

การหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในกีฬาบาสเกตบอล
(Finding optimal release angle of shooting in basketball)

นางสาวณัฏพร สดมพฤษ์

รหัส 620510527

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

การหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในกีฬาบาสเกตบอล
(Finding optimal release angle of shooting in basketball)

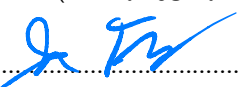
วันชัยพร สดมพฤกษ์

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ :

 ประธานกรรมการ

(ผศ.ดร. ชัยพร ตั้งทอง)

 กรรมการ

(รศ.ดร. ธเนศร์ ไรจน์ศิริพิศาล)

การหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในกีฬาบาสเกตบอล
(Finding optimal release angle of shooting in basketball)

นางสาววันชัยพร สดมพฤษ

รหัส 620510527

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ให้นักศึกษาได้ค้นคว้า ประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ทำการศึกษา เรื่อง การหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในกีฬาบาสเกตบอล

งานค้นคว้าอิสระชิ้นนี้ประสบความสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับการอนุเคราะห์ช่วยเหลือจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยพร ตั้งทอง ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาและให้โอกาสข้าพเจ้าในการทำงานค้นคว้าอิสระชิ้นดังกล่าว และให้ความช่วยเหลือแนะนำ ให้ข้อมูล ความรู้ ทักษะ เทคนิคต่างๆ รวมถึงแนวทางการทำการค้นคว้าอิสระ อีกทั้งตรวจสอบความถูกต้องในการศึกษาอิสระนี้ให้ข้าพเจ้า ด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่งจนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี ข้าพเจ้าตระหนักถึงความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ธเนศร์ โรจน์ศิริพิศาล อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ กรุณาให้ข้อเสนอแนะ ให้คำปรึกษา แก้ไขและให้แนวคิดต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้ดียิ่งขึ้น ด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่งจนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี

ขอขอบคุณอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่าน ที่ได้อบรม สั่งสอน และคอยให้ความรู้ทั้งในและนอกตำราเรียนให้แก่ผู้ค้นคว้า อันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคน และขอขอบคุณผู้ที่เกี่ยวข้องที่คอยสนับสนุน ให้คำปรึกษา ช่วยเหลือ ขณะที่ผู้ค้นคว้าอิสระทำการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้

สุดท้ายนี้หากการศึกษาค้นคว้าเล่มนี้จะมีประโยชน์แก่ผู้สนใจข้อมูล ข้าพเจ้าขอขอบคำขอบคุณ ชื่นชม และขอบคุณดีให้แก่คุณพ่อ คุณแม่ ผู้ให้การดูแลและเป็นกำลังใจที่สำคัญยิ่งในการทำการศึกษาค้นคว้าของข้าพเจ้า ครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนข้าพเจ้า ในส่วนของความผิดพลาดหรือบกพร่องประการใด ข้าพเจ้าขอน้อมรับผิดไว้แต่เพียงผู้เดียวและยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษาเพื่อเป็นประโยชน์ในการพัฒนาการศึกษาค้นคว้าอิสระต่อไป

วันชัยพร สดมพฤกษ์

หัวข้อ (ภาษาไทย)	การหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในกีฬาบาสเกตบอล	
(ภาษาอังกฤษ)	Finding optimal release angle of shooting in basketball	
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นางสาววันชัยพร สดมพฤกษ์	รหัสนักศึกษา 620510527
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร. ชัยพร ตั้งทอง	
ชื่อกรรมการสอบ	รศ.ดร. ธเนศร์ โรจน์ศิริพิศาล	

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษามุมปล่อยบอลของลูกบาสเกตบอลจนถึงห่วงของแป้นบาส และมุมที่ลูกบาสกระทำกับห่วงบาสใน 3 ระยะ คือ ระยะสองแต้ม ระยะลูกจุดโทษ และระยะสามแต้ม ในระยะสองแต้มผู้ยิงประตูยืนห่างจากห่วงของแป้นบาสเป็นระยะ 3.66 เมตร ระยะสามแต้มผู้ยิงประตูยืนห่างจากห่วงของแป้นบาสเป็นระยะ 7.24 เมตร และระยะจุดโทษผู้ยิงประตูยืนห่างจากห่วงของแป้นบาสเป็นระยะ 4.57 เมตร โดยที่ผู้ปล่อยบอลจะยืนขนานกับแป้นบาสทั้งสามระยะ สำหรับนักกีฬาหญิงที่มีส่วนสูง 165 เซนติเมตร และกำหนดความเร็วของลูกบอลที่ถูกปล่อยออกจากผู้ยิงประตูในระยะต่าง ๆ ผู้ค้นคว้าได้ทำการตั้งกล้องถ่ายคลิปลิงวิดีโอการยิงประตูบาสทั้งสามระยะ แล้วนำมาวิเคราะห์ในโปรแกรม GeoGebra จากการศึกษาพบว่า ระยะสองแต้ม ความเร็วที่ใช้ คือ 6.9 เมตรต่อวินาที มีมุมปล่อยบอลอยู่ที่ 57.27 องศา ได้มุมที่ลูกบาสกระทำกับห่วงอยู่ที่ 47.74 องศา ระยะสามแต้ม ความเร็วที่ใช้ คือ 9.3 เมตรต่อวินาที ได้มุมปล่อยบอลอยู่ที่ 43.38 องศา มีมุมที่ลูกบาสกระทำกับห่วงอยู่ที่ 34.81 องศา และระยะจุดโทษ ความเร็วที่ใช้ คือ 7.7 เมตรต่อวินาที มีมุมปล่อยบอลอยู่ที่ 58.35 องศา ได้มุมที่ลูกบาสกระทำกับห่วงอยู่ที่ 47.96 องศา

Abstract

In this independent study, we study the angle release the ball to the hoop in basketball and the angle which the ball acts on the three positions that are two points, three points and penalty. In two points, the distances between the player and the hoop is 3.66 meters and in three points, the distance between the player and the hoop is 7.24 meters. For penalty, the distance between the player and the hoop is 4.57 meters. The position of player is standing parallel to the basketball pad of all three positions. In this study, we consider female player with 165 centimeters tall and we set the velocity. The ball is released from the shooter at different distances. We set up a camcorder to record basketball shooting in three positions and using its to analyze in GeoGebra program. For two points position, the ball is released at 58 degrees with initial velocity of 6.90 meters per second and obtains the angle which the ball acting on the hoop is 43.50 degrees.

For three points position, the ball is released at 53 degrees with initial velocity of 9.20 meters per second and obtains the angle which the ball acting on the hoop is 46.13 degrees. For penalty position, the ball is released at 58 degrees with initial velocity of 7.7 meters per second and obtains the angle which the ball acting on the hoop is 47.45 degrees.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน	3
บทที่ 3 วิธีการดำเนินโครงการ	14
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา	30
บรรณานุกรม	31
ภาคผนวก	32

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

กีฬาบาสเกตบอลเป็นกีฬาประเภททีมที่สร้างความตื่นเต้นเร้าใจเป็นอย่างมาก ด้วยความที่มีการยิงประตูกันบ่อยครั้งหรือตลอดเวลา การทำประตูก็ต้องอาศัยความแม่นยำและความชำนาญของผู้เล่นในทีมแต่ละคน จึงจะสามารถทำให้ลูกบาสเกตบอลลงห่วงได้อย่างถูกต้อง ผู้เล่นแต่ละคนก็就会有ความชำนาญและความแม่นยำกันต่างออกไป ความแม่นยำที่เกิดขึ้นจะต้องอาศัยการฝึกฝนของผู้เล่นซึ่งจะแตกต่างกันไปตามทักษะของผู้เล่นคนนั้นๆ ยิ่งฝึกการยิงประตูบาสเกตบอลมากก็就会有ความแม่นยำมากและมีความชำนาญขึ้น เราเลยทำการค้นคว้าหามุมที่เหมาะสมในสามตำแหน่ง โดยที่ผู้ยิงประตูยืนขนานกับบาสเกตบอลทั้งสามจุดงานค้นคว้านี้จะเป็นการหามุมปล่อยบอลและมุมที่ลูกบอลกระทบกับห่วงของแป้นบาสโดยนักกีฬาหญิงที่มีความสูง 165 เซนติเมตรและความเร็วที่ได้จากการวิเคราะห์ของโปรแกรม Geogebra ในระยะต่างๆ ที่บ่งบอกถึงแรงปล่อยบอลของผู้หญิงที่มีความสูง 165 เซนติเมตร

ผู้ทำการค้นคว้าอิสระนี้ได้เป็นนักกีฬาบาสเกตบอลประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้เล็งเห็นถึงความสำคัญของการปล่อยบอลเพื่อความแม่นยำในการยิงประตูแล้วลูกลงห่วงพอดีกับห่วงของแป้นบาส ซึ่งการปล่อยบอลในระยะสองแฉ่ม สามแฉ่ม และลูกจุดโทษที่เรากำหนดไว้นั้นมีปัจจัยหลายอย่างอาทิ เช่น ความเร็ว ความสูง ตำแหน่งยืน ระยะทาง ฯลฯ ทางผู้ค้นคว้าได้ทำการตั้งกล้องถ่ายวิดีโอของการยิงประตูบาสทั้งสามตำแหน่งไว้ แล้วนำมาวิเคราะห์ในโปรแกรม Geogebra เพื่อทำการหามุมที่เหมาะสม

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำการค้นคว้า

1. เพื่อหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในพื้นที่ 2 แต้ม โดยยืนขนานกับแป้นบาส และผู้ยิงประตูยืนห่างจากแป้นระยะทาง 3.66 เมตร
2. เพื่อหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในพื้นที่ 3 แต้ม โดยยืนขนานกับแป้นบาสและผู้ยิงประตูยืนห่างจากแป้นระยะทาง 7.24 เมตร
3. เพื่อหามุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในตำแหน่งจุดโทษ โดยยืนขนานกับแป้นบาสและผู้ยิงประตูยืนห่างจากแป้นระยะทาง 4.57 เมตร

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบมุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในระยะ 2 แต้ม โดยยืนขนานกับแป้นบาสและผู้ยิงประตูยืนห่างจากแป้นระยะทาง 3.66 เมตร
2. ทราบมุมปล่อยบอลที่เหมาะสมระยะ 3 แต้ม โดยยืนขนานกับแป้นบาสโดยยืนขนานกับแป้นบาสและผู้ยิงประตูยืนห่างจากแป้นระยะทาง 7.24 เมตร
3. ทราบมุมปล่อยบอลที่เหมาะสมในระยะจุดโทษ โดยยืนขนานกับแป้นบาสและผู้ยิงประตูยืนห่างจากแป้นระยะทาง 4.57 เมตร

1.4 ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

1. นักกีฬาบาสเกตบอลหญิงที่มีความสูง 165 เซนติเมตร
2. ตัวแปรที่ใช้ในการศึกษา คือ ความเร็ว ส่วนสูงของผู้ทำการยิงประตู ระยะทางระหว่างผู้ยิงประตูจนถึงห่วงของแป้นบาส เพศหญิง ความเร็วในการปล่อยบอล

1.5 ขั้นตอนการดำเนินการของการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาการใช้โปรแกรม Geogebra
2. ตั้งกล้องถ่ายคลิปีวิดีโอการยิงประตูบาสเกตบอลทั้งสามตำแหน่ง
3. นำคลิปีวิดีโอมาสังเกตตำแหน่งของลูกบาส แล้วจับภาพจากวิดีโอ
4. นำรูปภาพที่ได้มาใส่ลงในโปรแกรม Geogebra
5. ศึกษาสมการพาราโบลาและสมการเส้นสัมผัสเพื่อที่จะนำมาวาดกราฟในโปรแกรม Geogebra
6. สรุปผลการดำเนินการ
7. จัดทำรูปเล่ม

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทความรู้พื้นฐานนี้ เราจะกล่าวถึงประวัติโดยย่อและความเป็นมาของกีฬาบาสเกตบอล การยิงประตูบาสเกตบอลระยะต่างๆในสนามบาสเกตบอล การเล่นบาสเกตบอล ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องในงานค้นคว้าอิสระนี้ และการใช้โปรแกรม Geogebra เบื้องต้น

2.1 กติกาบาสเกตบอล

2.1.1 บาสเกตบอลเป็นการเล่นโดยทีม 2 ทีม แต่ละทีมมีผู้เล่น 5 คน จุดมุ่งหมายของแต่ละทีม คือการทำคะแนนฝั่งห่วงตาข่ายของฝ่ายตรงข้าม และขณะเดียวกันป้องกันฝ่ายตรงข้ามไม่ให้ทำคะแนนฝั่งห่วงตาข่ายของตนเอง การแข่งขันถูกควบคุมโดยผู้ตัดสิน เจ้าหน้าที่โต๊ะ และผู้ควบคุมการแข่งขัน (ถ้ามี)

2.1.2 ห่วงตาข่ายที่ทีมหนึ่งรุกไปทำคะแนน คือห่วงตาข่ายฝ่ายตรงข้าม และจะเรียกห่วงตาข่ายที่ทีมหนึ่งป้องกันไม่ให้ฝ่ายตรงข้ามทำคะแนน คือห่วงตาข่ายทีมตนเอง

2.1.3 ทีมที่มีคะแนนมากกว่าเมื่อสิ้นสุดเวลาการแข่งขัน จะเป็นผู้ชนะการแข่งขัน

2.1.4 การแข่งขันบาสเกตบอลจะประกอบด้วย 4 ช่วงเวลา ช่วงเวลาละ 10 นาที

2.1.5 การแข่งขันบาสเกตบอลจะต้องมีช่วงพักการแข่งขัน 2 นาที ระหว่างช่วงเวลาที่หนึ่ง กับ ช่วงเวลาที่สอง ในครั้งแรกและระหว่างช่วงเวลาที่สามกับช่วงเวลาที่สี่ในครึ่งหลังและก่อนแต่ละช่วงการต่อเวลาพิเศษ

2.1.6 การแข่งขันบาสเกตบอลจะต้องมีช่วงพักครึ่งเวลาการแข่งขัน 15 นาที

2.1.7 ถ้าคะแนนเท่ากันเมื่อหมดเวลาการแข่งขันของช่วงเวลาที่สี่ การแข่งขันจะต้องดำเนินต่อไปด้วยการต่อเวลาเป็นเวลา 5 นาที จนกว่าจะมีฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งมีแต้มมากกว่าอีกฝ่ายหนึ่ง

2.1.8 การให้คะแนนแก่ทีมที่รูกห่วงตาข่ายของฝ่ายตรงข้าม ซึ่งลูกบอลได้ลงห่วงตาข่าย ดังนี้ :

ประตูที่ได้ปล่อยจากการโยนโทษ นับ 1 คะแนน ประตูที่ได้ปล่อยจากเขตพื้นที่ 2 คะแนน นับ 2 คะแนน ประตูที่ได้ปล่อยจากเขตพื้นที่ 3 คะแนน นับ 3 คะแนนและหลังจากลูกบอลได้สัมผัสห่วงจากการโยนโทษครั้งสุดท้ายหรือครั้งเดียว แล้วลูกบอลถูกสัมผัสอย่างถูกต้องโดยผู้เล่นฝ่ายรุก หรือฝ่ายป้องกัน ก่อนที่ลูกบอลจะลงห่วงให้นับประตุนั้นเป็น 2 คะแนน

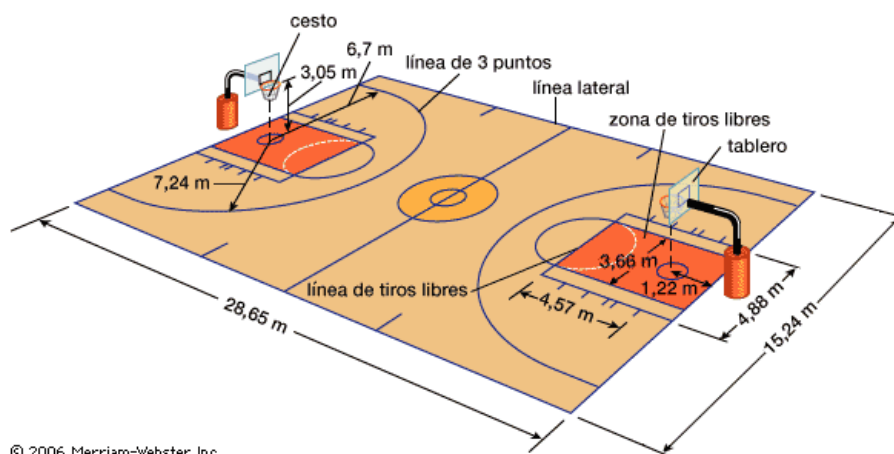
2.1.9 ถ้าผู้เล่นทำคะแนนโดยการยิงประตูลงห่วงตาข่ายของทีมเขาเอง ให้นับประตูเป็น 2 คะแนน

และจะบันทึกเป็นการทำคะแนน โดยหัวหน้าทีมตรงข้ามที่อยู่ในสนามแข่งขัน

2.1.10 ถ้าผู้เล่นเจตนาทำคะแนน โดยการยิงประตูลงห่วงตาข่ายของทีมเขาเอง ถือเป็นการทำผิดระเบียบ และไม่นับเป็นประตู

2.1.11 ถ้าผู้เล่นทำให้ลูกบอลทะลุผ่านห่วงตาข่ายจากด้านล่างขึ้นไปทั้งลูกถือเป็นการทำผิดระเบียบ

2.2 ขนาดของสนามบาสเกตบอลและแป้นบาส



© 2006 Merriam-Webster, Inc.

รูป 2.4 แสดงระยะห่างต่างๆในสนามบาสเกตบอล

อ้างอิง : <https://dunkswin9.com/ขนาดของสนามบาสเกตบอลและแป้นบาส>

2.2.1 ระยะ 3 คะแนน

ในเกมการแข่งขันบาสเกตบอลจะมีแบ่งระยะทำแต้มอยู่ 2 แบบ คือ มีเขตการทำแต้ม 2 คะแนนและ 3 คะแนน ซึ่งแต่ละที่จะเป็นเส้นครึ่งวงกลม โดยมีขนาดรัศมีมากกว่า 6.25 เมตร โดยวัดจากขอบนอกของเส้นครึ่งวงกลม ในสนามบาสจะมีเขต 3 วินาที โดยเขตนี้ ทีมที่เป็นฝ่ายบุกนั้น ห้ามยืนแช่ในเขตนี้ หากยืนแช่เกิน 3 วินาที จะผิดกติกา และเสียการครอบครองบอลโดยจุดที่กล่าวมาจะอยู่บริเวณ เขตโยนโทษ และเส้นโยนโทษไปถึงเส้นหลัง

2.2.2 ระยะและพื้นที่ของเส้นโทษ

ในเขตการยิงลูกโทษนั้นจะมีระยะทาง 4.57 เมตรจากเส้นโทษถึงห่วงของแป้นบาส การจะยิงลูกโทษของกีฬาบาสเกตบอลนั้น ทีมที่เป็นฝ่ายได้ลูกโทษ จะสามารถเข้ามายืนได้ 2 คน เพื่อคอยแย่งลูกหลัง

2.2.3 ห่วงบาส

ต้องมีความแข็งแรง โดยส่วนใหญ่นั้นห่วงจะทำขึ้นมาจากเหล็กตัน ซึ่งเหล็กตันนั้นมีความแข็งแรงอยู่แล้ว ห่วงมีความกว้างอยู่ที่ 45 เซนติเมตร ทาด้วยสีส้ม (ตามมาตรฐาน)

2.3 ความรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์

2.3.1 เส้นโค้ง (curve)

เส้นโค้งในปริภูมิ 3 มิติ นอกจากจะมีความสำคัญในตัวเองแล้วยังมักจะพบบ่อยในวิชากลศาสตร์คือเป็นเส้นทางการเคลื่อนไหวของวัตถุ และในแคลคูลัสเชิงอินทิกรัลของฟังก์ชันเวกเตอร์ ในระบบพิกัดฉาก เราอาจจะแทนเส้นโค้ง C โดยฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1)$$

เมื่อ t เป็นตัวแปรจริง

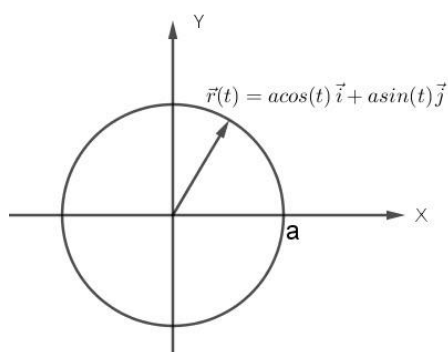
สำหรับค่า $t = t_0$ แต่ละค่าจะสมนัยกับจุด ๆ หนึ่งบนเส้นโค้ง C มีเวกเตอร์บอกตำแหน่งคือ $\vec{r}(t_0)$ มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่พิกัด $(0,0,0)$ และจุดปลายมีพิกัด $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

เรียกการแทนเส้นโค้งในสมการ (1) ว่า การแทนแบบอิงตัวแปรเสริม (parametric representation) เรียก t ว่า ตัวแปรเสริมหรือพารามิเตอร์ (parameter) การแทนชนิดนี้มีประโยชน์อย่างมาก เช่น ในวิชากลศาสตร์ตัวแปร t หมายถึงเวลา

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาฟังก์ชันเวกเตอร์ที่แทนวงกลม $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$

โดยการกำหนดให้ $x = a \cos t, y = a \sin t$ จะได้ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่แทนวงกลม คือ

$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



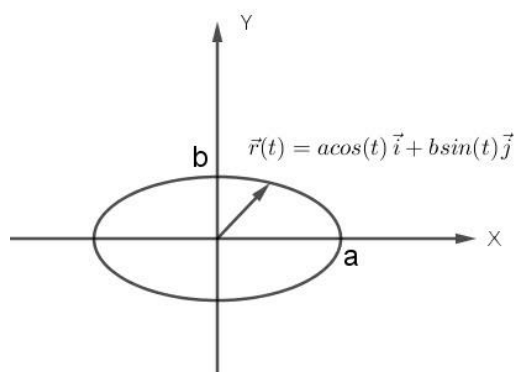
รูป 2.3.1 ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่แทนวงกลม

