู้ค้นคว้าไม่ได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ด้วย

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ผู้ค้นคว้าขอมอบคำชื่นชม และคุณความดีนั้นแก่ บิดา มารดา คณะครู และอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอน ในทางตรงกันข้ามหากผลงานค้นคว้าอิสระนี้เกิดข้อผิดพลาดประการใดผู้ค้นคว้าต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และขอน้อมรับความผิดพลาดไว้เพียงผู้เดียว

ณัฐพงศ์ วงศ์ก่ำ

หัวข้อ (ภาษาไทย)	ฟังก์ชันสาคีสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนของวิถี
(ภาษาอังกฤษ)	Locally Strong Homomorphisms of Paths
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นายณัฐพงศ์ วงศ์ก่ำ รหัสนักศึกษา 620510561
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา
ชื่อกรรมการสอบ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุปรีดี แดงสกุล

บทคัดย่อ

ให้ G และ G' เป็นกราฟ และ f เป็นฟังก์ชันสาคีสสัณฐานจาก G ไป G' จะเรียก f ว่าฟังก์ชันสาคีสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก G ไป G' ถ้า $f(x)f(y) \in E(G')$ แล้วสำหรับทุก $x' \in f^{-1}(f(x))$ มี $y' \in f^{-1}(f(y))$ ซึ่ง $x'y' \in E(G)$ และสำหรับทุก $y' \in f^{-1}(f(y))$ มี $x' \in f^{-1}(f(x))$ ซึ่ง $x'y' \in E(G)$ ในการค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ เราได้ศึกษาจำนวนของฟังก์ชันสาคีสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับทุกจำนวนนับ m และ n

Abstract

Let G and G' be two graphs. A mapping f is a *homomorphism* from G to G' is called a *locally strong homomorphism* if $f(x)f(y) \in E(G')$ implies for all $x' \in f^{-1}(f(x))$ there exists $y' \in f^{-1}(f(y))$ such that $x'y' \in E(G)$ and for all $y' \in f^{-1}(f(y))$ there exists $x' \in f^{-1}(f(x))$ such that $x'y' \in E$. In this independent study, we determine the number of locally strong homomorphisms from a path P_m to another path P_n for any integers m and n .

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
3 ผลการศึกษา (Results)	6
4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	24
บรรณานุกรม	25
A पोस्तेर	26

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้ค้นคว้าได้ศึกษาจำนวนฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับทุกจำนวนนับ m และ n ซึ่งอ้างอิงความรู้จากการศึกษาเรื่อง Locally Strong Endomorphism of Paths ของ Sr. Arworn, U.Knauer, S. Leeratanavalee โดยมีวัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้

วัตถุประสงค์

เพื่อหาจำนวนฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับทุกจำนวนนับ m และ n
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้จำนวนฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับทุกจำนวนนับ m และ n

ขอบเขตการค้นคว้าอิสระ

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นการหาจำนวนฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับทุกจำนวนนับ m และ n

วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. เขียนตัวอย่างฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับบางจำนวนนับ m และ n
2. หาเงื่อนไขของฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับบางจำนวนนับ m และ n
3. หาจำนวนฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับบางจำนวนนับ m และ n

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

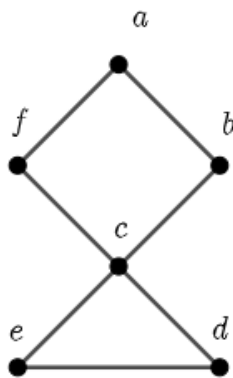
ในบทนี้เราจะนิยามพื้นฐานที่ใช้ในการค้นคว้าอิสระนี้

บทนิยาม 2.1 กราฟ G ประกอบด้วยเซต 2 เซตคือ $V(G)$ และ $E(G)$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง และทุกสมาชิกของ $E(G)$ เป็นคู่ไม่อันดับ (Unordered Pairs) ของสมาชิกใน $V(G)$ จะเรียกสมาชิกของ $V(G)$ ว่า **จุด (Vertices)** และเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่า **เส้น (Edges)**

นั่นคือ ถ้า e เป็นเส้นใน G แล้ว $e = \{u, v\}$ สำหรับบางสมาชิก u และ v ที่เป็นสมาชิกของ $V(G)$ จะเรียกจุด u และจุด v ว่า **จุดปลาย (End Vertices)** ของเส้น e หรืออาจกล่าวได้ว่า เส้น $e = \{u, v\}$ เชื่อมจุด u และจุด v เพื่อความสะดวกจะแทนเส้น $e = \{u, v\}$ ด้วย uv โดยที่เส้น uv และ vu หมายถึงเส้นเดียวกัน

กรณีที่ uv เป็นเส้นในกราฟ จะกล่าวว่าจุด u และจุด v **กระทบ (Incident)** กับเส้น uv และในทำนองเดียวกัน เส้น uv กระทบกับจุด u และจุด v สำหรับเส้นที่กระทบกับจุดเดียวกันจะเรียกว่า **วงวน (Loop)**

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดให้ G เป็นกราฟ โดยที่ $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ และ $E(G) = \{ab, bc, cd, de, ec, cf, fa\}$ จะได้ว่า G มีตัวแทนเชิงกราฟดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1: ตัวแทนเชิงกราฟของกราฟ G

บทนิยาม 2.3 แนวเดิน (Walk) คือ ลำดับสลับของจุดและเส้น ซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดด้วยจุด โดยที่เส้นแต่ละเส้นจะกระทบกับจุดก่อนหน้าและจุดตามหลังที่อยู่ติดกันในลำดับ

รอยเดิน (Trail) คือ แนวเดินที่ทุกเส้นแตกต่างกัน

วิถี (Path) คือ แนวเดินที่ทุกจุดแตกต่างกัน

ตัวอย่าง 2.4 จากตัวอย่างที่ 2.3 กราฟ G ที่มีตัวแทนเชิงกราฟดังรูปที่ 2.1

จะได้ว่า $a, ab, b, bc, c, cd, d, de, e, ec, c, cb, b, bf, f$ เป็นแนวเดิน แต่ไม่เป็นรอยเดินและวิถี

$a, ab, b, bc, c, cd, d, de, e, ec, c, cf, f$ เป็นแนวเดินและรอยเดิน แต่ไม่เป็นวิถี

a, ab, b, bc, c, cd, d เป็นแนวเดิน รอยเดิน และวิถี

บทนิยาม 2.5 กำหนดสัญลักษณ์ P_n แทนวิถีที่มีจำนวนจุด n จุด โดยที่ $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$

และ $E(P_n) = \{\{i, i+1\} | i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\}$

ตัวอย่าง 2.6 วิถี P_n มีตัวแทนเชิงกราฟดังรูป 2.2



รูปที่ 2.2: ตัวแทนเชิงกราฟของวิถี P_n

บทนิยาม 2.7 ให้ G และ G' เป็นกราฟ จะเรียกฟังก์ชัน $f : V(G) \rightarrow V(G')$ ว่า ฟังก์ชันสาคีสถิตฐาน (Homomorphism Function) จาก G ไป G' ถ้า $xy \in E(G)$ แล้ว $f(x)f(y) \in E(G')$

หรือสามารถกล่าวได้ว่า f คงสภาพเส้นเชื่อม (Preserve Edge)

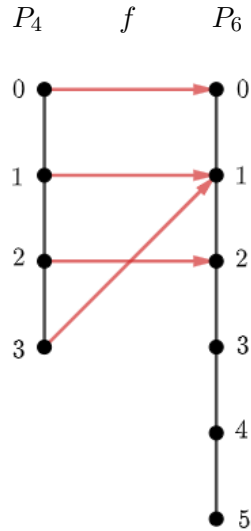
บทนิยาม 2.8 ให้ G และ G' เป็นกราฟ และ $f : V(G) \rightarrow V(G')$ เป็นฟังก์ชันสาคีสถิตฐาน จะเรียก f ว่าฟังก์ชันสาคีสถิตฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน (Locally Strong Homomorphism) จาก G ไป G'

