

ปัญหาการปกคลุมด้วยวงกลมในบริเวณที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยวงกลม
Circles Covering Problem on the Uncovered Regions by Circles

นายพาแพงเมือง สุขเกษม
รหัสนักศึกษา 620510570

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

ปัญหาการปกคลุมด้วยวงกลมในบริเวณที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยวงกลม
Circles Covering Problem on the Uncovered Regions by Circles

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ



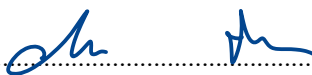
.....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี)



.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมภาพ มูลชัย)



.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ยุ จันทร)

วันที่ 30 มีนาคม 2566

ปัญหาการปกคลุมด้วยวงกลมในบริเวณที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยวงกลม
Circles Covering Problem on the Uncovered Regions by Circles

นายพาแพงเมือง สุขเกษม
รหัสนักศึกษา 620510570

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขา
คณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง
ปัญหาการปกคลุมด้วยวงกลมในบริเวณที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยวงกลม

ผู้ศึกษาขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี อาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระนี้ ที่ช่วยให้
คำอธิบาย ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และให้คำปรึกษา ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้อง พิจารณาแก้ไขจนทำให้
การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสิ้นไปด้วยดี

ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมภพ มูลชัย และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ญ จันทร กรรมการ
สอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้ให้คำแนะนำรวมถึงตรวจสอบความถูกต้องตามความสมควรอันเป็นประโยชน์ต่อการ
ปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระนี้ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์ ดร.อัญชลี เข้มเพ็ชร ผู้ประสานงานรายวิชา 206499 และคณาจารย์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ผ่านการเรียน
การสอนที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการทำงานค้นคว้าอิสระ และให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ต่อการ
ปรับปรุงแก้ไขให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ ChatGPT และนางสาวรณนาถ พงษ์เสมอ ในการช่วยเหลือในการเขียน และปรับปรุง
โปรแกรมในการคำนวณ ให้มีความสมบูรณ์ และสามารถนำมาใช้เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ และองค์ประกอบส่วน
อื่นๆของการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณบิดา มารดา น้องสาว และครอบครัว ผู้สนับสนุนในการเข้ามาเป็นนักศึกษาในภาควิชา
คณิตศาสตร์แห่งนี้ และเริ่มทำงานค้นคว้าอิสระ รวมถึงเพื่อนสนิท เพื่อนนักศึกษาอื่นๆ ทั้งรุ่นพี่และรุ่นน้องใน
ภาควิชาหรือคณะวิทยาศาสตร์ ที่คอยช่วยเหลือและให้กำลังใจกันจนกระทั่งงานค้นคว้าอิสระสำเร็จ

สุดท้ายนี้หากผลงาน ค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดคุณประโยชน์ประการใดผู้ค้นคว้าขอ
แบ่งปันคำชื่นชมและคุณความดีนั้นแก่ ครู อาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอน ในทางตรงกันข้ามหากผล
งานค้นคว้าอิสระนี้เกิดข้อผิดพลาดประการใด ผู้ค้นคว้าต้องขออภัยไว้ ณ โอกาสนี้ด้วยและขออน้อมรับความ
ผิดพลาดไว้ เพื่อหาโอกาสในการปรับปรุงแก้ไขในอนาคต

ผาแพงเมือง สุขเกษม

หัวข้อ (ไทย)	ปัญหาการปกคลุมด้วยวงกลมในบริเวณที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยวงกลม	
(English)	Circles Covering Problem on the Uncovered Regions by Circles	
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นายผาแพงเมือง สุขเกษม	รหัสนักศึกษา 620510570
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี	
ชื่อกรรมการสอบ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมภพ มุลชัย	
	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรณ์ยุ จันทร	

บทคัดย่อ

ปัญหาการกระจายตัวของสาธารณูปการ เช่น โรงเรียน เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในหลายพื้นที่ และเป็นปัญหาที่สำคัญสำหรับคนไทย ในการศึกษาครั้งนี้ มีเป้าหมายในการเพิ่มกลุ่มของโรงเรียนใหม่ เข้าไปในโรงเรียนที่มีอยู่ ในปัจจุบัน โดยรักษาระยะทางที่สั้นที่สุดจากบ้านไปยังโรงเรียนที่ใกล้ที่สุดแห่งนั้น ซึ่งได้มีการใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต เช่น แผนภาพโวโรนอย เพื่อแสดงผล วิเคราะห์ และพิจารณาในการวางจุดที่ตั้งใหม่ของโรงเรียน โดยมีการกำหนดให้โรงเรียนแทนด้วยจุดก่อกำเนิดของแผนภาพโวโรนอยที่อยู่ภายใต้บริเวณที่ต้องการศึกษา จากนั้นทำการศึกษาการวางจุดก่อกำเนิดใหม่บนแผนภาพโวโรนอยทั่วไป บนพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยพื้นที่ให้บริการ ซึ่งมีลักษณะเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดก่อกำเนิดข้างต้น และมีรัศมีเป็นระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิด แล้วพิจารณาเงื่อนไขเพิ่มเติมเพื่อให้ได้จุดก่อกำเนิดใหม่ที่เหมาะสม ด้วยระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดทั้งหมด และปริมาณของการทับซ้อนของพื้นที่ให้บริการที่ดียิ่งขึ้น

Abstract

The problem of improper distribution of the school in many areas is one of the important problems for Thai people. In this study, we aim to place a new set of schools to the existing school in given region for obtaining the shortest distance between home and nearest school. In this study, we use geometric models such as ordinary Voronoi to visualize, analyze and consider to add new school. The schools were considered as Voronoi generators which depends on the space we were focused on. After that, we consider placing new Voronoi diagram generators of ordinary Voronoi diagram by focusing on the uncovered regions of circles whose centered are at Voronoi generator and radius are average distance between Voronoi generator. We analyze additional conditions to find positions of generators that average distance between Voronoi's generators and better overlapping of the service area.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน	3
2.1 นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวกับปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิด	3
2.3 นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวกับแผนภาพไวโรนอย	7
2.3 ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการค้นคว้าวาสระ	10
บทที่ 3 ปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอยเพื่อรักษาระยะทางที่เหมาะสมที่สุด	11
3.1 การวิเคราะห์กรณีของพื้นที่ให้บริการ	12
3.2 การวิเคราะห์ขอบเขตบนของจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดที่สามารถปกคลุมพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่	16
3.3 การใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต	18
3.4 การใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม	25
3.5 การเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท	31
บทที่ 4	57
4.1 เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับจุดก่อกำเนิดใหม่	57
4.2 เงื่อนไขที่นำมาวิเคราะห์ร่วมกันสำหรับจุดก่อกำเนิดใหม่	57
4.3 วิเคราะห์เงื่อนไขที่กำหนดข้างต้นกับวิธีการต่างๆ	59
บทที่ 5	81
เอกสารอ้างอิง	86

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในปัจจุบันมีการพัฒนาสาธารณูปโภคในประเทศไทยมากขึ้นในหลายพื้นที่ แต่อย่างไรก็ตามปัญหาในการเข้าถึงสาธารณูปโภคนั้นยังเกิดขึ้นในอีกหลายพื้นที่ของประเทศไทย ซึ่งมีที่มาจากปัญหาของการกระจายตัวอย่างไม่เหมาะสมของสาธารณูปโภค อย่างโรงเรียนเป็นสาธารณูปโภคอย่างหนึ่งที่สำคัญมากในทุกพื้นที่ เนื่องจากเป็นพื้นที่ให้บริการทางการศึกษาขั้นพื้นฐานแก่เยาวชนทุกคน ถ้าหากเราสามารถทำให้เด็กไทยทุกคนเข้าถึงโรงเรียนได้อย่างทั่วถึงและเท่าเทียมได้ เช่น การเดินทางไปโรงเรียนได้ด้วยตัวเอง หรือสามารถไปโรงเรียนได้ด้วยระยะทางที่ใกล้บ้าน แล้วปัญหาในการเข้าถึงการศึกษาของไทยจะได้รับการแก้ไขให้ดีขึ้น นอกจากนี้ยังสามารถประหยัดทรัพยากรที่ใช้ในการเดินทาง และปัญหาด้านมลพิษ รวมถึงสามารถทำให้ชุมชนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ของนักเรียนได้เมื่อโรงเรียนอยู่ใกล้บ้าน