จากรูป a เป็นรัศมีของวงกลม และมีเวกเตอร์ $\vec{r}$ ที่ขึ้นอยู่กัตัวแปร t โดยที่ t ใดๆ จะมีพิกัดจุด (x, y) แล้วเมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{r}$ ก็จะทำให้เกิดเป็นวงกลม

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาฟังก์ชันเวกเตอร์ที่แทนวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$

กำหนดให้ $x = a \cos t, y = b \sin t$ จะได้ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่แทนวงรี คือ

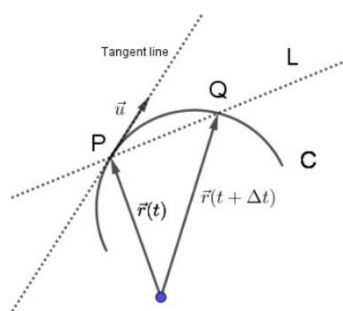
$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



รูป 2.3.2 ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่แทนวงรี

จากรูป a เป็นรัศมีในแนวแกน x และ b เป็นรัศมีในแนวแกน y และมีเวกเตอร์ $\vec{r}$ ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร t โดยที่ t ใดๆ จะมีพิกัดจุด (x, y) แล้วเมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{r}$ ก็จะทำให้เกิดเป็นวงรี

2.3.3 เวกเตอร์สัมผัสและความยาวส่วนโค้ง L



รูป 2.3.3 แสดงเวกเตอร์สัมผัส ($\vec{u}$) ณ จุด P

สมมติเส้นโค้ง C ถูกแทนโดยฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้และมีความต่อเนื่องทุกๆ ค่า t เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม

ถ้าให้จุด P สมนัยกับ t และจุด Q สมนัยกับ $t + \Delta t$ แล้วเส้นตรง L ที่ผ่านจุด P และจุด Q จะมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์

$$\frac{1}{\Delta t}[\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]$$

และอนุพันธ์ของ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดโดย

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]$$

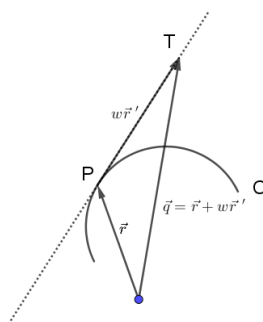
ถ้า $\vec{r}'(t)$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางเดียวกันกับเส้นสัมผัสต่อเส้นโค้ง C ที่จุด P และจะชี้ไปในทิศทางที่เกิดขึ้นจากการเพิ่มค่า t เพราะฉะนั้นทิศทางของเวกเตอร์สัมผัสจะขึ้นอยู่กับทิศทางของ C

เรียกเวกเตอร์ $\vec{r}'$ ว่า เวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) ของเส้นโค้ง C ที่จุด P เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{r}'$ แทนด้วย $\vec{u}$ กำหนดโดย

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{r}'|} \vec{r}'$$

เรียก $\vec{u}$ ว่า เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (Unit tangent vector) ต่อเส้นโค้ง C ที่จุด P

2.3.4 สมการเส้นสัมผัสในรูปเวกเตอร์



รูป 2.3.4 แสดงเวกเตอร์เส้นสัมผัส $\vec{r}'$

ให้ C เป็นเส้นโค้งที่แทนโดยเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ และ P เป็นจุดใดๆ บนเส้นโค้ง C ถ้าให้ T เป็นจุด หนึ่งบนเส้นสัมผัสเส้น C ที่จุด P โดยมี $\vec{q}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง แล้ว $\vec{q}$ จะเป็นผลบวกของเวกเตอร์ $\vec{r}$ และเวกเตอร์ในทิศทางของเส้นสัมผัส ดังรูป 2.5.4 ดังนั้น การแทนแบบอิงตัวแปรเสริมของเส้นสัมผัสจะอยู่ในรูป

$$\vec{q}(w) = \vec{r} + w\vec{r}' \quad (2)$$

เมื่อทั้ง $\vec{r}$ และ $\vec{r}'$ ขึ้นอยู่กับจุด P และ w เป็นตัวแปรเสริมมีค่าเป็นจำนวนจริง (ดูรูป 2.3.4 ประกอบ)

ตัวอย่าง 2.3.4 จงหาสมการรูปเวกเตอร์สัมผัสต่อวงรี $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ที่จุด $P: (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

วิธีทำ กำหนดให้ $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$

การแทนแบบอิงตัวแปรเสริมของวงรี จะได้

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$$

ดังนั้น

$$\vec{r}'(t) = -2 \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$$

ที่จุด $P(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ มี $2 \cos t = \sqrt{2}$ และ $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $t = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น เวกเตอร์สัมผัสที่จุด P คือ $\vec{r}'(t) = [-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

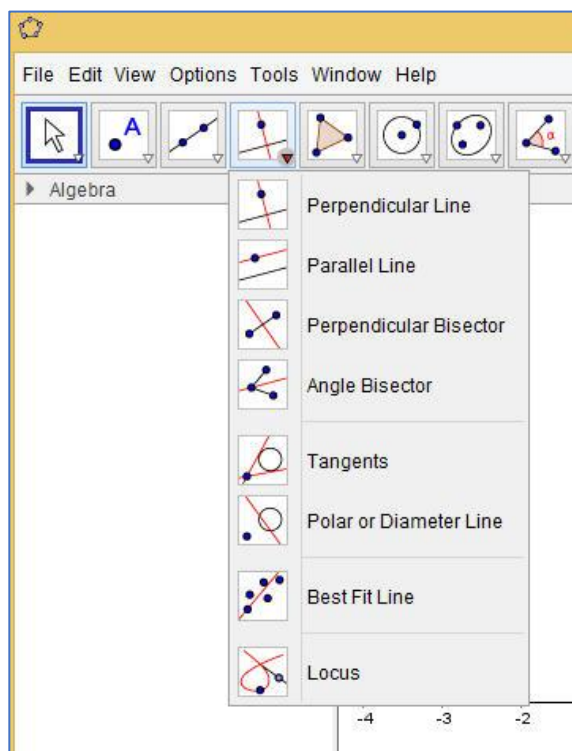
และการแทนแบบอิงตัวแปรเสริมของเส้นสัมผัสที่จุด P คือ

$$\begin{aligned} \vec{q}(w) &= \vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) + w \vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + w \left[-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ &= \sqrt{2}(1-w)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+w)\vec{j} \end{aligned}$$

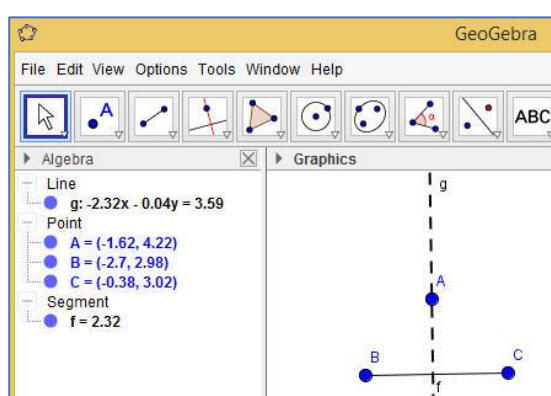
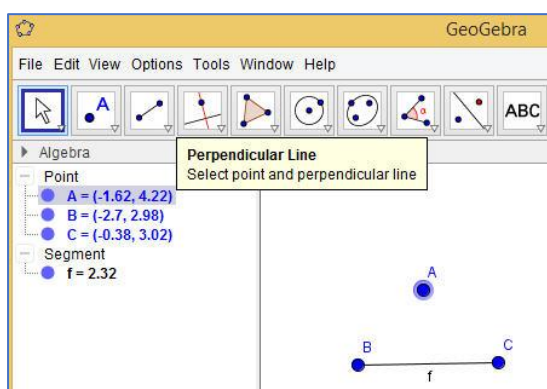
2.4 การใช้โปรแกรม GeoGebra เบื้องต้น

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์เพื่อช่วยให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น อีกทั้งยังช่วยให้เข้าใจนิยามบางนิยามของคณิตศาสตร์มากขึ้นอีกด้วย

จุดเด่นของโปรแกรมนี้นี้คือมีลักษณะการใช้งานทางคณิตศาสตร์ได้หลากหลายรูปแบบเช่น ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ (3D Graphics) การใส่ข้อมูลเป็นตาราง (Spreadsheet) การใช้คำสั่งการคำนวณทางคณิตศาสตร์ (Input Bar) เป็นต้น ในการสร้างพื้นฐานเราจะใช้เมนูต่าง ๆ ที่ซ่อนอยู่ในปุ่มกดแต่ละปุ่มโดยที่มุมล่างขวาของแต่ละปุ่มจะมีคำแนะนำในการสร้างแสดงออกมา ตัวอย่างเช่น ปุ่มของการสร้างเส้นตั้งฉาก



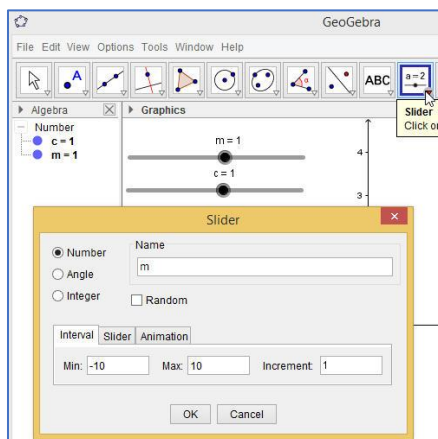
ในการสร้างแต่ละครั้ง จะต้องทราบนิยามหรือวัตถุที่จะใช้สร้างชิ้นงานนั้น ๆ เช่นหากเราต้องการสร้างเส้นตั้งฉาก เราจะต้องมีจุด 1 จุดที่เส้นตั้งฉากผ่านและวัตถุตรง 1 เส้นที่ต้องการให้เส้นของเราตั้งฉากด้วย



ดังรูปภาพเรามีจุด A และ เส้นตรง BC แล้วคลิกคำสั่งเส้นตั้งฉาก จากนั้นคลิกที่จุด A กับเส้นตรง BC ก็จะได้เส้นตั้งฉากออกมา

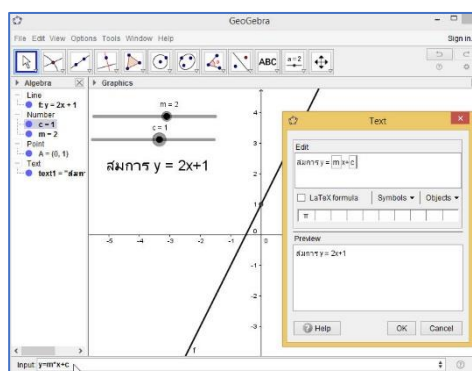
การสร้างสมการเส้นตรง

1. ไปที่ปุ่มเมนู Slider (a = 2) สร้าง Slider ขึ้นมา 2 ขึ้นตั้งชื่อว่า m และ c ใส่ขอบเขตและการเพิ่มขึ้นของ Slider ตามต้องการ เช่น Min : -10 , Max : 10 , Increment : 1