ถ้า $f(x)f(y) \in E(G')$ แล้ว $\forall x' \in f^{-1}(f(x)) \exists y' \in f^{-1}(f(y))$ ซึ่ง $x'y' \in E(G)$

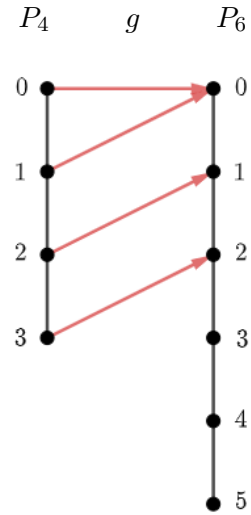
และ $\forall y' \in f^{-1}(f(y)) \exists x' \in f^{-1}(f(x))$ ซึ่ง $x'y' \in E(G)$

ในที่นี้จะขอแทนเซตของฟังก์ชันสาคีสถิตฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนทั้งหมดจาก G ไป G' ด้วย $LSH(G, G')$

ตัวอย่าง 2.9 กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันจาก $V(P_4)$ ไป $V(P_6)$ ดังรูปที่ 2.3 และ 2.4 ตามลำดับ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานจาก P_4 ไป P_6 และ g ไม่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานจาก P_4 ไป P_6 เนื่องจากมี $01 \in E(P_4)$ แต่ $g(0)g(1) = 00 \notin E(P_6)$

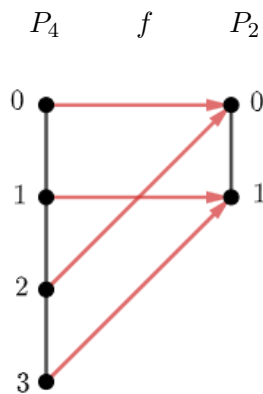


รูปที่ 2.3: f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน



รูปที่ 2.4: g ไม่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน

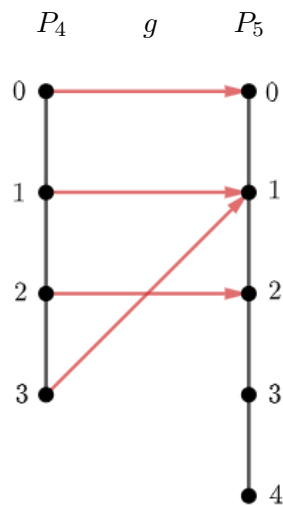
ตัวอย่าง 2.10 กำหนด f เป็นฟังก์ชันจาก $V(P_4)$ ไป $V(P_2)$ ดังรูปที่ 2.5 จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน และมากไปกว่านั้น f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน P_4 ไป P_2



รูปที่ 2.5: f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

เนื่องจากที่ $f(0)f(1) = 01 \in E(P_2)$ ทุก $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0, 2\}$ มี $y' \in f^{-1}(f(1)) = \{1, 3\}$ ซึ่ง $x'y' \in E(P_4)$ และทุก $y' \in f^{-1}(f(1)) = \{1, 3\}$ มี $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0, 2\}$ ซึ่ง $x'y' \in E(P_4)$

ตัวอย่าง 2.11 กำหนด g เป็นฟังก์ชันจาก $V(P_4)$ ไป $V(P_5)$ ดังรูปที่ 2.6 จะเห็นว่า g เป็นฟังก์ชันสาคีสสัณฐาน แต่ g ไม่เป็นฟังก์ชันสาคีสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_4 ไป P_5



รูปที่ 2.6: g ไม่เป็นฟังก์ชันสาคีสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

เนื่องจากที่ $f(0)f(1) = 01 \in E(P_5)$ ทุก $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0\}$ มี $y' \in f^{-1}(f(1)) = \{1, 3\}$ ซึ่ง $x'y' \in E(P_4)$ แต่ $y' = 3 \in f^{-1}(f(1)) = \{1, 3\}$ ไม่มี $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0\}$ ซึ่ง $x'y' \in E(P_4)$

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นการหาจำนวนฟังก์ชันสาคีสสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิถี P_m ไป P_n สำหรับทุกจำนวนนับ m และ n

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

ในบทนี้เราจะหาจำนวนฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_m ไปยังวิธี P_n สำหรับจำนวนนับ m และ n ใด ๆ ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 กรณี คือ $m = 1, n = 1$ และ $m, n > 1$

ขั้นแรกเราจะหาจำนวนฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_1 ไป P_n เมื่อ $n \geq 1$

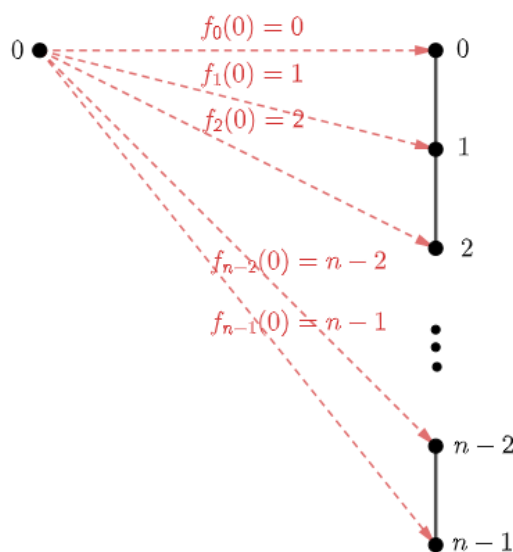
บทตั้ง 3.1 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $|LSH(P_1, P_n)| = n$

พิสูจน์. จะเห็นได้ว่า $f : P_1 \rightarrow P_n$ โดยที่ $f(0) = i$ สำหรับบาง $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_1 ไปยังวิธี P_n สำหรับทุก $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

ดังนั้น $|LSH(P_1, P_n)| = |V(P_n)| = n$ □

ตัวอย่าง 3.2 จำนวนฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_1 ไป P_n มีทั้งหมด n ฟังก์ชัน

ได้แก่ $f_0(0) = 0, f_1(0) = 1, \dots, f_{n-2}(0) = n-2$ และ $f_{n-1}(0) = n-1$ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1: ฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_1 ไป P_n

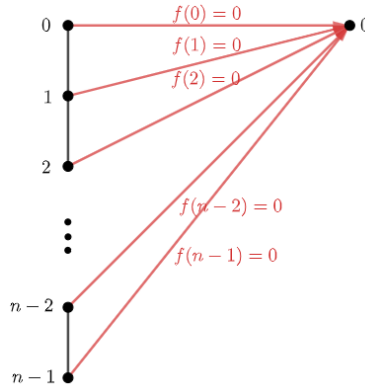
ต่อไปเราจะหาจำนวนฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_m ไป P_1 เมื่อ $m > 1$

บทตั้ง 3.3 ให้ $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ จะได้ว่า $|LSH(P_m, P_1)| = 0$

พิสูจน์. จะเห็นได้ว่ามีฟังก์ชัน f เพียงฟังก์ชันเดียวคือ $f : P_m \rightarrow P_1$ โดยที่ $f(i) = 0$ สำหรับทุก $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานจาก P_m ไป P_1 เนื่องจากมี $01 \in E(P_m)$ แต่ไม่มี $00 \in E(P_1)$ ได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

ดังนั้น $|LSH(P_m, P_1)| = 0$ □

ตัวอย่าง 3.4 ฟังก์ชันจาก P_m ไป P_1 มีทั้งหมด 1 ฟังก์ชัน นั่นคือ $f(i) = 0$ สำหรับทุก $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2: ฟังก์ชันที่ไม่เป็นสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_m ไป P_1

สุดท้ายเราจะหาจำนวนฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_m ไป P_n เมื่อ $m, n > 1$