จากปัญหาดังกล่าว ผู้ค้นคว้าจึงได้สร้างวิธีการสำหรับการหาเขตของจุดที่เหมาะสมในด้านการกระจายระยะทางระหว่างโรงเรียน และการทับซ้อนของพื้นที่ให้บริการของโรงเรียน เพื่อให้โรงเรียนสามารถให้บริการปกคลุมได้ทั่วทุกพื้นที่ และเพิ่มการกระจายตัวของโรงเรียนให้เหมาะสมมากขึ้น โดยการจัดการเชิงพื้นที่เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการเพิ่มพื้นที่โรงเรียน ร่วมกับการศึกษาปัญหาการวางตำแหน่งสาธารณูปโภค (Facility location problem หรือ FLP) และปัญหาการปกคลุมพื้นที่ (Covering problem) อย่างไรก็ตาม สำหรับการศึกษาในครั้งนี้เราให้ความสำคัญในการเพิ่มจุดที่ตั้งใหม่ของโรงเรียนอย่างเหมาะสมที่สามารถปกคลุมพื้นที่ได้อย่างทั่วถึง และลดการทับซ้อนกันของพื้นที่ให้บริการ จึงศึกษาหนึ่งในแบบจำลองทางเรขาคณิตที่สามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาการเพิ่มจุดได้ คือ แผนภาพโวโรนอย (Voronoi diagram) ซึ่งเป็นแผนภาพที่สามารถใช้ในการแบ่งขอบเขตของพื้นที่ โดยการเพิ่มโรงเรียนที่แทนด้วยจุดก่อกำเนิดของแผนภาพโวโรนอยจะเป็นการรักษาระยะทางที่เหมาะสม ในการแบ่งขอบเขตพื้นที่การให้บริการของโรงเรียน เพื่อช่วยประกอบการตัดสินใจในการเพิ่มจุดของโรงเรียนที่เหมาะสมและปกคลุม ซึ่งเป็นแนวคิดที่ยังไม่แพร่หลายในการศึกษา

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราจะทำการสร้างวิธีในการเพิ่มจุดก่อกำเนิดใหม่ของแผนภาพโวโรนอยที่เหมาะสม โดยมีขอบเขตการศึกษาคือพื้นที่โดยรอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่ โดยจะทำการแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่บนปริภูมิยุคลิด จากนั้นพิจารณาจุดที่ตั้งของโรงเรียน ผ่านปัญหาการวางตำแหน่งสาธารณูปโภคและปัญหาการปกคลุมพื้นที่ และสุดท้ายพิจารณาแผนภาพโวโรนอยเพื่อเลือกจุดก่อกำเนิดที่เหมาะสม เพื่อใช้ในการจัดตั้งโรงเรียนใหม่ในพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยพื้นที่ให้บริการของโรงเรียนที่มีอยู่ก่อนแล้ว

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาการจัดการข้อมูลเชิงพื้นที่ และการคำนวณแผนภาพไวโรนอยจากข้อมูลเชิงพื้นที่
2. เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และกรอบแนวคิดที่เหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหาเชิงพื้นที่
3. เพื่อศึกษาปัญหาการปกคลุมด้วยวงกลมในบริเวณที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยวงกลมที่น้อยที่สุด โดยใช้แผนภาพไวโรนอย

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

ในการศึกษารั้งนี้ เราจะทำการศึกษาโดยใช้โรงเรียนประถมและมัธยมรอบคูเมืองของจังหวัดเชียงใหม่ ตามข้อมูลจากโครงการพลเมืองอาสาสังเกตการณ์เมืองเชียงใหม่ทั้งหมด 18 โรงเรียนได้แก่ โรงเรียนโสตศึกษาอนุสารสุนทร, โรงเรียนเทพดินทร์วิทยา, โรงเรียนโกวิทอรัญเชียงใหม่, โรงเรียนวชิรวิทย์, โรงเรียนเทศบาลวัดศรีสุพรรณ, โรงเรียนวัดสวนดอก, โรงเรียนวัดโนนทัยพายัพ, โรงเรียนเทศบาลวัดหมื่นเงินทอง, โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่, โรงเรียนเมตตาศึกษา, โรงเรียนพุทธิโสภณ, โรงเรียนเทศบาลดอกเงิน, โรงเรียนเทศบาลวัดเกตุการาม, โรงเรียนหอพระ, โรงเรียนยุพราชวิทยาลัย, โรงเรียนปิ่นสร้อยแยลส์วิทยาลัย, โรงเรียนเทศบาลวัดเชียงยืน และโรงเรียนชุมชนเทศบาลวัดศรีดอนไชย ประกอบด้วยข้อมูลเพิ่มเติมในการจัดวางโรงเรียนอย่างเหมาะสมบนโครงข่ายถนนจาก OpenStreetMap โดยมีการจัดการข้อมูลให้เหมาะสมกับการเพิ่มจุดก่อกำเนิด โดยใช้แผนภาพไวโรนอยประกอบการตัดสินใจในการวางจุดใหม่

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ศึกษาการจัดการข้อมูลเชิงพื้นที่ และการคำนวณแผนภาพไวโรนอย
2. ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และกรอบแนวคิดที่เหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหาเชิงพื้นที่ ที่สามารถนำไปปรับใช้กับชุดข้อมูลอื่นๆที่มีลักษณะคล้ายกันได้
3. ได้ศึกษาปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอย เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการปกคลุมด้วยวงกลมในบริเวณที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยวงกลม

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องในงานค้นคว้าอิสระ ประกอบด้วยความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอยและแผนภาพไวโรนอยบนโครงข่าย โดยเริ่มศึกษาความรู้พื้นฐานจากปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอย จากนั้นศึกษาแผนภาพไวโรนอยบนโครงข่าย

2.1 นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิด

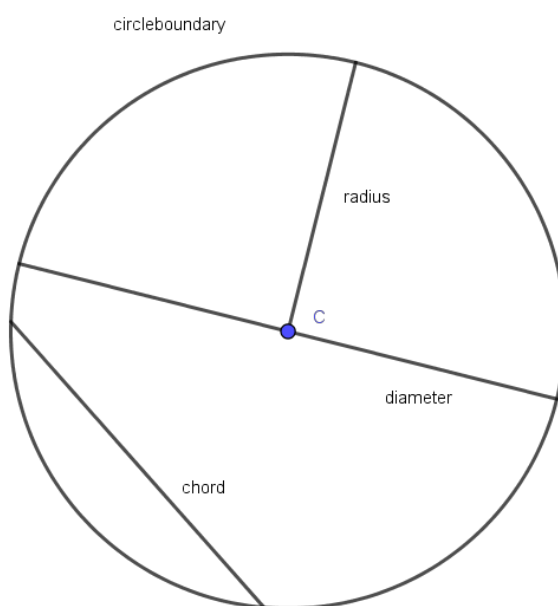
นิยาม 2.1.1 ระยะทาง (distance) คือความยาวตามเส้นทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ทั้งหมด

นิยาม 2.1.2 วงกลม (circle) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุดๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงเรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และระยะทางดังกล่าวเรียกว่า รัศมีของวงกลม แทนด้วย r

นิยาม 2.1.3 เส้นขอบวง (circle boundary) คือเส้นที่ปิดล้อมพื้นที่ของวงกลม เรียกได้ว่าเป็นเส้นรอบรูปของวงกลม ตัวอย่างของเส้นขอบวงแสดงดังรูปที่ 1