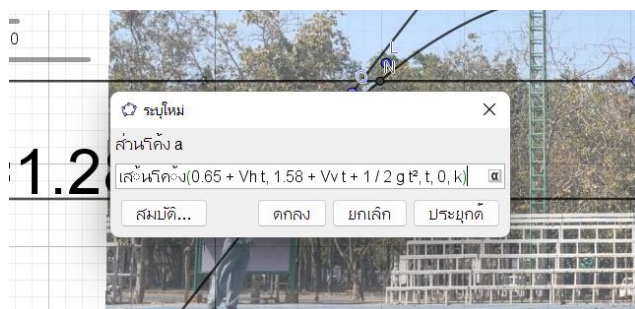
2. ในช่อง Input ให้พิมพ์ $y = m \cdot x + c$ จะเกิดกราฟขึ้นดังรูป

คลิกขวาที่กราฟปรับเปลี่ยนสีแบบชนิดของกราฟได้ตามต้องการเพิ่มข้อความ โดยใช้ปุ่มสร้างข้อความ พิมพ์สมการ $y =$ คลิกค่า m พิมพ์ $x +$ คลิกค่า c

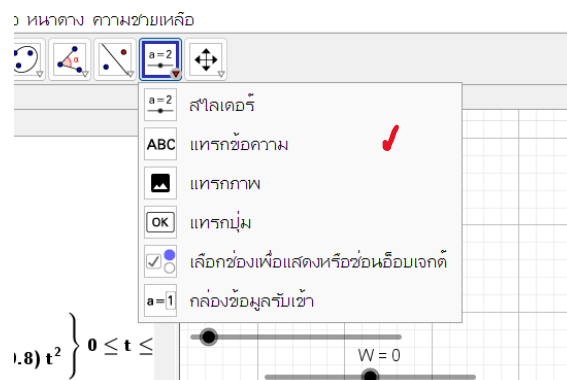


การสร้างเส้นโค้ง

1. การสร้างเส้นโค้ง เราจะใช้คำสั่ง เส้นโค้ง (นิพจน์, นิพจน์, นิพจน์, ตัวแปรพารามิเตอร์, ค่าเริ่มต้น, ค่าสิ้นสุด) โดยที่นิพจน์เหล่านั้นเป็นสมการที่เคยพิมพ์ไว้จากค่านำเข้าแล้ว

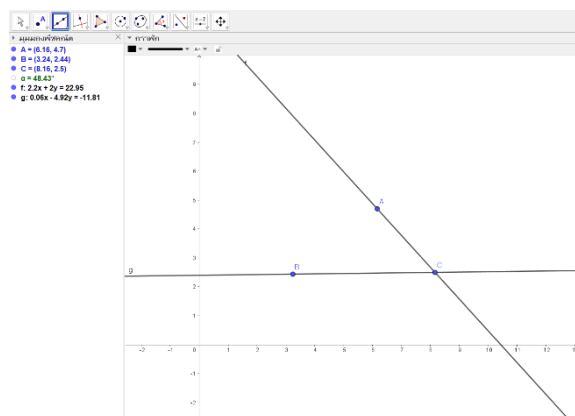


การแทรกข้อความ

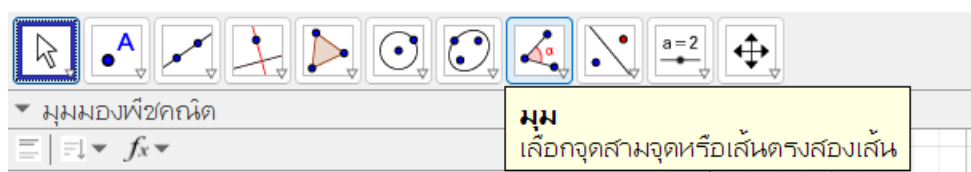


การสร้างมุม

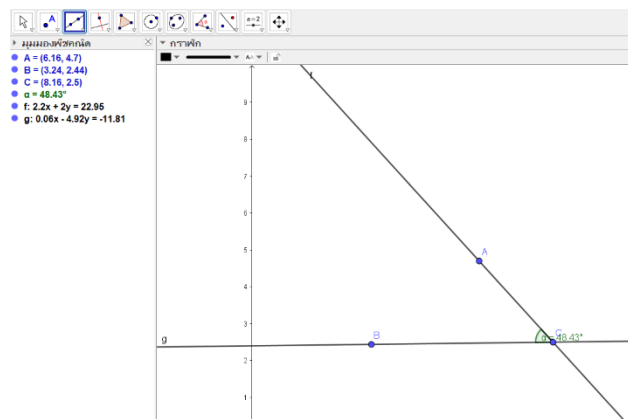
1. ก่อนอื่นเลยเราต้องมีจุดสามจุด เพื่อที่จะสร้างมุมได้



2. เลือกคำสั่ง มุม

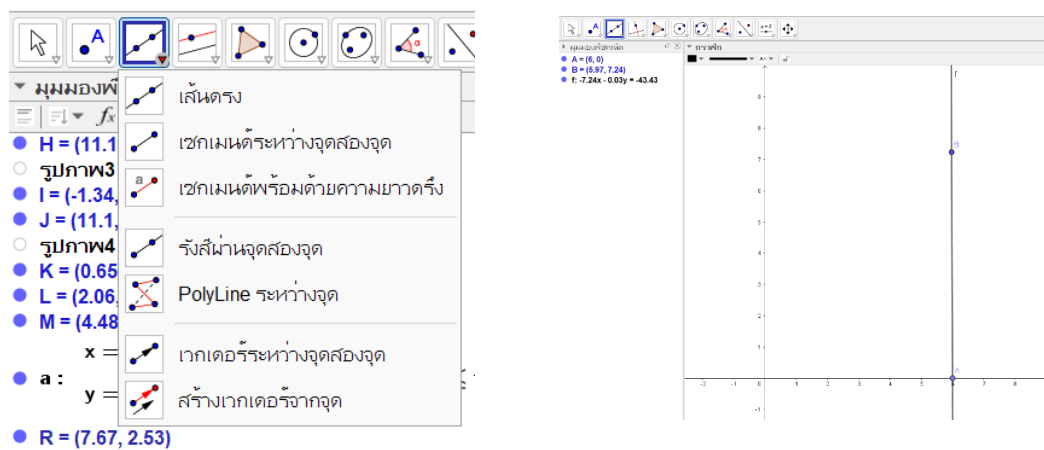


3. กดที่จุดสามจุด ก็จะได้มุมที่ต้องการออกมา

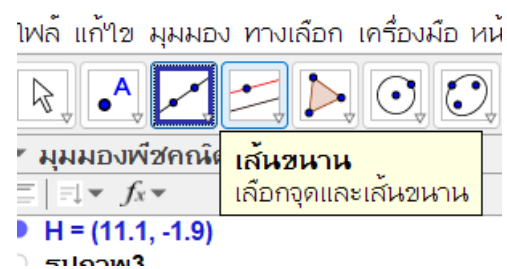


การสร้างเส้นขนานแกน

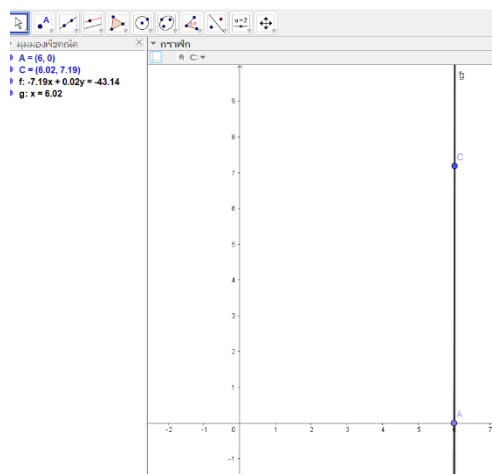
1. ก่อนจะสร้างเส้นขนานเราจะต้องมีเส้นตรง



2. เมื่อเราได้เส้นตรงแล้ว ให้ไปที่เมนูเส้นขนาน



3. เลือกจุดของเส้นตรงกับเส้นที่ต้องการจะขนาน



บทที่ 3

วิธีการดำเนินโครงการ

วิธีการดำเนินงานค้นคว้าอิสระนี้เริ่มต้นจากการตั้งกล้องถ่ายคลิปีวิดีโอการยิงประตูบาสเกตบอล ณ สนามกีฬากลาง มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยการตั้งกล้องถ่ายนี้ เราใช้ขาตั้งกล้องถ่ายโดยที่ทุกๆ มุมกล้องอยู่จุดเดียวกัน แล้วผู้ยิงประตูเป็นผู้หญิงที่มีความสูง 165 เซนติเมตร โดยยืนขนานกับแป้นบาสเกตบอลทั้งสามระยะ นั่นคือ ระยะ 2 แต้ม ระยะ 3 แต้ม และระยะจุดโทษ ในระยะ 2 แต้ม ระยะทางจากผู้ทำแต้มถึงห่วงของแป้นบาส มีระยะทาง 3.66 เมตร ในระยะ 3 แต้ม ระยะทางจากผู้ทำแต้มถึงห่วงของแป้นบาส มีระยะทาง 7.24 เมตร และในระยะจุดโทษ ระยะทางจากผู้ทำแต้มจนถึงห่วงของแป้นบาส มีระยะทาง 4.57 เมตร แล้วนำคลิปีวิดีโอที่ได้นี้มาทำเป็นรูปภาพ แล้วนำมาวิเคราะห์ในโปรแกรม Geogebra

3.1 สมการเส้นโค้งในรูปเวกเตอร์

การยิงประตูบาสเกตบอลเป็นการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบ 2 มิติ คือ เคลื่อนที่ในระดับและแนวตั้งพร้อมกัน ในแนวตั้งเป็นการเคลื่อนที่ที่มีความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ในขณะที่แนวราบไม่มีความเร่งเพราะไม่มีแรงกระทำในแนวระดับ

แรงลัพธ์ในแนวระดับที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ แสดงว่า วัตถุจะมีความเร็วในแนวระดับเป็นค่าคงตัว สามารถคำนวณระยะห่างระหว่างห่วงของแป้นบาสกับลูกบาสเกตบอลได้จากสูตร

$$L = v_x t \quad (3)$$

เนื่องจากแรงลัพธ์ในแนวตั้งที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเท่ากับ mg (m คือ มวลของลูกบาสเกตบอล) แสดงว่า วัตถุจะมีความเร่งของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งมีทิศลงเป็น g สามารถคำนวณระยะห่างระหว่างห่วงของแป้นบาสกับลูกบาสเกตบอลได้จากสูตร

$$h = v_y t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

โดยที่ L = ระยะห่างระหว่างห่วงของแป้นบาสกับลูกบาสเกตบอลในแนวระดับ (m)

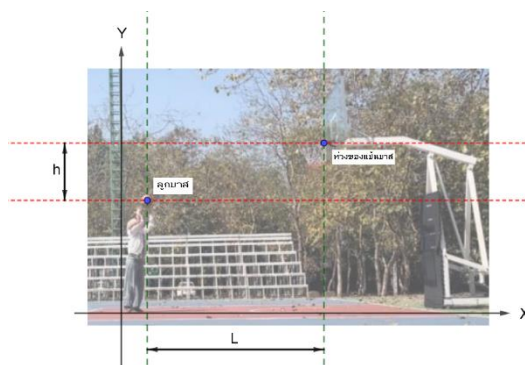
t = เวลา (s)

h = ระยะห่างระหว่างห่วงของแป้นบาสกับลูกบาสเกตบอลในแนวตั้ง (m)