บทนิยาม 3.5 ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $m, n > 1$ กำหนด $L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq n-1 \text{ และ } l|(m-1)\}$ ให้ $l \in L$

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่ แล้วกำหนดให้

$$\bar{0} = \{2il | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

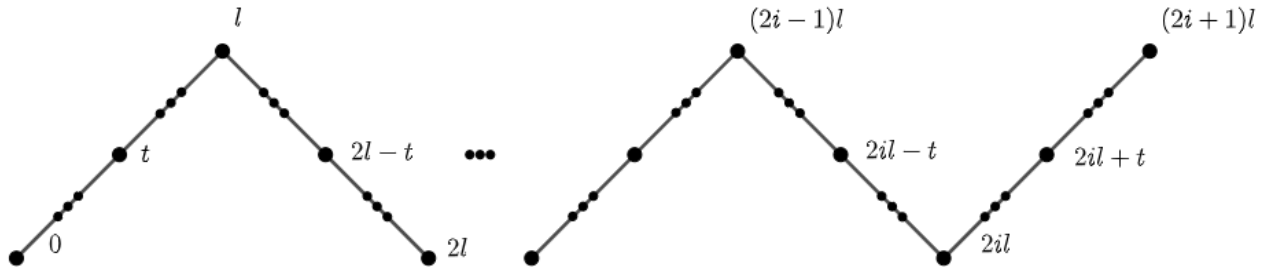
⋮

$$\bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \text{ โดยที่ } 0 < t < l$$

⋮

$$\bar{l} = \{(2i+1)l | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

จะเห็นว่า $\bar{0}, \dots, \bar{l}$ เป็นผลแบ่งกันของ $V(P_m)$ ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3: ผลแบ่งกันของ $V(P_m)$ เมื่อ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่ แล้วกำหนดให้

$$\bar{0} = \{2il | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

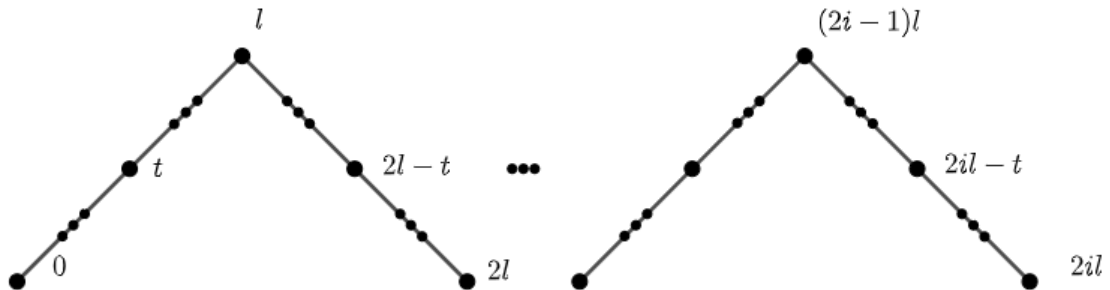
$\vdots$

$$\bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \text{ โดยที่ } 0 < t < l$$

$\vdots$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\}$$

จะเห็นว่า $\bar{0}, \dots, \bar{l}$ เป็นผลแบ่งกันของ $V(P_m)$ ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4: ผลแบ่งกันของ $V(P_m)$ เมื่อ $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

ตัวอย่าง 3.6 ให้ $m = 7$ และ $l = 1$

จะได้ว่า $\frac{m-1}{l} = \frac{6}{1} = 6$ เป็นจำนวนคู่, $\lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor = \lfloor \frac{6}{2} \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$ และ $\lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1 = 2$

$$\text{ดังนั้น } \bar{0} = \{2i(1) | i = 0, 1, 2, 3\} = \{2i | i = 0, 1, 2, 3\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$\bar{l} = \{(2i+1)(1) | i = 0, 1, 2\} = \{2i+1 | i = 0, 1, 2\} = \{1, 3, 5\}$$

$$\text{ซึ่ง } \bar{0} \cup \bar{l} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = V(P_7)$$

ตัวอย่าง 3.7 ให้ $m = 11$ และ $l = 2$

จะได้ว่า $\frac{m-1}{l} = \frac{10}{2} = 5$ เป็นจำนวนคี่ และ $\lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor = \lfloor \frac{10}{4} \rfloor = \lfloor 2.5 \rfloor = 2$

ดังนั้น $\bar{0} = \{2i(2) | i = 0, 1, 2\} = \{4i | i = 0, 1, 2\} = \{0, 4, 8\}$

$$\bar{1} = \{2i(2) + 1 | i = 0, 1, 2\} \cup \{2i(2) - 1 | i = 1, 2\}$$

$$= \{4i + 1 | i = 0, 1, 2\} \cup \{4i - 1 | i = 1, 2\} = \{1, 5, 9\} \cup \{3, 7\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\bar{2} = \{(2i+1)(2) | i = 0, 1, 2\} = \{4i + 2 | i = 0, 1, 2\} = \{2, 6, 10\}$$

ซึ่ง $\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = V(P_{11})$

บทตั้ง 3.8 ให้ $l \in L$ และ $r \in V(P_n)$ ซึ่ง $r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}$

กำหนดฟังก์ชัน $f_{l,r} : P_m \rightarrow P_n$ และ $g_{l,r} : P_m \rightarrow P_n$ โดยที่ $f_{l,r}(x) = r+t$ เมื่อ $x \in \bar{t}$ และ $g_{l,r}(x) = r+l-t$ เมื่อ $x \in \bar{t}$ จะได้ว่า $f_{l,r}, g_{l,r} \in LSH(P_m, P_n)$

และกำหนด $F = \{f_{l,r} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}$ และ $G = \{g_{l,r} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}$ จะได้ว่า $|F| = |G| = \sum_{l \in L} (n-l)$ และ $2 \sum_{l \in L} (n-l) \leq |LSH(P_m, P_n)|$

พิสูจน์. จะแสดงว่า $f_{l,r} \in LSH(P_m, P_n)$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $f_{l,r}$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน

ให้ $xy \in E(P_m)$ จะแสดงว่า $f_{l,r}(x)f_{l,r}(y) \in E(P_n)$

สมมติให้ $x \in \bar{t}$ จากบทนิยาม 3.5 จะได้ว่า $y \in \overline{t+1}$ หรือ $y \in \overline{t-1}$

จากการกำหนด $f_{l,r}$ จะได้ว่า $f_{l,r}(x) = r+t$ และได้ว่า $f_{l,r}(y) = r+(t+1)$ หรือ $f_{l,r}(y) = r+(t-1)$

ถ้า $f_{l,r}(y) = r+(t+1)$ แล้ว $f_{l,r}(x)f_{l,r}(y) = \{r+t, r+(t+1)\} \in E(P_n)$

ถ้า $f_{l,r}(y) = r+(t-1)$ แล้ว $f_{l,r}(x)f_{l,r}(y) = \{r+t, r+(t-1)\} \in E(P_n)$

ดังนั้น $f_{l,r}(x)$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน

ให้ $f_{l,r}(x)f_{l,r}(y) \in E(P_n)$ จะได้ว่า $f_{l,r}(x) = r+t$ และ $f_{l,r}(y) = r+t+1$ หรือ $f_{l,r}(x) = r+t+1$ และ $f_{l,r}(y) = r+t$ สำหรับบาง $t \in \{0, 1, \dots, l-1\}$

กรณี 1 $f_{l,r}(x) = r+t$ และ $f_{l,r}(y) = r+t+1$

จะได้ว่า $f^{-1}(f_{l,r}(x)) = \bar{t}$ และ $f^{-1}(f_{l,r}(y)) = \overline{t+1}$

กรณีที่ 1.1 $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

$$\text{ให้ } x' \in f^{-1}(f_{l,r}(x)) = \bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