นิยาม 2.1.4 เส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter) คือเส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ใช้บอกขนาดของวัสดุรูปทรงกลมหรือมีหน้าตัดเป็นวงกลม ตัวอย่างของเส้นผ่านศูนย์กลางแสดงดังรูปที่ 1

นิยาม 2.1.5 เส้นคอร์ด (chord) คือเส้นตรงภายในวงกลมที่ปลายทั้งสองจรดเส้นขอบวง โดยมีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นคอร์ดที่ยาวที่สุด ตัวอย่างของเส้นคอร์ดแสดงดังรูปที่ 1

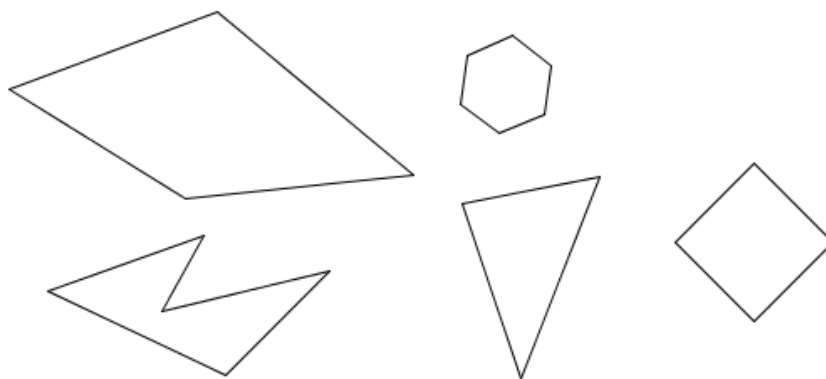


รูปที่ 1 รูปแสดงส่วนประกอบของวงกลมได้แก่จุดศูนย์กลาง รัศมี เส้นผ่านศูนย์กลาง เส้นคอร์ด และเส้นขอบวง

นิยาม 2.1.6 มุม (angle) เกิดจากปลายรังสี 2 เส้น เชื่อมกันที่จุดจุดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าจุดยอดมุม และหน่วยในการวัดมุมอาจมีหน่วยเป็นองศา หรือในหน่วยเรเดียน โดยวงกลมจะมีมุมภายในเท่ากับ 360° หรือ 2π เรเดียน

นิยาม 2.1.7 รูปหลายเหลี่ยม (polygon) เป็นส่วนของระนาบที่ล้อมด้วยเส้นตรง มีส่วนประกอบสำคัญ 3 ส่วนได้แก่ เส้น มุม และจุด

นิยาม 2.1.8 รูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียว (simple polygon) เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่ไม่มีการตัดกันของเส้นที่ประกอบของรูปหลายเหลี่ยม หรือพื้นที่ว่างภายในรูปหลายเหลี่ยมนั้น ตัวอย่างของรูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียวแสดงดังรูปที่ 2



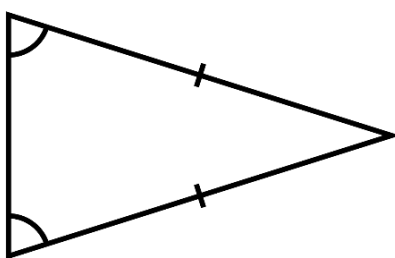
รูปที่ 2 รูปตัวอย่างของรูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียว

นิยาม 2.1.9 รูปหลายเหลี่ยมนูน (convex polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียวที่มีสมบัติที่มุมภายในทุกมุมมีขนาดน้อยกว่าหรือเท่ากับ 180 องศา

นิยาม 2.1.10 รูปหลายเหลี่ยมนูนแท้ (strictly convex polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียวที่มีสมบัติที่มุมภายในทุกมุมมีขนาดน้อยกว่า 180 องศาเท่านั้น

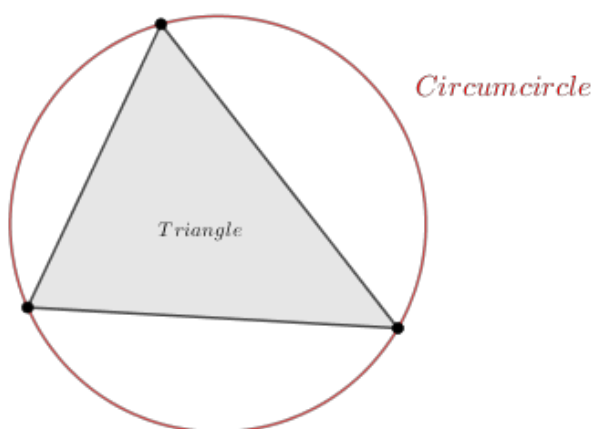
นิยาม 2.1.11 สามเหลี่ยม (triangle) คือรูปหลายเหลี่ยมซึ่งมี 3 มุมหรือจุดยอด และมี 3 ด้านหรือขอบที่เป็นส่วนของเส้นตรง รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด A, B และ C เขียนแทนด้วย $\triangle ABC$

นิยาม 2.1.12 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว (isosceles triangle) คือสามเหลี่ยมที่มีมีด้านสองด้านยาวเท่ากัน และมีมุมสองมุมขนาดเท่ากัน ตัวอย่างของสามเหลี่ยมหน้าจั่วดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 รูปตัวอย่างสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นิยาม 2.1.13 วงกลมล้อมรอบ (circumcircle) เป็นวงกลมที่ผ่านทุกจุดของรูปหลายเหลี่ยม ตัวอย่างของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมดังรูปที่ 4

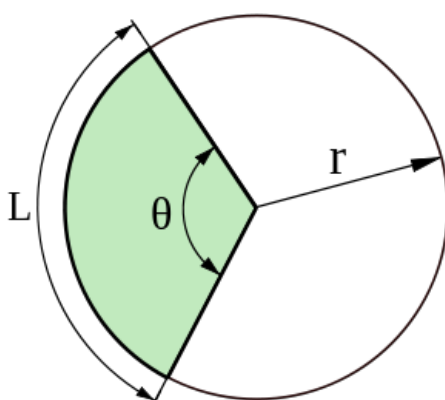


รูปที่ 4 รูปวงกลมล้อมรอบของสามเหลี่ยม

นิยาม 2.1.14 จุดมัธยฐานของรูปหลายเหลี่ยม (centroid) คือจุดที่อยู่กลางของรูปหลายเหลี่ยม กำหนดให้รูปหลายเหลี่ยม P มีจุดยอดคือจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ โดยสามารถหาพิกัดของจุดมัธยฐานได้โดยที่

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)$$

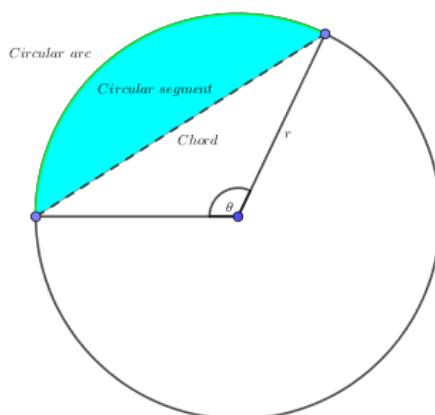
นิยาม 2.1.15 เซกเตอร์วงกลม (circular sector) คือ ส่วนของวงกลมที่ล้อมรอบด้วยรัศมีทั้งสองและส่วนโค้งของวงกลม โดยมีพื้นที่เกิดจากพื้นที่ของวงกลม πr^2 คูณกับอัตราส่วนของมุมคือ $\frac{\theta}{2\pi}$ ได้ว่ามีพื้นที่คือ $\frac{r^2 \theta}{2}$ ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 รูปเซกเตอร์วงกลมที่ประกอบด้วยรัศมี r มุม θ และส่วนโค้งของวงกลม L

นิยาม 2.1.16 เชกเมนต์วงกลม (circular segment) คือ ส่วนของวงกลมที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและส่วนโค้งของวงกลม โดยสามารถหาพื้นที่ได้จากการลบกันระหว่างพื้นที่ของเซกเตอร์วงกลม และสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีเส้นโค้งเป็นฐาน และมีจุดยอดเป็นจุดเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมดังรูปที่ 6 มีค่าเป็น

$$A = \left(\frac{r^2 \cdot \theta}{2} \right) - \frac{r^2 \sin \theta}{2} = \frac{r^2}{2} (\theta - \sin \theta)$$