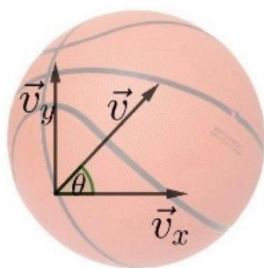
v_y = ความเร็วในแนวแกน y (m/s)

v_x = ความเร็วในแนวแกน x (m/s)

$g = -9.8 \quad (m / s^2)$



รูป 3.1.1 แสดงระยะห่างระหว่างห่วงของแป้นบาสกับลูกบาสเกตบอลในแนวระดับและในแนวตั้ง



รูปที่ 3.1.2 แสดงแรงที่กระทำ ($\vec{v}$)

จากรูป 3.1.2 กำหนดให้ $|\vec{v}| = v_0$

ดังนั้น $|\vec{v}_x| = |\vec{v}| \cos(\theta) = v_0 \cos(\theta)$ (5)

และ $|\vec{v}_y| = |\vec{v}| \sin(\theta) = v_0 \sin(\theta)$ (6)

นำสมการที่ (3) มาแทนในสมการที่ (5) และนำสมการที่ (4) มาแทนในสมการที่ (6) จะได้ว่า

$$L = v_0 \cos(\theta)t \quad (7)$$

$$h = v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

จากสมการที่ (7) เราสามารถหา t ได้เป็น

$$t = \frac{L}{v_0 \cos(\theta)} \quad (9)$$

สำหรับเส้นโค้งในระบบพิกัดฉากเราสามารถแทนเส้นโค้งด้วยการแทนแบบอิงตัวแปรเสริมในหัวข้อ 2.3 ด้วยฟังก์ชัน $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ เมื่อแทนค่า $x(t) = L$ จากสมการที่ (7) และ $y(t) = h$ จากสมการที่ (8) เราจะได้ฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = L\vec{i} + h\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos(\theta)t\vec{i} + ((v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2))\vec{j}$$

3.2 สมการเส้นสัมผัสในรูปของเวกเตอร์

กำหนดให้ $x = v_0 \cos(\theta)t$, $y = v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2$ จะได้ฟังก์ชันเวกเตอร์ คือ

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos(\theta)t\vec{i} + ((v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2))\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos(\theta)t\vec{i} + ((v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2))\vec{j}$$

แล้วทำการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{r}$ เทียบ t ได้เป็น

$$\vec{r}'(t) = v_0 \cos(\theta)\vec{i} + (v_0 \sin(\theta) + gt)\vec{j}$$

ต่อไปเราจะหาเวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้ง ที่จุด A

กำหนด A เป็นจุดบนเส้นโค้ง มีพิกัดเป็น (x_A, y_A) จากสมการที่ (9) เราจะได้ว่า

$$t_A = \frac{x_A}{v_0 \cos(\theta)}$$

เป็นเวลาที่ลูกบอลอยู่ในตำแหน่ง ณ จุด A บนเส้นโค้ง และเราจะได้ว่า ณ เวลา t_A จะมีเวกเตอร์สัมผัส คือ

$$\vec{r}'(t_A) = v_0 \cos(\theta)\vec{i} + (v_0 \sin(\theta) + gt_A)\vec{j}$$

จากในหัวข้อ 2.5.4 ที่ได้กล่าวมาข้างต้น เราจะได้สมการแทนแบบอิงตัวแปรเสริมของเส้นสัมผัส ณ จุด A คือ

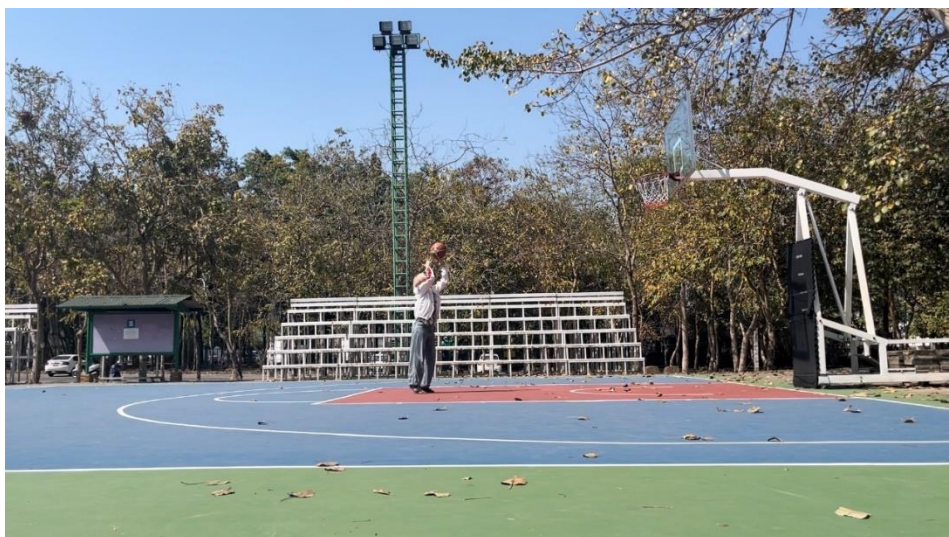
$$\begin{aligned} \vec{q}(w) &= \vec{r} + w\vec{r}' \quad A \\ &= (v_0 \cos(\theta))t_A\vec{i} + ((v_0 \sin(\theta)t_A + \frac{1}{2}gt_A^2))\vec{j} + w(v_0 \cos(\theta)\vec{i} + (v_0 \sin(\theta) + gt_A)\vec{j}) \\ &= (v_0 \cos(\theta))t_A\vec{i} + ((v_0 \sin(\theta)t_A + \frac{1}{2}gt_A^2))\vec{j} + w(v_0 \cos(\theta)\vec{i} + (v_0 \sin(\theta) + gt_A)\vec{j}) \\ &= (v_0 \cos(\theta)t_A + w(v_0 \sin(\theta)))\vec{i} + (v_0 \sin(\theta)t_A + w(v_0 \sin(\theta) + \frac{1}{2}gt_A^2 + w(gt_A)))\vec{j} \\ &= v_x(t_A + w)\vec{i} + (v_y(t_A + w) + g(\frac{1}{2}t_A^2 + wt_A))\vec{j} \end{aligned}$$

เมื่อ $\vec{r}$ และ $\vec{r}'$ ขึ้นอยู่กับจุด A และ w เป็นตัวแปรเสริมที่มีค่าเป็นจำนวนจริง

3.3 การวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม Geogebra

ขั้นตอนที่ 1 อัปเดตวิดีโอ

- ระยะสองแต้ม



ระยะห่างที่ผู้ยิงประตูยืนห่างจากห่วงของแป้นบาส มีระยะทาง 3.66 เมตร และยืนขนานกับแป้นบาส

- ระยะสามแต้ม



ระยะห่างที่ผู้ยิงประตูยืนห่างจากห่วงของแป้นบาส มีระยะทาง 7.24 เมตร และยืนขนานกับแป้นบาส

- ระยะจุดโทษ



ระยะห่างที่ผู้ยิงประตูยืนห่างจากห่วงของแป้นบาส มีระยะทาง 4.57 เมตร และยืนขนานกับแป้นบาส

ขั้นตอนที่ 2 นำรูปจากวิดีโอมาใส่ในโปรแกรม Geogebra ณ มุมกล้องเดียวกันทั้งสามระยะ

- ระยะ 2 แฉม



รูป 3.3.2 ตำแหน่งของลูกบอลในระยะสองแฉม

จากรูป 3.3.2 ในระยะสองแต้มตำแหน่งที่ลูกอยู่ตรงจุดปล่อยบอล (บนซ้าย) ตำแหน่งที่ลูกอยู่บนอากาศ (บนขวาและล่างซ้าย) ตำแหน่งที่ลูกลงห่วง (ล่างขวา)

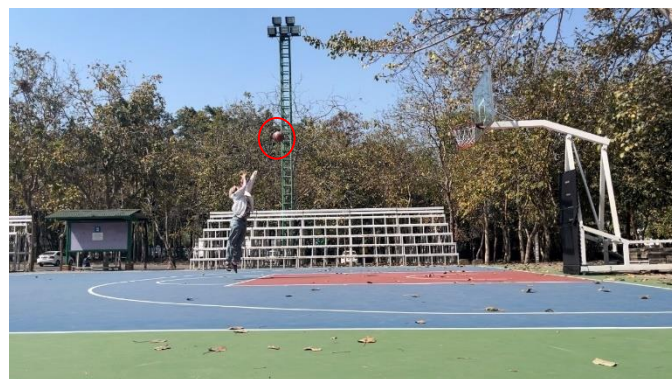
- ระยะ 3 แต้ม



รูป 3.3.3 ตำแหน่งของลูกบอลในระยะสามแต้ม

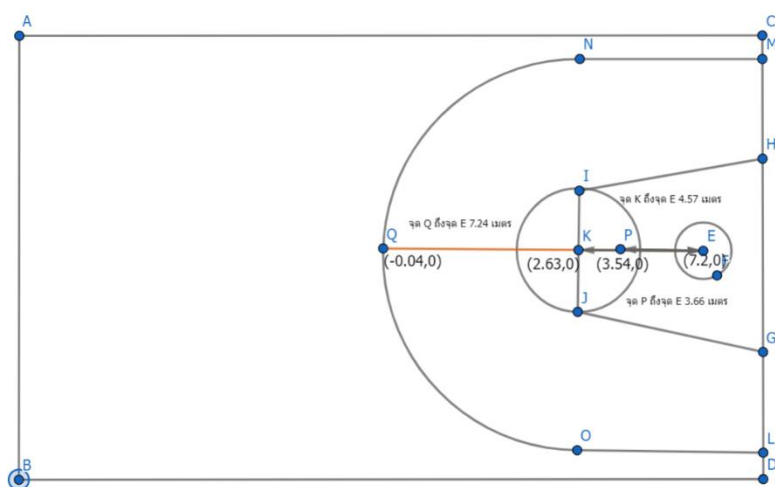
จากรูป 3.3.3 ในระยะสามแต้มตำแหน่งที่ลูกอยู่ตรงจุดปล่อยบอล (บนซ้าย) ตำแหน่งที่ลูกอยู่บนอากาศ (บนขวาและล่างซ้าย) ตำแหน่งที่ลูกลงห่วง (ล่างขวา)

- ระยะจุดโทษ



รูป 3.3.4 ตำแหน่งของลูกบอลในระยะจุดโทษ

จากรูป 3.3.4 ในระยะจุดโทษตำแหน่งที่ลูกอยู่ตรงจุดปล่อยบอล (บนซ้าย) ตำแหน่งที่ลูกอยู่บนอากาศ (บนขวาและล่างซ้าย) ตำแหน่งที่ลูกลงห่วง (ล่างขวา)