กรณีที่ 1.1.1 $x' \in \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$

$$\text{นั่นคือ } x' = 2il + t \text{ สำหรับบาง } i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor$$

$$\text{จะมี } y' = x' + 1 = (2il + t) + 1$$

$$\in \{2il + t + 1 | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

$$\subseteq \{2il + (t+1) | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - (t+1) | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

$$= \overline{t+1} = f^{-1}(f_{l,r}(y))$$

$$\text{ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

กรณีที่ 1.1.2 $x' \in \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$

$$\text{นั่นคือ } x' = 2il - t \text{ สำหรับบาง } i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor$$

$$\text{จะมี } y' = x' - 1 = (2il - t) - 1$$

$$= 2il - (t+1)$$

$$\in \{2il - (t+1) | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

$$\subseteq \{2il + (t+1) | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - (t+1) | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

$$= \overline{t+1} = f^{-1}(f_{l,r}(y))$$

$$\text{ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

กรณีที่ 1.2 $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคู่

$$\text{ให้ } x' \in f^{-1}(f_{l,r}(x)) = \bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

กรณีที่ 1.2.1 $x' \in \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\}$

$$\text{สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1.1 ว่ามี } y' = x' + 1 \text{ ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

กรณีที่ 1.2.2 $x' \in \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$

$$\text{สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1.2 ว่ามี } y' = x' - 1 \text{ ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

ดังนั้น สำหรับทุก $x' \in f^{-1}(f_{l,r}(x))$ จะมี $y' \in f^{-1}(f_{l,r}(y))$ ที่ทำให้ $x'y' \in E(P_m)$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า สำหรับทุก $y' \in f^{-1}(f_{l,r}(y))$ จะมี $x' \in f^{-1}(f_{l,r}(x))$ ที่ทำให้ $x'y' \in E(P_m)$

กรณีที่ 2 $f_{l,r}(x) = r + t + 1$ และ $f_{l,r}(y) = r + t$

$$\text{จะได้ว่า } f^{-1}(f_{l,r}(x)) = \overline{t+1} \text{ และ } f^{-1}(f_{l,r}(y)) = \bar{t}$$

สามารถพิสูจน์ในได้ทำนองเดียวกัน กรณีที่ 1 ว่าสำหรับทุก $x' \in f^{-1}(f_{l,r}(x))$ จะมี $y' \in f^{-1}(f_{l,r}(y))$ ที่ทำให้ $x'y' \in E(P_m)$ และสำหรับทุก $y' \in f^{-1}(f_{l,r}(y))$ จะมี $x' \in f^{-1}(f_{l,r}(x))$ ที่ทำให้ $x'y' \in E(P_m)$

จากทั้ง 2 กรณี สามารถสรุปได้ว่า $f_{l,r}$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_m ไป P_n นั่นคือ $f_{l,r} \in LSH(P_m, P_n)$

ต่อไปจะแสดงว่า $g_{l,r} \in LSH(P_m, P_n)$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $g_{l,r}(x) = r + l - t$ เมื่อ $x \in \bar{t}$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐาน

ให้ $xy \in E(P_m)$ จะแสดงว่า $g_{l,r}(x)g_{l,r}(y) \in E(P_n)$

สมมติให้ $x \in \bar{t}$ จากบทนิยาม 3.5 จะได้ว่า $y \in \overline{t+1}$ หรือ $y \in \overline{t-1}$

จากการกำหนด $g_{l,r}$ จะได้ว่า $g_{l,r}(x) = r + (l - t)$ และได้ว่า $g_{l,r}(y) = r + (l - (t + 1))$ หรือ $g_{l,r}(y) = r + (l - (t - 1))$

ถ้า $g_{l,r}(y) = r + (l - (t + 1))$ แล้ว $g_{l,r}(x)g_{l,r}(y) = \{r + l - t, r + l - (t + 1)\} \in E(P_n)$

ถ้า $g_{l,r}(y) = r + (l - (t - 1))$ แล้ว $g_{l,r}(x)g_{l,r}(y) = \{r + l - t, r + (l - (t - 1))\} \in E(P_n)$

ดังนั้น $g_{l,r}(x)$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐาน

ให้ $g_{l,r}(x)g_{l,r}(y) \in E(P_n)$ จะได้ว่า $g_{l,r}(x) = r + l - t$ และ $g_{l,r}(y) = r + l - (t + 1)$ หรือ $g_{l,r}(x) = r + l - (t + 1)$

และ $g_{l,r}(y) = r + l - t$ สำหรับบาง $t \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$

กรณีที่ 1 $g_{l,r}(x) = r + l - t$ และ $g_{l,r}(y) = r + l - (t + 1)$

$$\text{จะได้ว่า } g^{-1}(g_{l,r}(x)) = \bar{t} \text{ และ } g^{-1}(g_{l,r}(y)) = \overline{t+1}$$

กรณีที่ 1.1 $\frac{m-1}{l}$ เป็นจำนวนคี่

$$\text{ให้ } x' \in g^{-1}(g_{l,r}(x)) = \bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

กรณีที่ 1.1.1 $x' \in \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$

$$\text{นั่นคือ } x' = 2il + t \text{ สำหรับบาง } i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor$$

$$\text{จะมี } y' = x' + 1 = (2il + t) + 1$$

$$\begin{aligned} &\in \{2il + t + 1 | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \\ &\subseteq \{2il + (t+1) | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - (t+1) | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \\ &= \overline{t+1} = g^{-1}(g_{l,r}(y)) \end{aligned}$$

$$\text{ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

$$\text{กรณีที่ 1.1.2 } x' \in \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

$$\text{นั่นคือ } x' = 2il - t \text{ สำหรับบาง } i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor$$

$$\text{จะมี } y' = x' - 1 = (2il - t) - 1$$

$$\begin{aligned} &= 2il - (t+1) \\ &\in \{2il - (t+1) | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \\ &\subseteq \{2il + (t+1) | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - (t+1) | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \\ &= \overline{t+1} = g^{-1}(g_{l,r}(y)) \end{aligned}$$

$$\text{ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

$$\text{กรณีที่ 1.2 } \frac{m-1}{l} \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$\text{ให้ } x' \in g^{-1}(g_{l,r}(x)) = \bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

$$\text{กรณีที่ 1.2.1 } x' \in \{2il + t | i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\}$$

$$\text{สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1.1 ว่ามี } y' = x' + 1 \text{ ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

$$\text{กรณีที่ 1.2.2 } x' \in \{2il - t | i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}$$

$$\text{สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1.2 ว่ามี } y' = x' - 1 \text{ ซึ่ง } x'y' \in E(P_m)$$

$$\text{ดังนั้น สำหรับทุก } x' \in g^{-1}(g_{l,r}(x)) \text{ จะมี } y' \in g^{-1}(g_{l,r}(y)) \text{ ที่ทำให้ } x'y' \in E(P_m)$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า สำหรับทุก } y' \in g^{-1}(g_{l,r}(y)) \text{ จะมี } x' \in g^{-1}(g_{l,r}(x)) \text{ ที่ทำให้ } x'y' \in E(P_m)$$

$$\text{กรณีที่ 2 } g_{l,r}(x) = r + l - (t+1) \text{ และ } g_{l,r}(y) = r + l - t$$

$$\text{จะได้ว่า } g^{-1}(g_{l,r}(x)) = \overline{t+1} \text{ และ } g^{-1}(g_{l,r}(y)) = \bar{t}$$

สามารถพิสูจน์ในได้ทำนองเดียวกัน กรณีที่ 1 ว่า สำหรับทุก $x' \in g^{-1}(g_{l,r}(x))$ จะมี $y' \in g^{-1}(g_{l,r}(y))$ ที่ทำให้ $x'y' \in E(P_m)$ และสำหรับทุก $y' \in g^{-1}(g_{l,r}(y))$ จะมี $x' \in g^{-1}(g_{l,r}(x))$ ที่ทำให้ $x'y' \in E(P_m)$ จากทั้ง 2 กรณี สามารถสรุปได้ว่า $g_{l,r}$ เป็นฟังก์ชันสาคูสลับฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_m ไป P_n นั่นคือ $g_{l,r} \in LSH(P_m, P_n)$