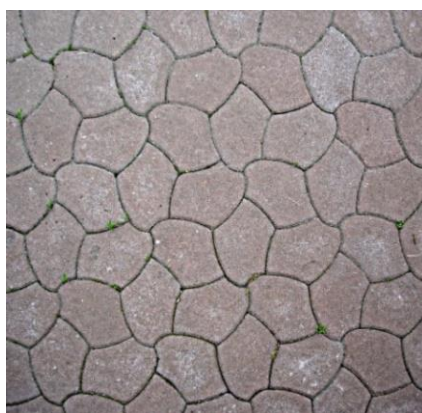


รูปที่ 6 รูปเชกเมนต์วงกลมที่ประกอบด้วยรัศมี r มุม θ เส้นโค้ง (เส้นประ) และส่วนโค้งของวงกลม (เส้นสีเขียว)

นิยาม 2.1.17 จุดตัด (intersection point) คือ จุดที่เกิดจากเส้นตรง รังสี หรือส่วนของเส้นตรง 2 เส้น ตัดกันหรือพบกัน

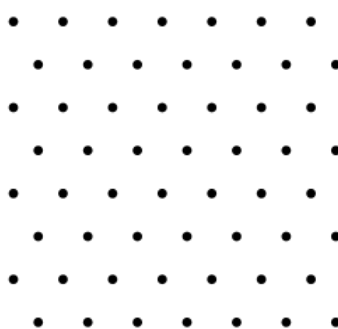
นิยาม 2.1.18 เส้นทแยงมุม (diagonal line) เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดสองจุดที่ไม่อยู่ติดกันบนรูปหลายเหลี่ยม

นิยาม 2.1.19 เทสเซลเลชัน (tessellation หรือ tiling) คือ กลุ่มรูปแบนราบ ที่เรียงติดต่อกันโดยไม่มีช่องว่างและไม่ทับกันยกเว้นเพียงขอบ ตัวอย่างของเทสเซลเลชันดังรูปที่ 7



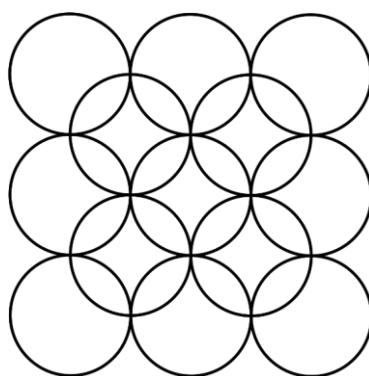
รูปที่ 7 รูปตัวอย่างของการปูกระเบื้อง

นิยาม 2.1.20 จุดบนโครงตาข่าย (lattice) คือ เซตจำกัดของจุดบนปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ ใดๆ ที่มีสมบัติคือ พิกัดของแต่ละจุดใดๆ นั้นจะเป็นผลลัพธ์จากการบวก หรือลบกันของพิกัดระหว่างสองจุด ตัวอย่างของจุดบนโครงตาข่ายดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 รูปจุดบนโครงตาข่ายบนปริภูมิยูคลิด

นิยาม 2.1.21 กริดวงกลมทับซ้อน (overlapping circles grid) คือ วงกลมหลายรูปที่มีรัศมีเท่ากันที่ถูกปูบนระนาบสองมิติ โดยมีจุดศูนย์กลางคือจุดบนโครงตาข่าย ตัวอย่างของกริดวงกลมทับซ้อนดังรูปที่ 9



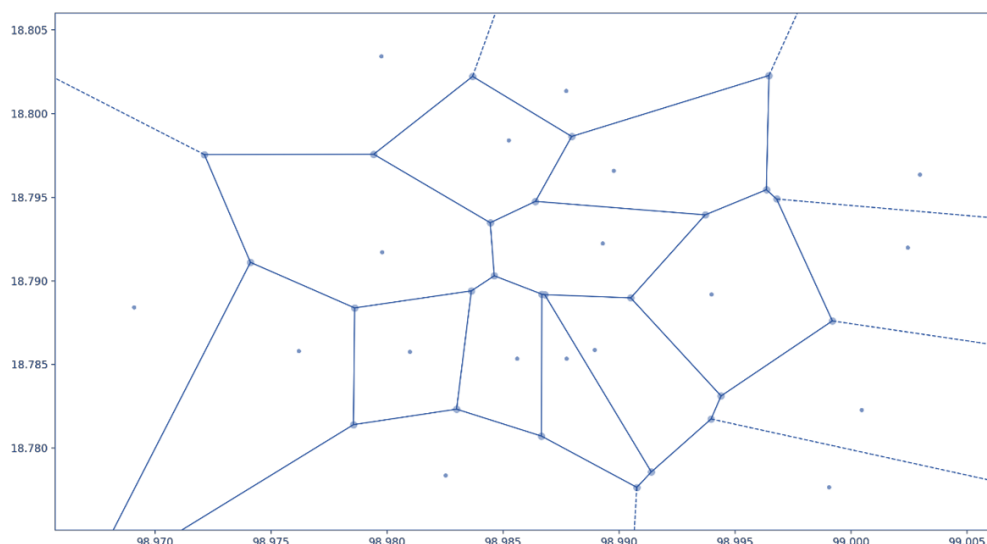
รูปที่ 9 รูปกริดวงกลมทับซ้อนที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดบนโครงตาข่ายจัตุรัส

2.2 นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวกับแผนภาพไวโรนอย

ก่อนอื่นจะพิจารณาปัญหาที่ทำการไปรษณีย์ (Post-office problem) โดยสมมติว่ามีที่ทำการไปรษณีย์ n ที่ทำการ ต้องการพิจารณาเขตในการให้บริการที่เป็นบริเวณโดยรอบของที่ทำการไปรษณีย์ เพื่อแสดงเขตที่จุดบริการนั้นมีอิทธิพลถึงจุดอื่นในพื้นที่ดังกล่าว กล่าวคือทุกตำแหน่งที่อยู่ในเขตพื้นที่จะมีค่าใกล้เคียงกับที่ทำการไปรษณีย์นั้นมากกว่าไปรษณีย์อื่นที่อยู่ไกลออกไป

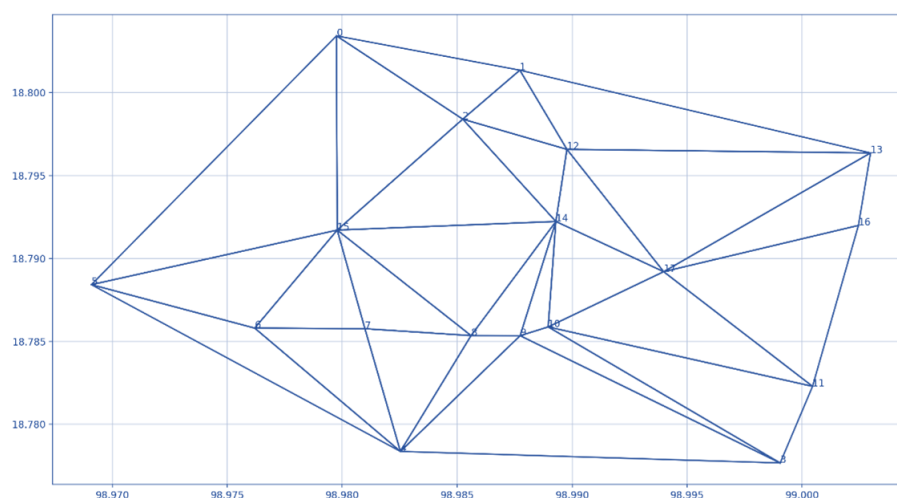
ปัญหาดังกล่าวเราสามารถพิจารณาการสร้างอาณาบริเวณรอบที่ทำการไปรษณีย์ได้โดยสร้างแผนภาพที่ทำการแบ่งบริเวณขึ้นอยู่กับการไปรษณีย์ เรียกว่า **จุดก่อกำเนิด (generator)** ภายใต้การวัดระยะทางในปริภูมิที่สนใจ