รูป 3.3.5 แสดงระยะของผู้ยิงประตูจนถึงห่วงของแป้นบาส

ขั้นตอนที่ 3 กำหนดจุดในโปรแกรม

โดย 1 หน่วยมีค่าเท่ากับ 1 เมตร

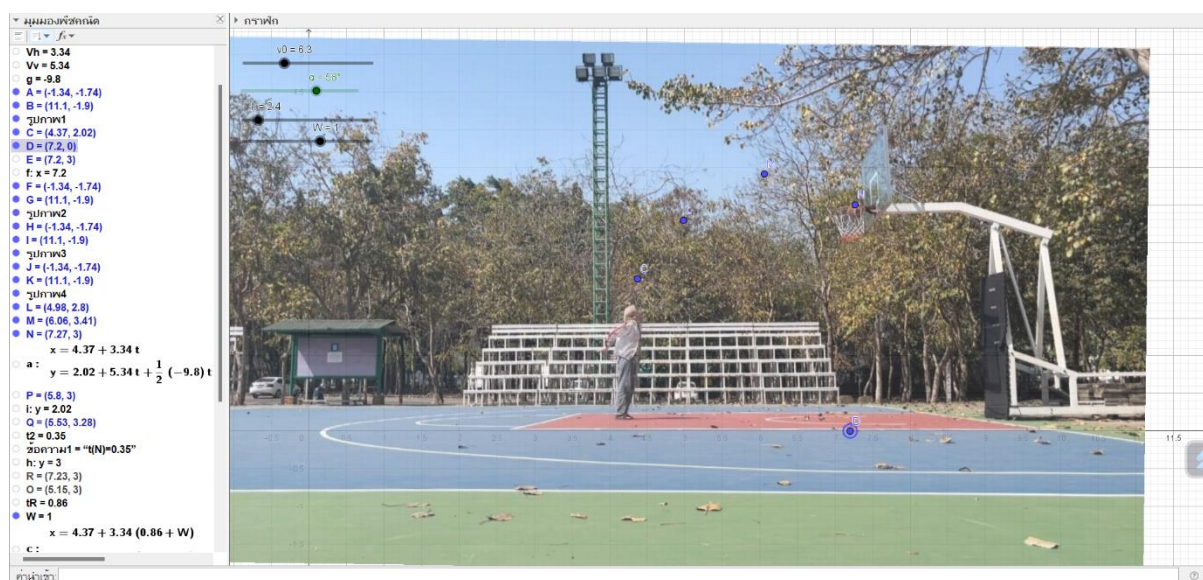
จากรูป 3.3.5 กำหนดพิกัดของห่วงบาสมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง (7.2,3)

พิกัดของผู้ยิงประตูระยะ 2 แต้ม (จุด P) ที่มีระยะทาง 3.66 เมตร เท่ากับ (3.54,0)

พิกัดของผู้ยิงประตูระยะ 3 แต้ม (จุด Q) ที่มีระยะทาง 7.24 เมตร เท่ากับ (-0.04,0)

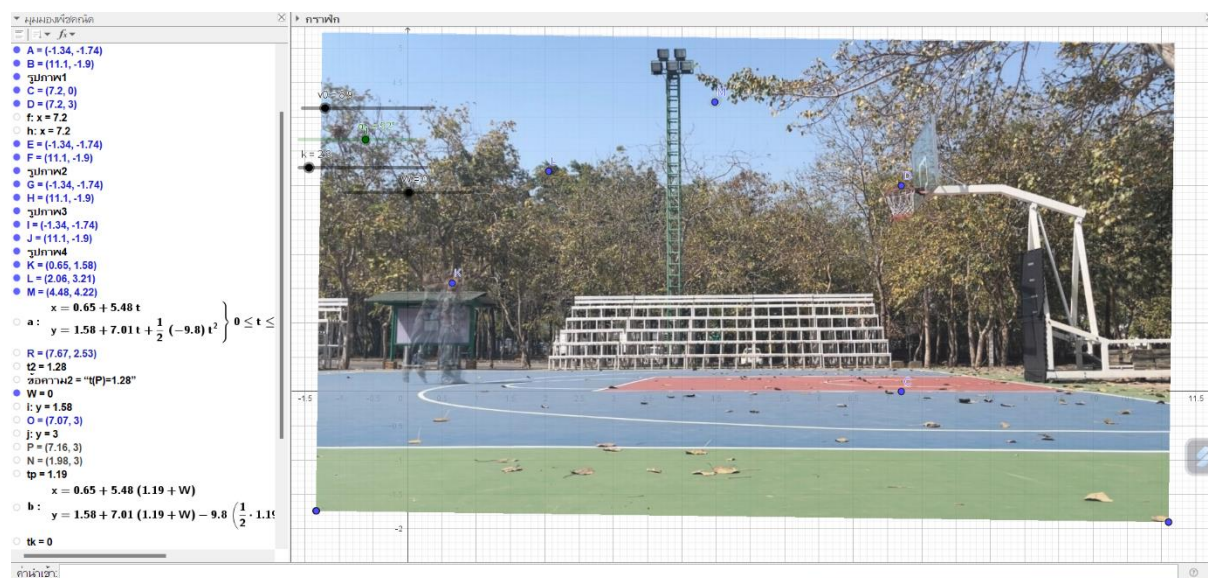
พิกัดของผู้ยิงประตูระยะจุดโทษ (จุด K) ที่มีระยะทาง 4.57 เมตร เท่ากับ (2.63,0)

- ระยะ 2 แต้ม



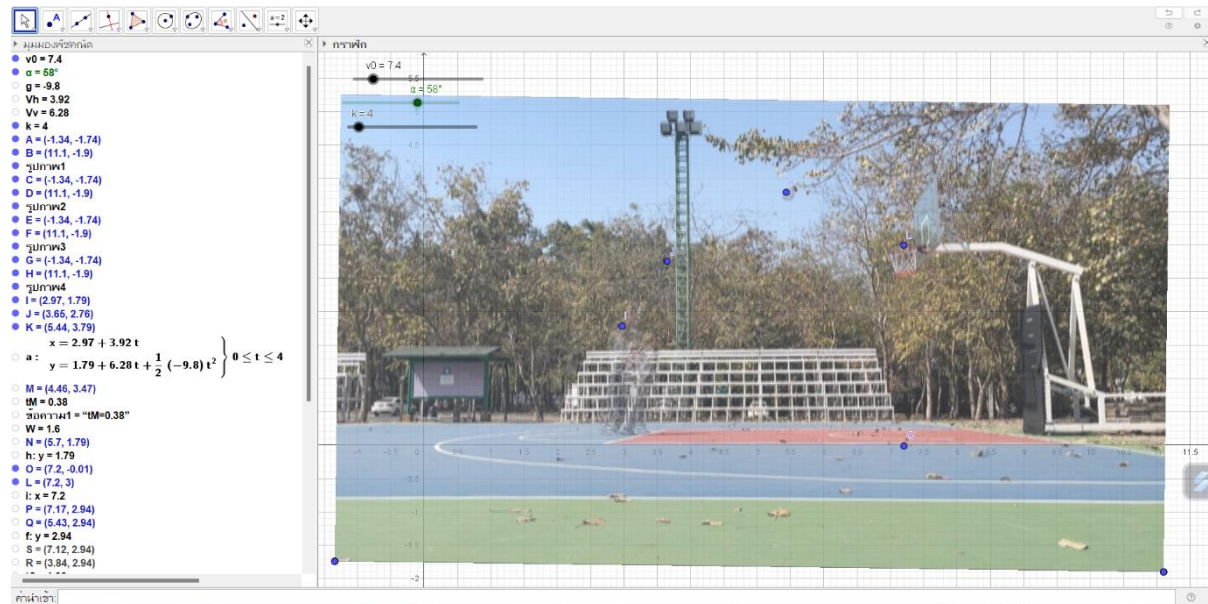
จากรูปจะเห็นว่าผู้ยิงประตูจะอยู่ที่พิกัด (3.54,0)

- ระยะ 3 แต้ม



จากรูปจะเห็นว่าผู้ยิงประตูจะอยู่ที่พิกัด (-0.04,0)

- ระยะจุดโทษ

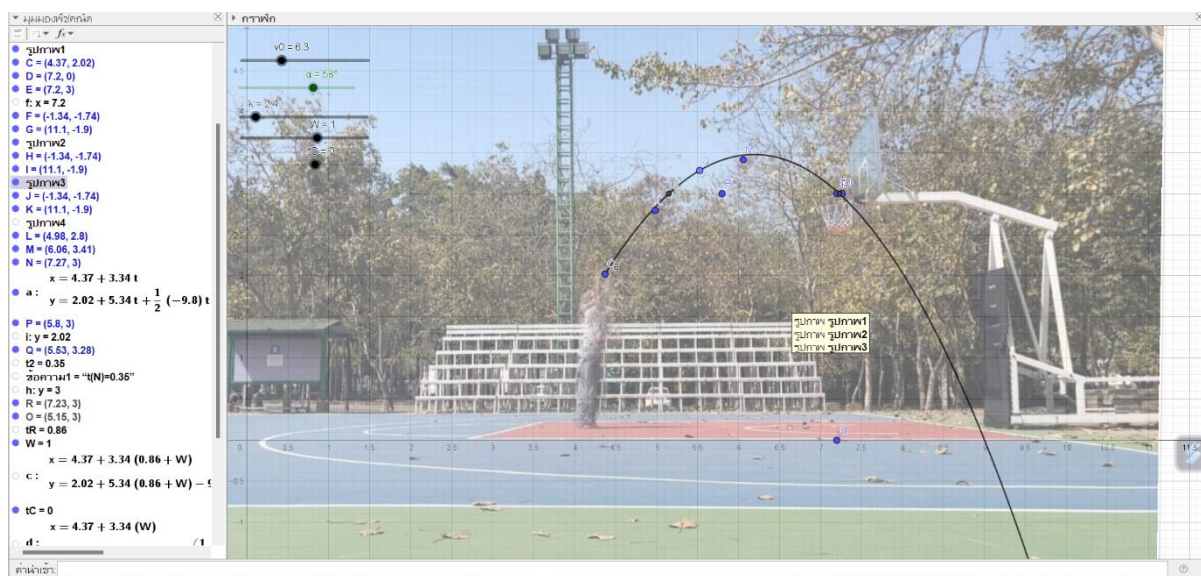


จากรูปจะเห็นว่าผู้ยิงประตูจะอยู่ที่พิกัด (2.63,0)

ขั้นตอนที่ 4 เขียนสมการเส้นโค้งลงโปรแกรม

- ระยะ 2 แต้ม จาก $\vec{r}(t) = [3.54 + v_0 \cos(\theta)t]\vec{i} + [2.02 + ((v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2)]\vec{j}$

นำไปเขียนในโปรแกรมและปรับค่าความเร็วกับมุมปล่อยบอลในโปรแกรม Geogebra เพื่อให้ตรงกับวิถีที่ลูกบอลเคลื่อนที่ จะได้ $v_0 = 6.9 \text{ m/s}$ มุมปล่อยบอล $\theta = 57.27^\circ$ โดยที่เรากำหนด $g = -9.8 \text{ m/s}^2$ ตำแหน่งที่ลูกลงห่วง (จุด A) จะมีค่า $t_A = 0.98 \text{ s}$