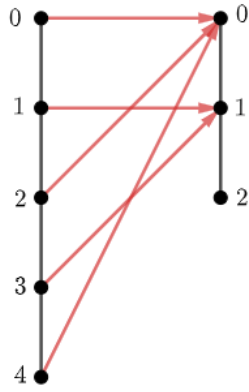
กำหนดให้ $F = \{f_{l,r} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}$ และ $G = \{g_{l,r} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}$ จาก $f_{l,r}, g_{l,r} \in LSH(P_m, P_n)$ จะได้ว่า $F \cup G \subseteq LSH(P_m, P_n)$ จะสังเกตเห็นว่า $|F| = |G| = \sum_{l \in L} (n-l)$ เนื่องจาก $F \cap G \neq \emptyset$ ดังนั้น $|F \cup G| = |F| + |G| = 2 \sum_{l \in L} (n-l) \leq |LSH(P_m, P_n)|$ $\square$

ข้อสังเกต พิจารณา $F = \{f_{l,r} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}$ ให้ $L = \{l_1, l_2, \dots, l_p\}$ สำหรับบางจำนวนนับ $p \geq 1$

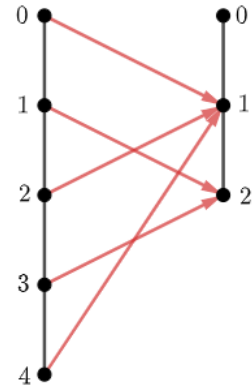
$$\begin{aligned} &\text{จะมี } f_{l_1,0}, f_{l_1,1}, \dots, f_{l_1,n-1-l_1} \in F \text{ อยู่ทั้งหมด } n-l_1 \text{ ฟังก์ชัน} \\ &\quad f_{l_2,0}, f_{l_2,1}, \dots, f_{l_2,n-1-l_2} \in F \text{ อยู่ทั้งหมด } n-l_2 \text{ ฟังก์ชัน} \\ &\quad \vdots \\ &\text{และ } f_{l_p,0}, f_{l_p,1}, \dots, f_{l_p,n-1-l_p} \in F \text{ อยู่ทั้งหมด } n-l_p \text{ ฟังก์ชัน} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } |F| = |\{f_{l,r} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}| = \sum_{l \in L} (n-l)$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันเราสามารถทราบว่ } |G| = |\{g_{l,r} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}| = \sum_{l \in L} (n-l)$$



รูปที่ 3.5: ฟังก์ชัน $f_{1,0}$



รูปที่ 3.6: ฟังก์ชัน $f_{1,1}$

ตัวอย่าง 3.9 ให้ $m = 5$ และ $n = 3$

จะได้ $L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq n - 1 \text{ และ } l|(m - 1)\} = \{l \in \mathbb{N} | l \leq 2 \text{ และ } l|4\} = \{1, 2\}$

ที่ $l = 1$ จะได้ $\{0, 1, \dots, n - 1 - l\} = \{0, 1\}$ และ $\lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor = \lfloor \frac{4}{2} \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 2$

ดังนั้น $\bar{0} = \{2i | i = 0, 1, 2\} = \{0, 2, 4\}$

$\bar{1} = \{(2i + 1) | i = 0, 1\} = \{1, 3\}$

ที่ $r = 0$ จะได้ $f_{1,0}(x) = 0 + 0 = 0$ เมื่อ $x \in \bar{0} = \{0, 2, 4\}$

$f_{1,0}(x) = 0 + 1 = 1$ เมื่อ $x \in \bar{1} = \{1, 3\}$

ที่ $r = 1$ จะได้ $f_{1,1}(x) = 1 + 0 = 1$ เมื่อ $x \in \bar{0} = \{0, 2, 4\}$

$f_{1,1}(x) = 1 + 1 = 2$ เมื่อ $x \in \bar{1} = \{1, 3\}$

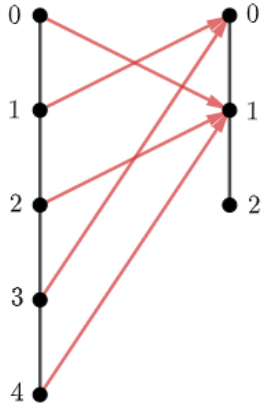
จะได้ฟังก์ชัน $f_{1,0}, f_{1,1}$ ดังรูปที่ 3.5 และ 3.6 ตามลำดับ ซึ่ง $f_{1,0}$ และ $f_{1,1}$ เป็นฟังก์ชันสมาชิกสัจนิรันดร์แบบเข้มเฉพาะส่วน

ที่ $r = 0$ จะได้ $g_{1,0}(x) = 0 + (1 - 0) = 1$ เมื่อ $x \in \bar{0} = \{0, 2, 4\}$

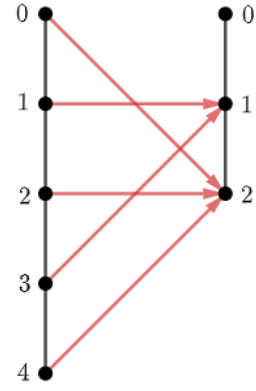
$g_{1,0}(x) = 0 + (1 - 1) = 0$ เมื่อ $x \in \bar{1} = \{1, 3\}$

ที่ $r = 1$ จะได้ $g_{1,1}(x) = 1 + (1 - 0) = 2$ เมื่อ $x \in \bar{0} = \{0, 2, 4\}$

$g_{1,1}(x) = 1 + (1 - 1) = 1$ เมื่อ $x \in \bar{1} = \{1, 3\}$



รูปที่ 3.7: ฟังก์ชัน $g_{1,0}$



รูปที่ 3.8: ฟังก์ชัน $g_{1,1}$

จะได้ฟังก์ชัน $g_{1,0}, g_{1,1}$ ดังรูปที่ 3.7 และ 3.8 ตามลำดับ ซึ่ง $g_{1,0}$ และ $g_{1,1}$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบ
 เฉพาะส่วน

$$\text{ที่ } l = 2 \text{ จะได้ } \{0, 1, \dots, n-1-l\} = \{0\} \text{ และ } \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor = \lfloor \frac{4}{4} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \bar{0} = \{2i(2) | i = 0, 1\} = \{4i | i = 0, 1\} = \{0, 4\}$$

$$\bar{1} = \{2i(2) + 1 | i = 0\} \cup \{2i(2) - 1 | i = 1\} = \{4i + 1 | i = 0\} \cup \{4i - 1 | i = 1\} = \{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$$

$$\bar{2} = \{(2i+1)(2) | i = 0\} = \{4i + 2 | i = 0\} = \{2\}$$

$$\text{ที่ } r = 0 \text{ จะได้ } f_{2,0}(x) = 0 + 0 = 0 \text{ เมื่อ } x \in \bar{0} = \{0, 4\}$$

$$f_{2,0}(x) = 0 + 1 = 1 \text{ เมื่อ } x \in \bar{1} = \{1, 3\}$$

$$f_{2,0}(x) = 0 + 2 = 2 \text{ เมื่อ } x \in \bar{2} = \{2\}$$

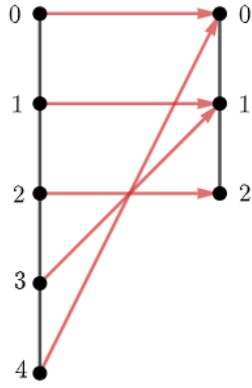
จะได้ฟังก์ชัน $f_{2,0}$ ดังรูปที่ 3.9 ซึ่ง $f_{2,0}$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเฉพาะส่วน

$$\text{ที่ } r = 0 \text{ จะได้ } g_{2,0}(x) = 0 + (2 - 0) = 2 \text{ เมื่อ } x \in \bar{0} = \{0, 4\}$$