นิยาม 2.2.22 ให้ $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ เป็นเซตของจุดที่กำหนดในระนาบ เรียกว่าเซตของจุดก่อกำเนิด (generator set) และ $d_E(p, p_i)$ เป็นระยะทางยูคลิดระหว่างจุด p และจุด p_i และนิยามบริเวณโวโรนอย (Voronoi region) ของจุด p_i โดย $V(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(p, p_i) \leq d_E(p, p_j); i, j = 1, 2, \dots, n \text{ and } i \neq j\}$ ซึ่งแผนภาพโวโรนอย (Voronoi diagram) ของเซตของจุดก่อกำเนิด P คือเซตของบริเวณโวโรนอยเขียนแทนด้วย $VD(P) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$ ตัวอย่างของแผนภาพโวโรนอยดังรูปที่ 10



รูปที่ 10 รูปตัวอย่างของแผนภาพโวโรนอยที่มีจุดก่อกำเนิดเป็นข้อมูลที่นำมาศึกษา

นิยาม 2.2.23 ให้ $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ เป็นเซตของจุดที่กำหนดในระนาบ จะได้ว่าสามเหลี่ยมเดอลานเ (Delaunay triangulation) เขียนแทนด้วย $DT(P)$ คือสามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดที่เป็นสมาชิกในเซตของจุด P สำหรับทุกสามเหลี่ยม t_i ใน $DT(P)$ โดยที่วงกลมที่ล้อมรอบ t_i นั้นจะต้องไม่บรรจุจุดอื่นที่ไม่ใช่จุดยอดของ t_i ในเซตของจุด P ตัวอย่างของสามเหลี่ยมเดอลานเดังรูปที่ 11



รูปที่ 11 รูปตัวอย่างของแผนภาพโวโรนอยที่มีจุดยอดของสามเหลี่ยมเป็นข้อมูลที่นำมาศึกษา

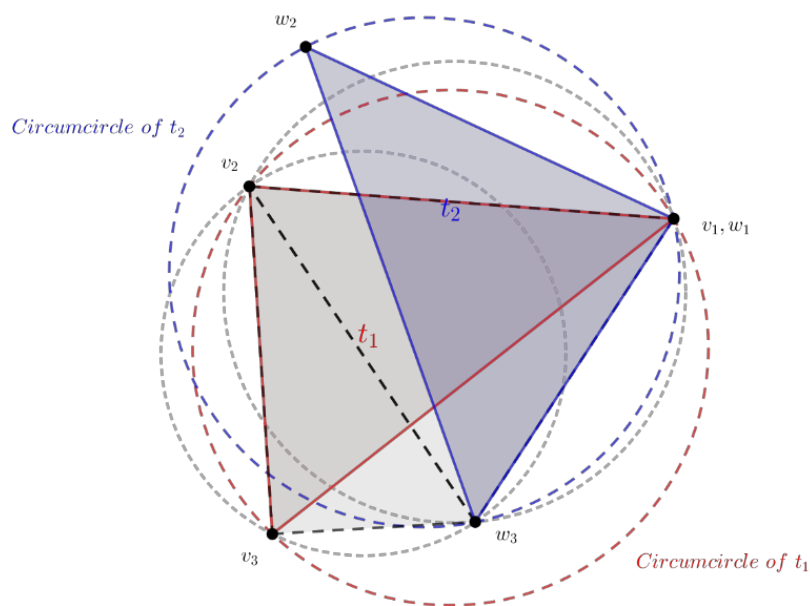
บทแทรก 2.2.24 กำหนดให้ P เป็นเซตของจุดทั่วไป โดยไม่มีวงกลมที่บรรจุจุด 4 จุดๆ บนเส้นขอบวง แล้วจะสามารถสร้างสามเหลี่ยมเดอลาเน่ได้รูปแบบเดียวเท่านั้นสำหรับเซตของจุด P

พิสูจน์ กำหนดให้มีสามเหลี่ยมเดอลาเน่สองรูปแบบที่ต่างกันบนเซตของจุด P โดยไม่เสียเลยทั่วไป ให้จุด $p \in P$ ซึ่ง p ไม่เป็นจุดที่อยู่บนขอบเขตเล็กที่สุดของ P และให้ t_1 และ t_2 เป็นสามเหลี่ยมเดอลาเน่ที่บรรจุจุด p จะได้ว่า t_1 และ t_2 จะไม่มีจุดอื่นบรรจุอยู่ในวงกลมล้อมรอบของสามเหลี่ยมยกเว้นจุดยอดของสามเหลี่ยมนั้น

ให้ v_1, v_2 และ v_3 เป็นจุดยอดของ t_1 และ w_1, w_2 และ w_3 เป็นจุดยอดของ t_2 เรียงกันตามทิศทวนเข็มนาฬิกา จาก p ไม่เป็นจุดบนขอบเขตที่เล็กที่สุด จะได้ว่ามีอย่างน้อย 1 จุดที่เป็นจุดยอดร่วมกันของสามเหลี่ยม t_1 และ t_2 โดยไม่เสียเลยทั่วไป จะกำหนดให้ v_1 และ w_1 เป็นจุดเดียวกัน เมื่อพิจารณาวงกลมล้อมรอบ t_1 จะได้ว่าไม่มีจุดอื่นใน P นอกจาก v_1, v_2 และ v_3 ที่อยู่บนวงกลมล้อมรอบนั้น และจาก t_2 เป็นสามเหลี่ยมเดอลาเน่ที่ต่างกันจะได้ว่ามีจุดยอดอย่างน้อย 1 จุดที่อยู่ภายนอกวงกลมล้อมรอบ t_1

ให้ Q เป็นเซตของจุดใน P ที่บรรจุจุดบนวงกลมล้อมรอบ t_1 และให้ w_2 เป็นจุดที่อยู่ภายนอกวงกลมล้อมรอบ t_1 นั่นคือเมื่อสร้างสามเหลี่ยมเดอลาเน่ใน Q แล้ว w_2 ไม่เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมใน Q

สมมติให้จุด w_3 เพิ่มเข้าไปใน Q แล้วสร้างสามเหลี่ยมเดอลาเน่ใน Q จะได้ว่า w_3 อยู่ภายในวงกลมล้อมรอบ t_1 ซึ่งสามารถสร้างสามเหลี่ยมเดอลาเน่โดยใช้จุด w_3, v_1, v_2 และ v_3 ในการสร้างสามเหลี่ยมเดอลาเน่ใน Q ได้ จะทำให้ได้ว่าสามเหลี่ยม t_2 ไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลาเน่ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12 รูปของสามเหลี่ยมเดอลาเน่ที่สร้างจากการพิสูจน์บทแทรก 2.2.24

เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจากเรากำหนดให้ t_2 เป็นสามเหลี่ยมเดอลาเน่ ดังนั้นจากที่กำหนดให้มีสามเหลี่ยมเดอลาเน่สองรูปแบบที่ต่างกันบนเซตของจุด P นั้นไม่เป็นจริง ทำให้สามารถมีสามเหลี่ยมเดอลาเน่ได้รูปแบบเดียวเท่านั้นสำหรับเซตของจุด P $\square$

แผนภาพไวโรนอยมีความเป็นคู่กันกับสามเหลี่ยมเดอลาเน่ โดยจะมีคู่ของเส้นของแผนภาพไวโรนอยที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกันกับด้านของสามเหลี่ยมเดอลาเน่ ซึ่งระยะทางของแต่ละด้านของสามเหลี่ยมเดอลาเน่นั้นจะเป็นระยะห่างระหว่างจุดกึ่งกลางด้านของแผนภาพไวโรนอย