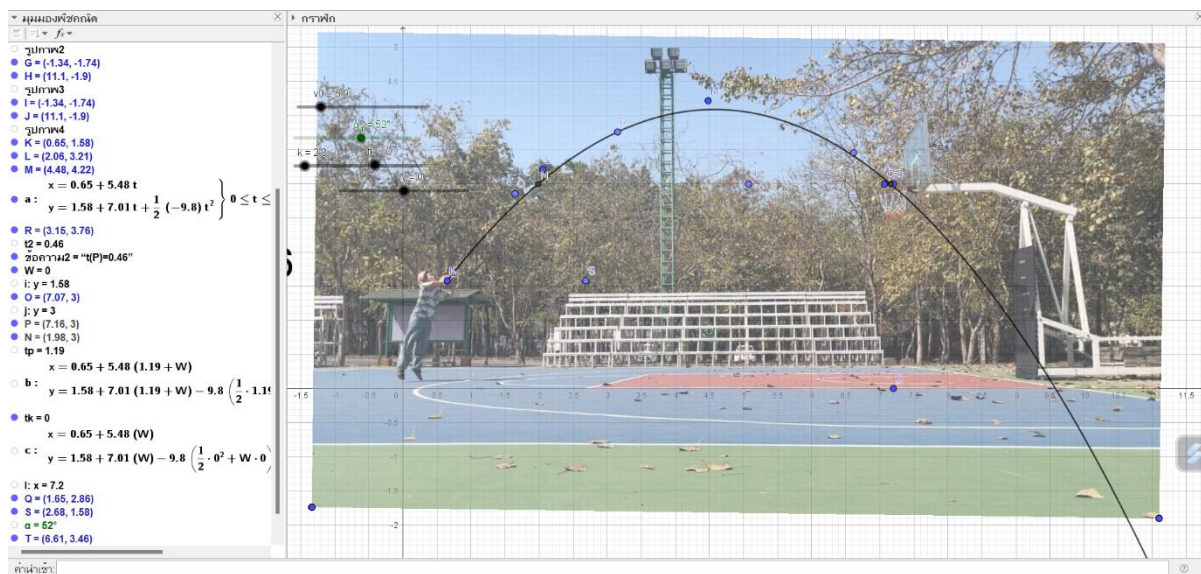
กรณีที่ $t = 0$ เมื่อเราแทน $t = 0$ ในสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ จะได้ว่า $\vec{r}(0) = 3.54\vec{i} + 2.02\vec{j}$

กรณีที่ $t = t_A$ เมื่อเราแทน $t = t_A$ ในสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ จะได้ว่า $\vec{r}(t_A) = 7.2\vec{i} + 3\vec{j}$

เนื่องจากตำแหน่งของกึ่งกลางห่วงอยู่ที่พิกัด (7.2,3) จึงทำให้ ณ เวลา $t = 0.89 \text{ s}$ ลูกบาสลงห่วงพอดี

- ระยะ 3 แต้ม จาก $\vec{r}(t) = [-0.04 + v_0 \cos(\theta)t]\vec{i} + [1.58 + ((v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2)]\vec{j}$

นำไปเขียนในโปรแกรมและปรับค่าความเร็วกับมุมปล่อยในโปรแกรม Geogebra เพื่อให้ตรงกับวิถีที่ลูกบอลเคลื่อนที่ จะได้ $v_0 = 9.3m/s$ มุมปล่อยบอล $\theta = 43.38^\circ$ โดยที่เรากำหนด $g = -9.8m/s^2$ และตำแหน่งที่ลูกลงห่วง (จุด A) จะมีค่า $t_A = 1.17s$



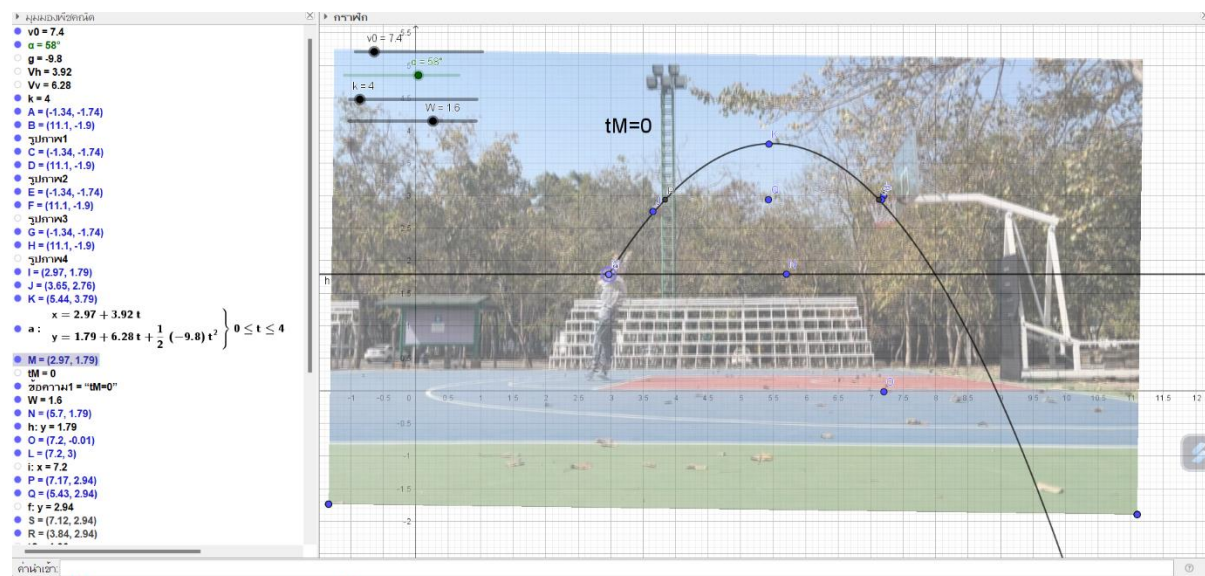
กรณีที่ $t = 0$ เมื่อเราแทน $t = 0$ ในสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ จะได้ว่า $\vec{r}(0) = -0.04\vec{i} + 1.58\vec{j}$

กรณีที่ $t = t_A$ เมื่อเราแทน $t = t_A$ ในสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ จะได้ว่า $\vec{r}(t_A) = 7.2\vec{i} + 3\vec{j}$

เนื่องจากตำแหน่งของกึ่งกลางห่วงอยู่ที่พิกัด (7.2,3) จึงทำให้ ณ เวลา $t = 1.17s$ ลูกบาสลงห่วงพอดี

- ระยะจุดโทษ จาก $\vec{r}(t) = [2.63 + v_0 \cos(\theta)t]\vec{i} + [1.79 + ((v_0 \sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2)]\vec{j}$

นำไปเขียนในโปรแกรมและปรับค่าความเร็วกับมุมปล่อยบอลในโปรแกรม Geogebra เพื่อให้ตรงกับวิถีที่ลูกบอลเคลื่อนที่ จะได้ $v_0 = 7.7m/s$ มุมปล่อยบอล $\theta = 58.35^\circ$ โดยที่เรากำหนด $g = -9.8m/s^2$ และตำแหน่งที่ลูกลงห่วง (จุด A) จะมีค่า $t_A = 1.13s$

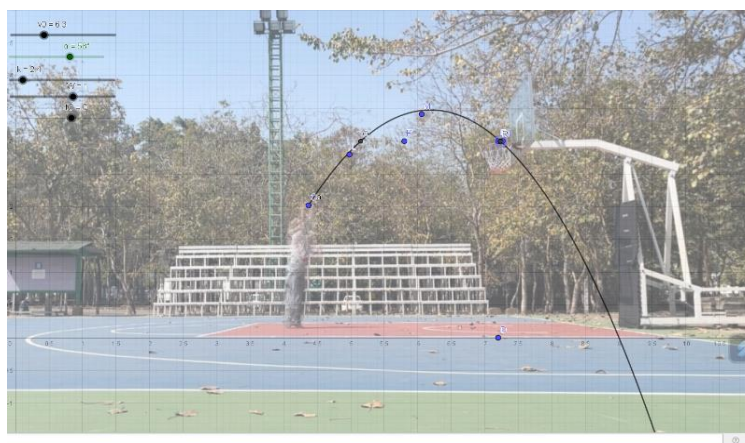


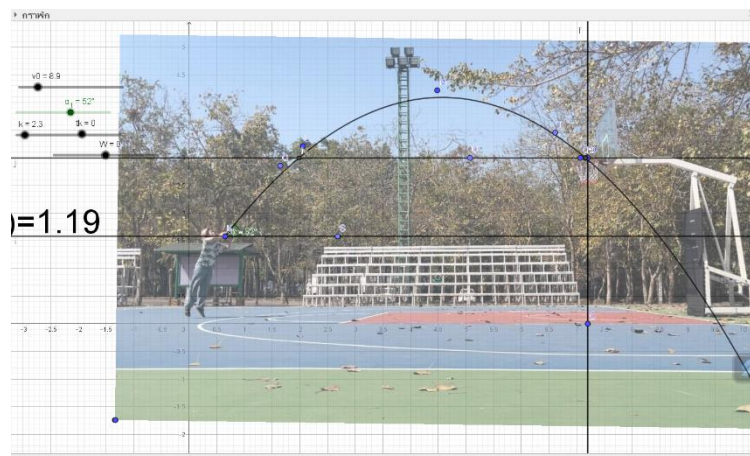
กรณีที่ $t = 0$ เมื่อเราแทน $t = 0$ ในสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ จะได้ว่า $\vec{r}(0) = 2.63\vec{i} + 1.79\vec{j}$

กรณีที่ $t = t_A$ เมื่อเราแทน $t = t_A$ ในสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ จะได้ว่า $\vec{r}(t_A) = 7.2\vec{i} + 3\vec{j}$

เนื่องจากตำแหน่งของกึ่งกลางห่วงอยู่ที่พิกัด (7.2,3) จึงทำให้ ณ เวลา $t = 1.13s$ ลูกบาสลงห่วงพอดี