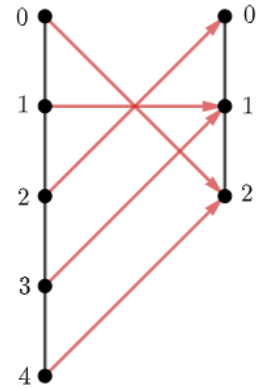
$$g_{2,0}(x) = 0 + (2 - 1) = 1 \text{ เมื่อ } x \in \bar{1} = \{1, 3\}$$

$$g_{2,0}(x) = 0 + (2 - 2) = 0 \text{ เมื่อ } x \in \bar{2} = \{2\}$$

จะได้ฟังก์ชัน $g_{2,0}$ ดังรูปที่ 3.10 ซึ่ง $g_{2,0}$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเฉพาะส่วน



รูปที่ 3.9: ฟังก์ชัน $f_{2,0}$



รูปที่ 3.10: ฟังก์ชัน $g_{2,0}$

จะสังเกตว่า $f_{l,r}$ ที่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเชื่อมเฉพาะส่วน จาก P_5 ไป P_3 คือ $f_{1,0}$, $f_{1,1}$ และ $f_{2,0}$ มีจำนวนทั้งหมด 3 ฟังก์ชัน หรือ $|F| = |\{f_{1,0}, f_{1,1}, f_{2,0}\}| = \sum_{l \in \{1,2\}} (3-l) = (3-1) + (3-2) = 2+1 = 3$ และ $g_{l,r}$ ที่เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานแบบเชื่อมเฉพาะส่วน จาก P_5 ไป P_3 คือ $g_{1,0}$, $g_{1,1}$ และ $g_{2,0}$ มีจำนวนทั้งหมด 3 ฟังก์ชัน หรือ $|G| = |\{g_{1,0}, g_{1,1}, g_{2,0}\}| = \sum_{l \in \{1,2\}} (3-l) = (3-1) + (3-2) = 2+1 = 3$ ดังนั้น $|F| + |G| = |F \cup G| = 2 \sum_{l \in \{1,2\}} (3-l) = 2(3) = 6$

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $m, n > 1$ แล้ว $F \cup G = LSH(P_m, P_n)$ และ $|LSH(P_m, P_n)| = 2 \sum_{l \in L} (n-l)$

พิสูจน์. จากบทตั้ง 3.8 ได้ว่า $F \cup G \subseteq LSH(P_m, P_n)$ ดังนั้น $|LSH(P_m, P_n)| \geq 2 \sum_{l \in L} (n-l)$

ต่อไปจะแสดงว่า $LSH(P_m, P_n) \subseteq F \cup G$

ให้ $f \in LSH(P_m, P_n)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน จะได้ว่า $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

สำหรับบาง $i \in \{0, \dots, n-1-l\}$ และบาง $l \leq n-1$

ต่อไปจะแสดงว่า $l|(m-1)$

ขั้นแรกจะแสดงว่า $f(0) = i$ หรือ $f(0) = i+l$

สมมติว่า $f(0) = i+t$ สำหรับบาง $t \in \{1, \dots, l-1\}$

ดังนั้น $f(1) = i+(t+1)$ หรือ $f(1) = i+(t-1)$

กรณีที่ 1 ถ้า $f(1) = i+(t+1)$

แล้วจะได้ว่า $1 \in f^{-1}(i+(t+1))$ ดังนั้น $1 \notin f^{-1}(i+(t-1))$

เนื่องจาก $\{i+t, i+(t-1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $0 \in f^{-1}(i+t)$ แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(t-1))$ ที่ประชิด

กับ 0 ซึ่งขัดแย้งกับสมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

กรณีที่ 2 ถ้า $f(1) = i + (t - 1)$

แล้วจะได้ว่า $1 \in f^{-1}(i + (t - 1))$ ดังนั้น $1 \notin f^{-1}(i + (t + 1))$

เนื่องจาก $\{i + t, i + (t + 1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $0 \in f^{-1}(i + t)$ แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i + (t + 1))$ ที่ประชิด

กับ 0 ซึ่งขัดแย้งกับสมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

จากทั้งสองกรณี จะได้ว่า $f(0) \neq i + t$ สำหรับทุก $t \in \{1, \dots, l - 1\}$

นั่นคือ $f(0) = i$ หรือ $f(0) = i + l$

ต่อไปจะแสดงว่า $f(m - 1) = i$ หรือ $f(m - 1) = i + l$

สมมติว่า $f(m - 1) = i + t$ สำหรับบาง $t \in \{1, \dots, l - 1\}$

ดังนั้น $f(m - 2) = i + (t + 1)$ หรือ $f(m - 2) = i + (t - 1)$

กรณีที่ 1 ถ้า $f(m - 2) = i + (t + 1)$

แล้วจะได้ว่า $m - 2 \in f^{-1}(i + (t + 1))$ ดังนั้น $m - 2 \notin f^{-1}(i + (t - 1))$

เนื่องจาก $\{i + t, i + (t - 1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $m - 1 \in f^{-1}(i + t)$ แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i + (t - 1))$ ที่

ประชิดกับ $m - 1$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

กรณีที่ 2 ถ้า $f(m - 2) = i + (t - 1)$

แล้วจะได้ว่า $m - 2 \in f^{-1}(i + (t - 1))$ ดังนั้น $m - 2 \notin f^{-1}(i + (t + 1))$

เนื่องจาก $\{i + t, i + (t + 1)\} \in E(P_{l+1})$ และมี $m - 1 \in f^{-1}(i + t)$ แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i + (t + 1))$ ที่

ประชิดกับ $m - 1$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

จากทั้งสองกรณี จะได้ว่า $f(m - 1) \neq i + t$ สำหรับทุก $t \in \{1, \dots, l - 1\}$

นั่นคือ $f(m - 1) = i$ หรือ $f(m - 1) = i + l$

เนื่องจาก $f(0) = i$ หรือ $f(0) = i + l$ และ $f(m - 1) = i$ หรือ $f(m - 1) = i + l$

ต่อไปจะแสดงว่า $l|(m - 1)$ โดยแบ่งออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $f(0) = i$ และ $f(m - 1) = i$

จะได้ว่า $f(1) = i + 1$

จะแสดงว่า $f(2) = i + 2$

$\vdots$

$$f(l) = i + l$$

สมมติให้ $f(t) = i + t$ และ $f(t - 1) = f(t + 1) = i + (t - 1)$ สำหรับบาง $1 < t < l$

ดังนั้น $t \in f^{-1}(i + t)$ และ $t - 1, t + 1 \in f^{-1}(i + (t - 1))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i + 1, \dots, i + l\}$ และ $\{i + t, i + (t + 1)\} \in E(P_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i + (t + 1))$ ที่ประชิดกับ t ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานว่า f เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานแบบ
เข้มเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(2) = i + 2$

$\vdots$

$$f(l) = i + l$$

ต่อไปจะแสดงว่า $f(l + 1) = i + (l - 1)$

$\vdots$

$$f(2l) = i$$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i + 1, \dots, i + l\}$

ดังนั้น $f(l + 1) = i + (l - 1)$

สมมติให้ $f(l + k) = i + (l - k)$ และ $f(l + (k + 1)), f(l + (k - 1)) = i + (l - (k - 1))$ สำหรับบาง $1 < k < l$

ดังนั้น $l + k \in f^{-1}(i + (l - k))$ และ $l + (k + 1), l + (k - 1) \in f^{-1}(i + (l - (k - 1)))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i + 1, \dots, i + l\}$ และ $\{i + l - k, i + (l - (k + 1))\} \in E(P_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i + (l - (k + 1)))$ ที่ประชิดกับ $l + k$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ f เป็นฟังก์ชันสาทิส
สัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(l+2) = i + (l-2)$