2.3 ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการค้นคว้าวาอิสระ

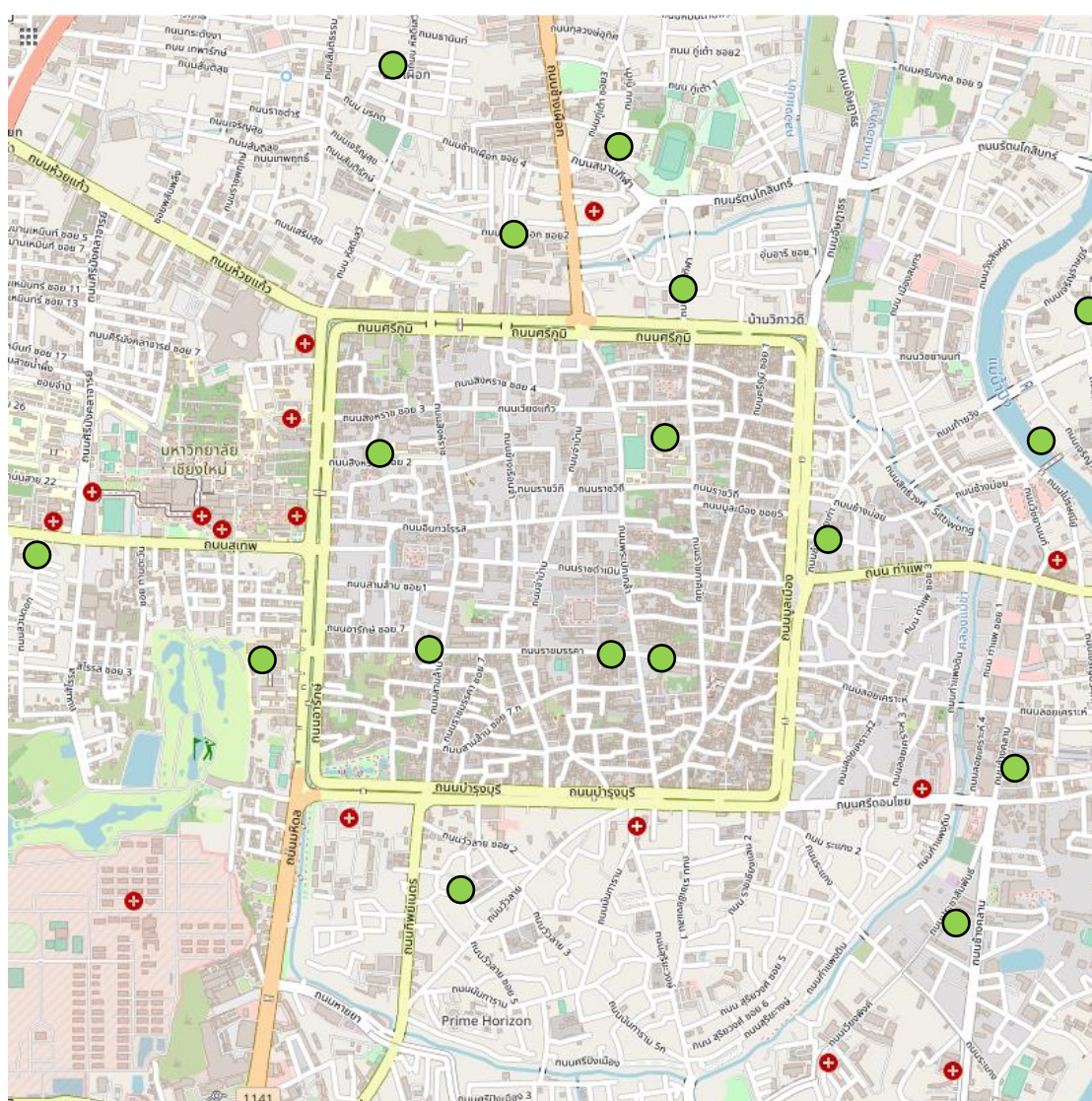
ปัญหาการวางตำแหน่งสาธารณูปโภค (Facility location problem หรือ FLP) เป็นปัญหาหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับการหาตำแหน่งที่เหมาะสมที่สุดเชิงคณิตศาสตร์เพื่อกำหนดตำแหน่งที่เหมาะสมที่สุด สำหรับการวางตำแหน่งให้บริการ โดยอ้างอิงตามความต้องการทางภูมิศาสตร์ ต้นทุนในการจัดตั้งตำแหน่งให้บริการ หรือระยะทางที่ใช้ในการเดินทาง ที่อ้างอิงตามความต้องการของผู้ใช้บริการ หรือตำแหน่ง โดยปัญหาการวางตำแหน่งสาธารณูปโภคสามารถใช้ได้ทั้งปัญหาที่จำกัดจำนวนตำแหน่ง และไม่จำกัดจำนวนตำแหน่ง ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าตำแหน่งที่ให้บริการที่สนใจนั้นมีการจำกัดจำนวนหรือไม่

ปัญหาการปกคลุมพื้นที่ (Covering problem) เป็นปัญหาด้านการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการจัดวางโครงสร้างต่างๆ ให้ปกคลุมกันและกัน หรือเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับขนาดของโครงสร้างที่สามารถปกคลุมโครงสร้างอื่นๆ ได้ นอกจากนี้ปัญหาการปกคลุมความต้องการของลูกค้าเป็นปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุดและกำหนดการเชิงเส้นจำนวนเต็ม โดยมีความเป็นคู่กันกับปัญหาการบรรจุผลิตภัณฑ์ (Packing problem) โดยการปกคลุมในการศึกษานี้ คือการที่พื้นที่ให้บริการทับซ้อนบนบริเวณใดๆ และการไม่ปกคลุมคือการที่ไม่มีพื้นที่ใดๆ มาทับซ้อนบนบริเวณนั้น

บทที่ 3

ปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอยเพื่อรักษาระยะทางที่เหมาะสมที่สุด

จากความสนใจในปัญหาการวางตำแหน่งสาธารณูปโภค และปัญหาการปกคลุมพื้นที่ที่ รวมกับ แผนภาพไวโรนอยและแผนภาพไวโรนอยบนโครงข่าย ทำให้เกิดปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอยเพื่อรักษาระยะทางที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งจะศึกษาปัญหานี้บนแผนภาพไวโรนอยบนปริภูมิยูคลิดก่อน เพื่อให้เกิดความเข้าใจในปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดมากขึ้น เนื่องจากแผนภาพไวโรนอยบนปริภูมิยูคลิดนับว่าเป็น พื้นฐานของแผนภาพไวโรนอยบนโครงข่าย โดยมีการกำหนดขอบเขตที่ปกคลุมทุกจุดก่อกำเนิดเดิม เพื่อนำ ปัญหาการปกคลุมพื้นที่มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอย โดยขอบเขตของ พื้นที่ที่นำมาศึกษาคือพื้นที่บริเวณ 1 กิโลเมตรรอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่จำลองได้ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13 ภาพขอบเขตประมาณ 1 กิโลเมตรรอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่ที่นำมาใช้ในการศึกษา