ขั้นตอนที่ 5 สร้าง θ, v_0 และสามารถปรับ θ, v_0 ได้โดย คำสั่ง สไลด์



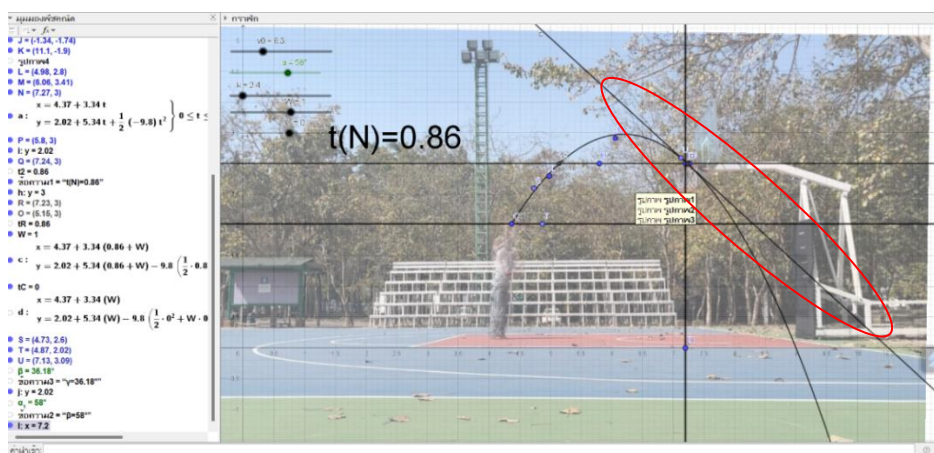


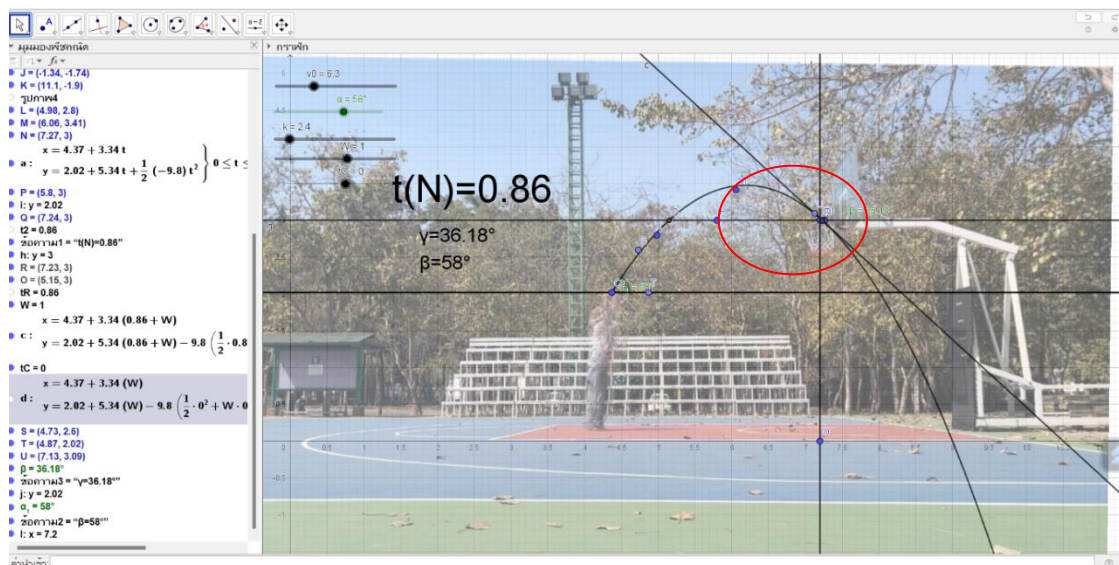
ขั้นตอนที่ 6 สร้างเส้นสัมผัส

จาก $\vec{q}(w) = v_x(t_A + w)\vec{i} + (v_y(t_A + w) + g(\frac{1}{2}t_A^2 + wt_A))\vec{j}$ ในหัวข้อ 3.2 เมื่อนำไปเขียน

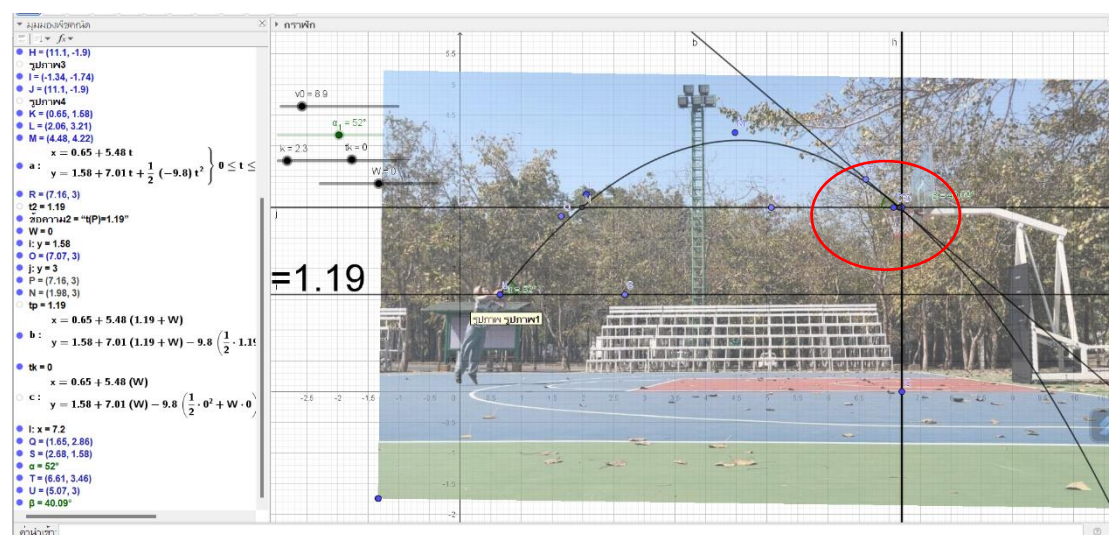
ในโปรแกรม Geogebra แล้ว จะได้เส้นสัมผัส ณ จุด A

- ระยะ 2 แท้ม

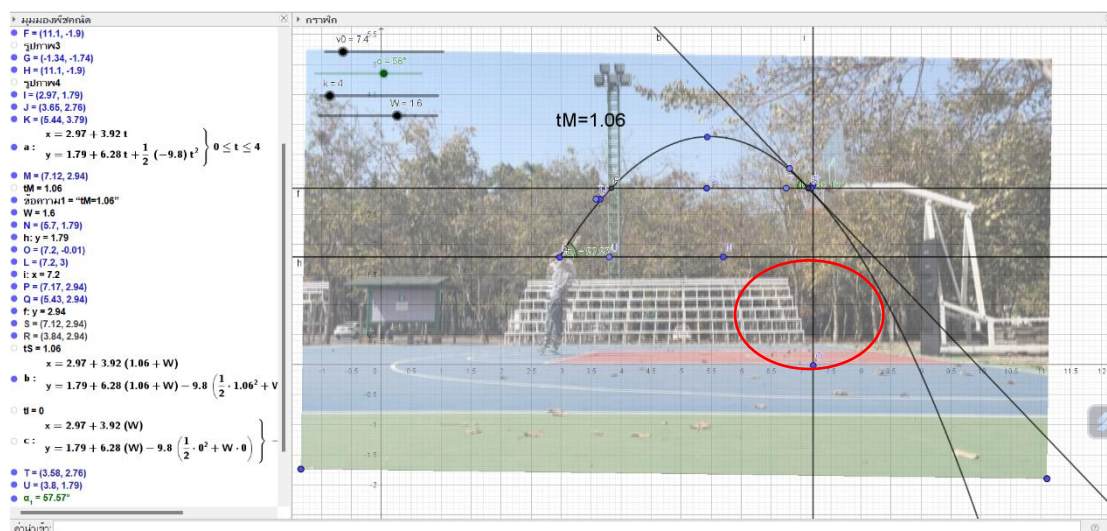




- **ระยะ 3 แด้ม** จุดที่เลือกในระยะสองแด้มคือ จุด U ซึ่งจุด U สร้างจากคำสั่งจุดแล้วนำไปวางบนเวกเตอร์สัมผัสที่ได้จากขั้นตอนที่ 6 จุด R คือจุดที่ตำแหน่งของลูกลงห่วง และ จุด P สร้างจากคำสั่งจุดแล้วนำไปวางบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ใช้คำสั่งมุมเพื่อทำการหามุมที่ลูกบอลกระทำกับห่วงของแป้นบาส มุม PRU ได้เป็น มุม $\beta = 34.81^\circ$



- **ระยะจุดโทษ** จุดที่เลือกในระยะสองแด้มคือ จุด T ซึ่งจุด T สร้างจากคำสั่งจุดแล้วนำไปวางบนเวกเตอร์สัมผัสที่ได้จากขั้นตอนที่ 6 จุด P คือจุดที่ตำแหน่งของลูกลงห่วง และ จุด U สร้างจากคำสั่งจุด แล้วนำไปวางบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ใช้คำสั่งมุมเพื่อทำการหามุมที่ลูกบอลกระทำกับห่วงของแป้นบาส มุม UPT ได้เป็น มุม $\beta = 47.96^\circ$



จากการนำสมการมาเขียนในโปรแกรม ก็จะได้ออกมาเป็นกราฟที่อยู่ในรูปพาราโบลา ซึ่งสมการที่เกิดเป็นกราฟพาราโบลานั้น มาจากสมการ (7) และ (8) ส่วนเส้นสัมผัส ณ จุดต่างๆแต่ละระยะในกราฟเกิดจากสมการเวกเตอร์เส้นสัมผัส นั่นคือ เวกเตอร์ $\vec{q}$ นั่นเอง

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

จากการศึกษามุมปล่อยลูกบาสเกตบอลทั้งสามระยะ ได้แก่ ระยะสองแฉ้ม ระยะสามแฉ้ม และระยะจุดโทษ โดยผู้หญิงที่มีความสูง 165 เซนติเมตร และยืนขนานกับแป้นบาสทั้งสามระยะ ซึ่งข้อจำกัดของงานค้นคว้านี้ก็คือ ผู้ยิงประตูเป็นเพศหญิงที่มีความสูง 165 เซนติเมตร ระยะในการยิงประตู และความเร็วที่ใช้ในการยิงประตู เป็นต้น สรุปได้มุมปล่อยบอลดังนี้

	ระยะในการยิงประตู (เมตร)	ความเร็วที่ใช้ (เมตรต่อวินาที)	มุมปล่อยบอล (องศา)	มุมที่ลูกบอลกระทำ กับห่วง บาสเกตบอล (องศา)
ระยะสองแฉ้ม	3.66	6.90	57.27	47.74
ระยะสามแฉ้ม	7.24	9.30	43.38	34.81
ระยะจุดโทษ	4.57	7.70	58.35	47.96

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

ในกรณีที่มีคู่ต่อสู้บังการยิงประตู ผู้ยิงประตูจะต้องเพิ่มความเร็วในการทำคะแนน แสดงว่ามุมปล่อยบอลก็ต้องมีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือผู้ยิงประตูจะต้องปล่อยบอลในลักษณะที่โด่งขึ้นจากเดิม แน่แน่นอนว่าการที่จะยิงให้ลูกโด่งขึ้นนั้นต้องใช้แรงเพิ่มขึ้น จะทำให้ความเร็วที่ปล่อยและมุมที่ปล่อยจะเปลี่ยนไปในทางที่เพิ่มขึ้น แล้วถึงจะทำให้บอลนั้นลงห่วง อย่างที่รู้กันว่าตามมาตรฐานเส้นผ่านศูนย์กลางของห่วงนั้นอยู่ที่ 45 เซนติเมตรนั้นคือมีรัศมี 22.5 เซนติเมตร ลูกบอลอาจจะลงกลางห่วงพอดีหรืออาจจะไม่ลงกลางห่วงพอดี แต่จะอยู่ในระยะที่ไม่เกินเส้นผ่านศูนย์กลางของห่วงอย่างแน่นอน

บรรณานุกรม

- [1] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, แคลคูลัสสำหรับวิศวกรรมศาสตร์ 3
- [2] Tuemaster,การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์,สืบค้น 9 มีนาคม 2566, จาก <https://tuemaster.com/>
- [3] Andrew Lang Joerg M Gablonsky, Boeing,(2005),Modeling Basketball Free Throws,Oral Roberts University From the SelectedWorks of Andrew Lang.
- [4] จีรวัดน์ สัทธรรม, (2555),ความแม่นยำในการยิงประตูบาสเกตบอลของนักกีฬาบาสเกตบอลชายในการแข่งขันกีฬาแห่งชาติครั้งที่ 40, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- [5] Educatepark, ประวัติบาสเกตบอล กติกาบาสเกตบอล ความเป็นมากีฬาบาสเกตบอล,สืบค้น 20 กุมภาพันธ์ 2566, จาก [/www.educatepark.com/story/history-of-basketball](http://www.educatepark.com/story/history-of-basketball)
- [6] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยพร ตั้งทอง, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, การใช้โปรแกรม Geogebra เบื้องต้น

ภาคผนวก