$\vdots$

$$f(l+l) = i + (l-l)$$

นั่นคือ $f(l+2) = i + (l-2)$

$\vdots$

$$f(2l) = i$$

นอกจากนี้ยังสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับข้างต้น

ว่า $f(2l+1) = i+1$

$\vdots$

$$f(3l) = i+l$$

$\vdots$

$$f(pl) = i \text{ สำหรับบางจำนวนเต็มคู่ } p$$

จะเห็นว่าถ้ากำหนด $\bar{0} = \{2il | i = 0, 1, \dots, k\}$

$\vdots$

$$\bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, k\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, k\}$$

$\vdots$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l | i = 0, 1, \dots, k\}$$

แล้ว $f(x) = i + t$ เมื่อ $x \in \bar{t}$

จะเห็นว่า $f(\bar{0}) = \{i\}$ และ $f(m-1) = i$

ดังนั้น $2il = m-1$ สำหรับบาง $i \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l|(m-1)$

จาก $l \leq n-1$ และ $l|(m-1)$ จะได้ว่า $l \in L$ ดังนั้น $f = f_{l,i} \in F$

กรณีที่ 2 $f(0) = i$ และ $f(m-1) = i+l$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

ว่า $f(\bar{l}) = \{i+l\}$ และ $f(m-1) = i+l$

ดังนั้น $(2i+1)l = m-1$ สำหรับบาง $i \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l|(m-1)$

จาก $l \leq (n-1)$ และ $l|(m-1)$ จะได้ว่า $l \in L$ ดังนั้น $f = f_{l,i} \in F$

กรณีที่ 3 $f(0) = i+l$ และ $f(m-1) = i$

จะได้ว่า $f(1) = i+(l-1)$

จะแสดงว่า $f(2) = i+(l-2)$

$\vdots$

$$f(l) = i$$

สมมติให้ $f(t) = i+(l-t)$ และ $f(t-1) = f(t+1) = i+(l-(t-1))$ สำหรับบาง $1 < t < l$

ดังนั้น $t \in f^{-1}(i+(l-t))$ และ $t-1, t+1 \in f^{-1}(i+(l-(t-1)))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$ และ $\{i+(l-t), i+(l-(t+1))\} \in E(P_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(l-(t+1)))$ ที่ประชิดกับ t ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน

แบบเข้มเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(2) = i+(l-2)$

$\vdots$

$$f(l) = i+(l-l)$$

นั่นคือ $f(2) = i+(l-2)$

$\vdots$

$$f(l) = i$$

ต่อไปจะแสดงว่า $f(l+1) = i+1$

$\vdots$

$$f(2l) = i+l$$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$

ดังนั้น $f(l+1) = i+1$

สมมติให้ $f(l+k) = i+k$ และ $f(l+(k+1)), f(l+(k-1)) = i+(k-1)$ สำหรับบาง $1 < k < l$

ดังนั้น $l+k \in f^{-1}(i+k)$ และ $l+(k+1), l+(k-1) \in f^{-1}(i+(k-1))$

เนื่องจาก $f(V(P_m)) = \{i, i+1, \dots, i+l\}$ และ $\{i+k, i+(k+1)\} \in E(P_n)$

แต่ไม่มีจุดยอดใดเลยใน $f^{-1}(i+(k+1))$ ที่ประชิดกับ $l+k$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ f เป็นฟังก์ชันสาคีสัญฐาน

แบบเข้มเฉพาะส่วน

ดังนั้น $f(l+2) = i+2$

$\vdots$

$$f(l+l) = i+l$$

นั่นคือ $f(l+2) = i+2$

$\vdots$

$$f(2l) = i+l$$

นอกจากนี้ยังสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับข้างต้น

ว่า $f(2l+1) = i+(l-1)$

$\vdots$

$$f(3l) = i$$

$\vdots$

$$f(ql) = i \text{ สำหรับบางจำนวนเต็ม } q$$

จะเห็นว่าถ้ากำหนด $\bar{0} = \{2il | i = 0, 1, \dots, k\}$

$\vdots$

$$\bar{t} = \{2il + t | i = 0, 1, \dots, k\} \cup \{2il - t | i = 1, 2, \dots, k\}$$

$\vdots$

$$\bar{l} = \{(2i + 1)l | i = 0, 1, \dots, k\}$$

แล้ว $f(x) = i + (l - t)$ เมื่อ $x \in \bar{t}$

จะเห็นว่า $f(\bar{l}) = \{i\}$ และ $f(m - 1) = i$

ดังนั้น $(2i + 1)l = m - 1$ สำหรับบาง $i \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l | (m - 1)$

จาก $l \leq n - 1$ และ $l | (m - 1)$ จะได้ว่า $l \in L$ ดังนั้น $f = g_{l,i} \in G$

กรณีที่ 4 $f(0) = i + l$ และ $f(m - 1) = i + l$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 3

ว่า $f(\bar{0}) = \{i + l\}$ และ $f(m - 1) = i + l$

ดังนั้น $2il = m - 1$ สำหรับบาง $i \in \{0, 1, \dots, k\}$

นั่นคือ $l | (m - 1)$

จาก $l \leq n - 1$ และ $l | (m - 1)$

จะได้ว่า $l \in L$ ดังนั้น $f = g_{l,i} \in G$

จากทั้ง 4 กรณีดังกล่าว สามารถสรุปได้ว่า $f \in F \cup G$

ดังนั้น $LSH(P_m, P_n) \subseteq F \cup G$

จะสังเกตเห็นว่า $|F \cup G| = 2 \sum_{l \in L} (n - l)$

จึงได้ว่า $|LSH(P_m, P_n)| \leq |F \cup G| = 2 \sum_{l \in L} (n - l)$

จาก $2 \sum_{l \in L} (n - l) \leq |LSH(P_m, P_n)|$

ดังนั้น $|LSH(P_m, P_n)| = 2 \sum_{l \in L} (n - l)$

□

ตัวอย่าง 3.11 ตัวอย่างการใช้ ทฤษฎีบทที่ 3.10 หาจำนวนฟังก์ชันสัจนิรันดร์แบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_5 ไป P_3

$$\text{ให้ } m = 5 \text{ และ } n = 3 \text{ จะได้ว่า } L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq 2 \text{ และ } l|4\} = \{1, 2\}$$

$$\text{ดังนั้น } |LSH(P_5, P_3)| = 2 \sum_{l \in L} (3 - l) = 2[(3 - 1) + (3 - 2)] = 2(2 + 1) = 2(3) = 6$$

ตัวอย่าง 3.12 ตัวอย่างการใช้ ทฤษฎีบทที่ 3.10 หาจำนวนฟังก์ชันสัจนิรันดร์แบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_7 ไป P_4

$$\text{ให้ } m = 7 \text{ และ } n = 4 \text{ จะได้ว่า } L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq 3 \text{ และ } l|6\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{ดังนั้น } |LSH(P_7, P_4)| = 2 \sum_{l \in L} (4 - l) = 2[(4 - 1) + (4 - 2) + (4 - 3)] = 2(3 + 2 + 1) = 2(6) = 12$$

ตัวอย่าง 3.13 ตัวอย่างการใช้ ทฤษฎีบทที่ 3.10 หาจำนวนฟังก์ชันสัจนิรันดร์แบบเข้มเฉพาะส่วนจาก P_{11} ไป P_6

$$\text{ให้ } m = 11 \text{ และ } n = 6 \text{ จะได้ว่า } L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq 5 \text{ และ } l|10\} = \{1, 2, 5\}$$

$$\text{ดังนั้น } |LSH(P_{11}, P_6)| = 2 \sum_{l \in L} (6 - l) = 2[(6 - 1) + (6 - 2) + (6 - 5)] = 2(5 + 4 + 1) = 2(10) = 20$$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จากการศึกษาเราได้จำนวนฟังก์ชันสัทสัณฐานแบบเข้มเฉพาะส่วนจากวิธี P_m ไปยังวิธี P_n สำหรับจำนวนนับ m และ n ใด ๆ ได้ผลการศึกษาดังนี้

- $|LSH(P_1, P_n)| = n$
- ถ้า $m > 1$ แล้ว $|LSH(P_m, P_1)| = 0$
- ถ้า $m, n > 1$ แล้ว $|LSH(P_m, P_n)| = 2 \sum_{l \in L} (n - l)$ โดยที่ $L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq n - 1 \text{ และ } l|(m - 1)\}$

บรรณานุกรม

- [1] Sr. Arworn, U. Knauer, S. Leeratanavalee, Locally Strong Endomorphisms of Paths, Discrete Mathematics, 308 (2008), 2525-2532.
- [2] วรณ ศิริ วรณ สิทธิ, เอกสาร ประกอบ การ เรียน กระบวน วิชา 206281 คณิต ศาสตร์ ดิส ครีต (Discrete Mathematics), ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2563.
- [3] Algebra and Discrete Mathematics Volume 26 (2018). Number 2, pp. 270-279.