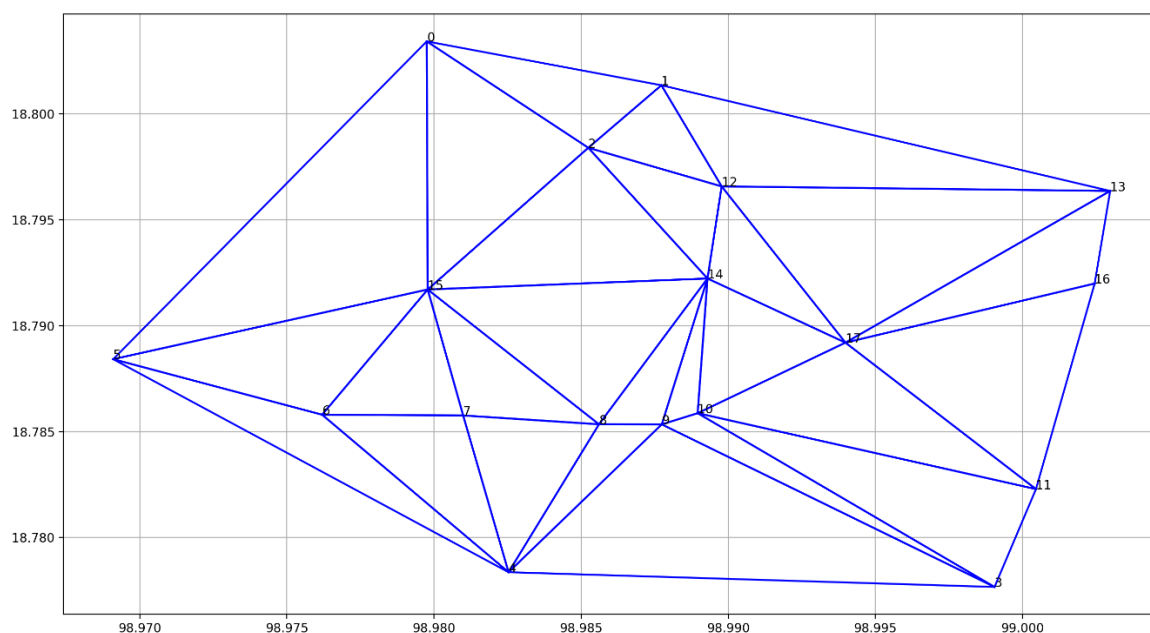
3.1 การวิเคราะห์หรัศมีของพื้นที่ให้บริการ

ในการศึกษาครั้งนี้เราได้ตั้งสมมติฐานให้ทุกจุดก่อกำเนิดนั้นจะสามารถให้บริการในพื้นที่ในลักษณะของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน โดยจะวิเคราะห์หรัศมีของพื้นที่ให้บริการจากระยะทางระหว่างแต่ละจุดก่อกำเนิดเดิมที่ได้จากสามเหลี่ยมเดอลานที่เป็นคู่กันกับแผนภาพไวโรนอย ซึ่งจะใช้ค่าเฉลี่ยของระยะทางระหว่างจุดก่อกำเนิดทั้งหมดเป็นรัศมีของพื้นที่ให้บริการสำหรับทุกจุดก่อกำเนิด และใช้โปรแกรมคำนวณระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดคู่ใดๆ ด้วยสามเหลี่ยมเดอลาน์ บน Python ผ่านทาง Google Colaboratory ซึ่งได้ผลลัพธ์ในหน่วยองศาเนื่องจากการใช้พิกัดลองจิจูดและละติจูดในการคำนวณ จึงต้องมีการแปลงข้อมูลของระยะทางที่ได้ในหน่วยเมตร โดยมีข้อมูลของจุดก่อกำเนิดเดิมตามตาราง 1

ตาราง 1 ตารางตัวเลขแทนลำดับและชื่อของจุดก่อกำเนิดเดิม รวมถึงลองจิจูดและละติจูดของจุดก่อกำเนิดนั้น

จุดที่	ชื่อโรงเรียน	ลองจิจูด	ละติจูด
0	โรงเรียนโสตศึกษาอนุสารสุนทร	98.9797541	18.8034311
1	โรงเรียนเทพดินทร์วิทยา	98.9877280	18.8013591
2	โรงเรียนโกวิทอรัณยเชียงใหม่	98.9852448	18.7984064
3	โรงเรียนวชิรวิทย์	98.9990499	18.7776669
4	โรงเรียนเทศบาลวัดศรีสุพรรณ	98.9825343	18.7783640
5	โรงเรียนวัดสวนดอก	98.9690986	18.7884232
6	โรงเรียนวัดโนทัยพายัพ	98.9761990	18.7858008
7	โรงเรียนเทศบาลวัดหมื่นเงินทองวัดหมื่นเงินกอง	98.9809913	18.7857655
8	โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่	98.9856075	18.7853492
9	โรงเรียนเมตตาศึกษา	98.9877413	18.7853445
10	โรงเรียนพุทธิโศภน	98.9889608	18.7858730
11	โรงเรียนชุมชนเทศบาลวัดศรีดอนไชย	99.0004578	18.7822887
12	โรงเรียนเทศบาลวัดเชียงยืน	98.9897757	18.7965836
13	โรงเรียนปิ่นสร้อยแยลส์วิทยาลัย	99.0029794	18.7963669
14	โรงเรียนยุพราชวิทยาลัย	98.9892953	18.7922328
15	โรงเรียนหอพระ	98.9797863	18.7917146
16	โรงเรียนเทศบาลวัดเกตุการาม	99.0024520	18.7919952
17	โรงเรียนเทศบาลดอกเงิน	98.9939829	18.7892048

จากข้อมูลของจุดข้างต้นนำมาใช้ในการคำนวณสามเหลี่ยมเดอลาเนโดยใช้ชุดคำสั่งที่ในโปรแกรมการคำนวณที่ได้ออกแบบไว้ในการศึกษาครั้งนี้ ได้ผลลัพธ์จากการคำนวณสามเหลี่ยมเดอลาเนดังรูปที่ 14



รูปที่ 14 ภาพผลการคำนวณสามเหลี่ยมเดอลาเนด้วยโปรแกรมการคำนวณบน Python

เมื่อได้ข้อมูลระยะทางของสามเหลี่ยมเดอลาเนแล้ว ทำการแปลงระยะทางจากหน่วยองศาเป็นเมตร โดยที่ระยะทาง 1 องศา จะมีค่าเท่ากับ 111,139 เมตร โดยมีที่มาจากการนำรัศมีของโลกที่วัดด้วยหน่วยเมตร แทนด้วย r มาใช้ในการคำนวณหาความยาวส่วนโค้ง L ของโลกที่มุม 1 องศา ตามสูตร $L = \frac{2\pi r \theta}{360}$ ผลลัพธ์ของการคำนวณระยะทางระหว่างจุดออกมาตามตาราง 2

ตาราง 2 ตารางคู่จุดทั้งหมดของสามเหลี่ยมเดอลาเน และระยะทางระหว่างจุดคู่หนึ่งในหน่วยองศาและหน่วยเมตร

จุดที่ 1	จุดที่ 2	ระยะทาง (องศา)	ระยะทาง (เมตร)	จุดที่ 1	จุดที่ 2	ระยะทาง (องศา)	ระยะทาง (เมตร)
15	0	0.011716544	1302.16	10	9	0.001329095	147.71
15	5	0.011183034	1242.87	10	3	0.013005000	1445.36
0	5	0.018405889	2045.61	9	3	0.013668576	1519.11
9	4	0.008708630	967.87	15	8	0.008625815	958.66
9	3	0.013668576	1519.11	15	14	0.009523109	1058.39
4	3	0.016530305	1837.16	8	14	0.007809214	867.91
4	6	0.009769443	1085.77	8	9	0.002133805	237.15

จุดที่ 1	จุดที่ 2	ระยะทาง (องศา)	ระยะทาง (เมตร)	จุดที่ 1	จุดที่ 2	ระยะทาง (องศา)	ระยะทาง (เมตร)
4	5	0.016784086	1865.37	8	14	0.007809214	867.91
6	5	0.007569192	841.23	9	14	0.007061416	784.80
6	15	0.006916773	768.72	9	8	0.002133805	237.15
6	5	0.007569192	841.23	9	4	0.008708630	967.87
15	5	0.011183034	1242.87	8	4	0.007631355	848.14
1	12	0.005196006	577.48	2	12	0.004883816	542.78
1	13	0.016047656	1783.52	2	1	0.003858072	428.78
12	13	0.013205478	1467.64	12	1	0.005196006	577.48
12	17	0.008493952	944.01	15	2	0.008635706	959.76
12	13	0.013205478	1467.64	15	0	0.011716544	1302.16
17	13	0.011499247	1278.01	2	0	0.007442808	827.19
17	12	0.008493952	944.01	2	1	0.003858072	428.78
17	14	0.005580536	620.21	2	0	0.007442808	827.19
12	14	0.004377242	486.48	1	0	0.008238705	915.64
17	16	0.008916949	991.02	2	15	0.008635706	959.76
17	13	0.011499247	1278.01	2	14	0.007383758	820.62
16	13	0.004403398	489.39	15	14	0.009523109	1058.39
11	16	0.009909237	1101.30	12	2	0.004883816	542.78
11	17	0.009474005	1052.93	12	14	0.004377242	486.48
16	17	0.008916949	991.02	2	14	0.007383758	820.62
10	17	0.006026805	669.81	6	7	0.004792430	532.62
10	14	0.006368591	707.79	6	15	0.006916773	768.72
17	14	0.005580536	620.21	7	15	0.006069911	674.60
9	10	0.001329095	147.71	7	8	0.004634933	515.12
9	14	0.007061416	784.80	7	15	0.006069911	674.60
10	14	0.006368591	707.80	8	15	0.008625815	958.66
10	11	0.012042766	1338.42	7	6	0.004792430	532.62
10	17	0.006026805	669.81	7	4	0.007560625	840.28
11	17	0.009474005	1052.93	6	4	0.009769443	1085.77