ภาคผนวก A

โปสเตอร์



CHIANG MAI
UNIVERSITY PRESS



Locally Strong Homomorphisms of Paths

Mr. Natthapong Wongkam, Advisor : Assoc. Prof. Dr.Sayan Panma

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

Abstract

Let G and G' be two graphs. A **homomorphism** f from G to G' is called a **locally strong homomorphism** if $f(x)f(y) \in E(G')$ implies for all $x' \in f^{-1}(f(x))$ there exists $y' \in f^{-1}(f(y))$ such that $x'y' \in E(G)$ and for all $y' \in f^{-1}(f(y))$ there exists $x' \in f^{-1}(f(x))$ such that $x'y' \in E(G)$. In this independent study, we determine the number of locally strong homomorphisms from a path P_m to another path P_n for any integers m and n .

Preliminaries

In this section, we collect some basic definition, notation and examples.

Definition 1

A graph G is a pair $G = (V(G), E(G))$ where $V(G)$ is a finite set whose elements are called **vertices**, and $E(G)$ is a set of un-order pairs of vertices, whose elements are called **edges**.

Definition 2

Let P_n denote a graph such that $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ and $E(P_n) = \{(i, i+1), i = 0, 1, \dots, n-2\}$. We call P_n a path of n vertices. The graphical representation of P_n is shown in Figure 1.



Figure 1: Path with n vertices

Definition 3

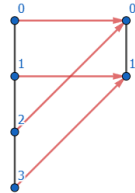
Let G and G' be graphs. A mapping $f : V(G) \rightarrow V(G')$ is a **homomorphism** from G to G' if $\{x, y\} \in E(G)$ then $\{f(x), f(y)\} \in E(G')$.

Definition 4

Let G and G' be graphs. A homomorphism f from G to G' is called a **locally strong homomorphism** if $f(x)f(y) \in E(G')$ implies for all $x' \in f^{-1}(f(x))$ there exists $y' \in f^{-1}(f(y))$ such that $x'y' \in E(G)$ and for all $y' \in f^{-1}(f(y))$ there exists $x' \in f^{-1}(f(x))$ such that $x'y' \in E(G)$.

Example 2

Consider P_4 and P_2 and $f : V(P_4) \rightarrow V(P_2)$ as in the picture below.



We get that: $\{0, 1\} \in E(P_4) \rightarrow \{f(0), f(1)\} = \{0, 1\} \in E(P_2)$;
 $\{1, 2\} \in E(P_4) \rightarrow \{f(1), f(2)\} = \{1, 0\} \in E(P_2)$;
 $\{2, 3\} \in E(P_4) \rightarrow \{f(2), f(3)\} = \{0, 1\} \in E(P_2)$.

Thus f is a homomorphism from P_4 to P_2 .

Consider $f(0)f(1) = 01 \in E(P_2)$. We see that for all $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0, 2\}$, there exists $y' \in f^{-1}(f(1)) = \{1, 3\}$ such that $x'y' \in E(P_4)$, and for all $y' \in f^{-1}(f(1)) = \{1, 3\}$, there exists $x' \in f^{-1}(f(0)) = \{0, 2\}$ such that $x'y' \in E(P_4)$. Thus f is a locally strong homomorphism from P_4 to P_2 .

Results

In this section, We present the number of locally strong homomorphism from a path P_m to another path P_n .

Lemma 1

If $n \in \mathbb{N}$ then $|LSH(P_1, P_n)| = n$.

Lemma 2

If $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ then $|LSH(P_m, P_1)| = 0$.

Definition 5

Let $m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$ and let $L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq n-1 \text{ and } l|(m-1)\}$.

For $\frac{m-1}{l}$ is odd, let

$$\bar{0} = \{2il, i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\},$$

$$\bar{t} = \{2il + t, i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \cup \{2il - t, i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \text{ for } 0 < t < l,$$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l, i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\}.$$

For $\frac{m-1}{l}$ is even, let

$$\bar{0} = \{2il, i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\},$$

$$\bar{t} = \{2il + t, i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\} \cup \{2il - t, i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor\} \text{ for } 0 < t < l,$$

$$\bar{l} = \{(2i+1)l, i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m-1}{2l} \rfloor - 1\}.$$

Lemma 3

Let $l \in L$ and $r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\} \subset V(P_n)$.

Define $f_{lr} : P_m \rightarrow P_n$ by $f_{lr}(x) = r + t$ if $x \in \bar{t}$,

and define $g_{lr} : P_m \rightarrow P_n$ by $g_{lr}(x) = r + l - t$ if $x \in \bar{t}$.

Let $F = \{f_{lr} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}$

and $G = \{g_{lr} | l \in L, r \in \{0, 1, \dots, n-1-l\}\}$.

Then $F \cup G \subseteq LSH(P_m, P_n)$ and $2\sum_{l \in L} (n-l) \leq |LSH(P_m, P_n)|$.

Theorem 1

Let $m, n \in \mathbb{N}$ where $m, n > 1$.

Then $F \cup G = LSH(P_m, P_n)$ and $|LSH(P_m, P_n)| = 2\sum_{l \in L} (n-l)$.

Example 3 The number of locally strong homomorphisms from P_7 to P_4 .

Let $m = 7$ and $n = 4$.

We have $L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq n-1 \text{ and } l|(m-1)\} = \{l \in \mathbb{N}, l \leq 3 \text{ and } l|6\} = \{1, 2, 3\}$.

From Theorem 1,

$$|LSH(P_7, P_4)| = 2\sum_{l \in L} (4-l) = 2[(4-1) + (4-2) + (4-3)] = 2(6) = 12.$$

Example 4 The number of locally strong homomorphisms from P_{11} to P_6 .

Let $m = 11$ and $n = 6$.

We have $L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq n-1 \text{ and } l|(m-1)\} = \{l \in \mathbb{N}, l \leq 5 \text{ and } l|10\} = \{1, 2, 5\}$.

From Theorem 1,

$$|LSH(P_{11}, P_6)| = 2\sum_{l \in L} (6-l) = 2[(6-1) + (6-2) + (6-5)] = 2(10) = 20.$$

Conclusion

In this independent study, we investigated the number of locally strong homomorphisms from a path P_m to another path P_n for any integers m and n . We got the following results :

1. $|LSH(P_1, P_n)| = n$;
2. If $m > 1$ then $|LSH(P_m, P_1)| = 0$;
3. If $m, n > 1$ then $|LSH(P_m, P_n)| = 2\sum_{l \in L} (n-l)$ where $L = \{l \in \mathbb{N} | l \leq n-1 \text{ and } l|(m-1)\}$.

References

- Sr. Arworn, U. Knauer, S. Leeratanavalee, Locally Strong Endomorphisms of Paths, Discrete Mathematics, 308 (2008), 2525-2532.
 Algebra and Discrete Mathematics Volume 26 (2018). Number 2, pp. 270-279.