จุดที่ 1	จุดที่ 2	ระยะทาง (องศา)	ระยะทาง (เมตร)	จุดที่ 1	จุดที่ 2	ระยะทาง (องศา)	ระยะทาง (เมตร)
11	10	0.012042766	1338.42	8	7	0.004634933	515.12
11	3	0.004831482	536.97	8	4	0.007631355	848.14
10	3	0.013005000	1445.36	7	4	0.007560625	840.28

ทำการหาค่าเฉลี่ยของระยะทางที่ได้มาข้างต้นด้วยสูตรในการหาค่าเฉลี่ยคือ $\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ เมื่อ d_i แทน ระยะทางใดๆ ระหว่างจุดก่อกำเนิดข้างต้น ได้ผลลัพธ์จากการคำนวณระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดคู่ใดๆ ด้วยสามเหลี่ยมเดอลานู ตามตาราง 3

ตาราง 3 ตารางค่าเฉลี่ย และค่าต่ำสุด-สูงสุด ของระยะทางทั้งหมดในหน่วยองศาและหน่วยเมตร

	ระยะทาง (องศา)	ระยะทาง (เมตร)
ค่าต่ำสุด	0.0013291	147.7142466
ค่าเฉลี่ย	0.0082223	913.8190966
ค่าสูงสุด	0.0184059	2045.6120758

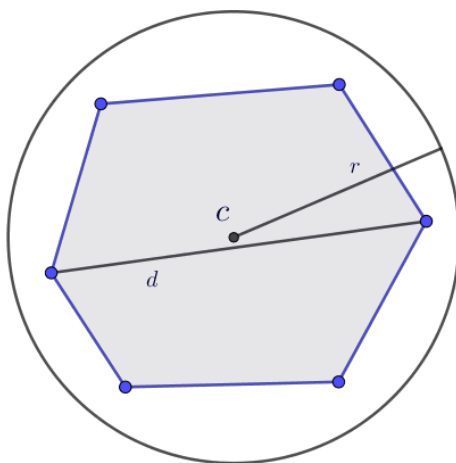
นอกจากนี้เมื่อได้รัศมีของพื้นที่ให้บริการแล้ว เราสามารถแสดงพื้นที่ให้บริการของจุดทั้งหมด โดยอาจมีพื้นที่ให้บริการที่ทับซ้อนกันได้ โดยใช้โปรแกรมในการคำนวณพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยของวงกลมแต่ละคู่บน Python ผ่านทาง Google Colaboratory จะได้ว่า ซึ่งพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยของพื้นที่ให้บริการทั้งหมดคือร้อยละ 15.67 ของหนึ่งพื้นที่ให้บริการ

3.2 การวิเคราะห์ขอบเขตบนของจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดที่สามารถปกคลุมพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมือง จังหวัดเชียงใหม่

ให้ $C_1, C_2, \dots, C_n$ แทนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดก่อกำเนิดซึ่งมีรัศมี r กำหนดให้บริเวณ $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$ และให้ $I_1, I_2, \dots, I_n$ เป็นจุดตัดของรูปสี่เหลี่ยมกับบริเวณ A ในการวิเคราะห์พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมนี้ เราจะทำการมองพื้นที่เหล่านั้นเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมคือจุด $I_1, I_2, \dots, I_n$ ที่เกิดจากเส้นขอบวงและเส้นขอบเขตของพื้นที่ รวมถึงจุดยอดของเส้นขอบเขต โดยทฤษฎีข้างต้นนี้จะสามารถใช้ในการวิเคราะห์จำนวนวงกลมที่สามารถปกคลุมพื้นที่ซึ่งไม่ถูกปกคลุมได้

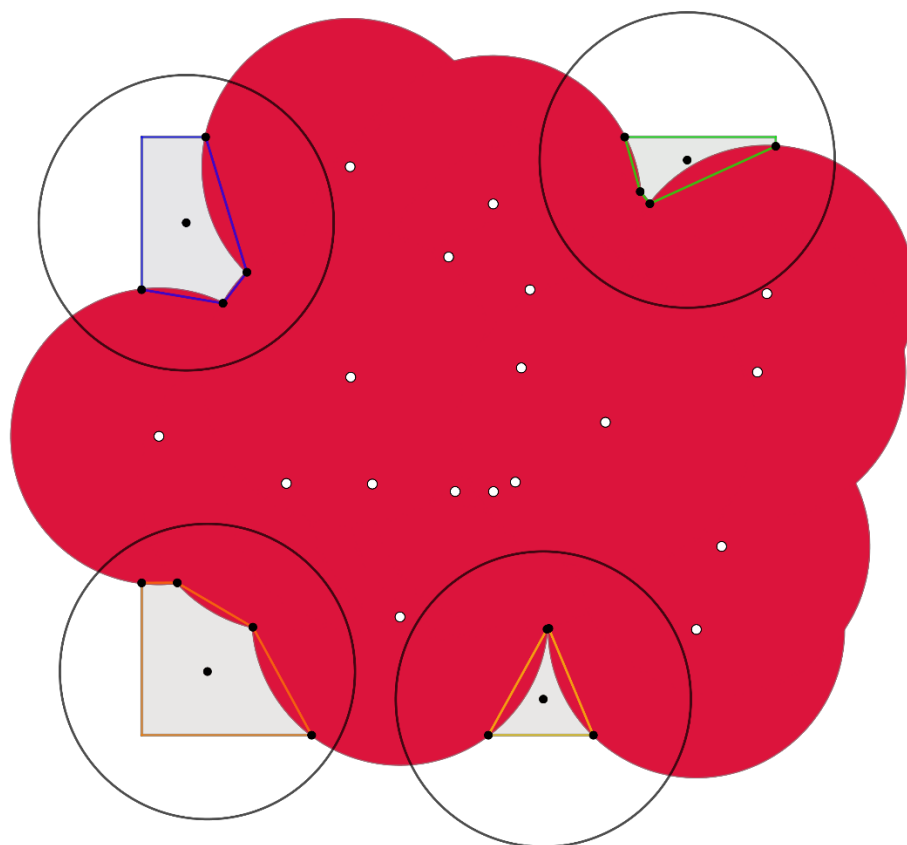
ทฤษฎีบท 3.2.25 ถ้าระยะของเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดของรูปหลายเหลี่ยมนูนใดๆ ที่มีความยาวเป็น d มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของรัศมี r ของวงกลม แล้วจะมีวงกลมอย่างน้อยหนึ่งวงที่มีรัศมี r สามารถปกคลุมพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมนูนดังรูปที่ 15

พิสูจน์ สมมติให้ P เป็นรูปหลายเหลี่ยมนูนใดๆ มีเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดมีค่าเท่ากับ d โดยที่ $d \leq 2r$ ซึ่ง r คือความยาวของรัศมีของวงกลม เลือกวงกลมที่มีรัศมี r โดยที่วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดมีรัศยาน $c(x, y)$ ของรูปหลายเหลี่ยมนูน เนื่องจาก P เป็นรูปหลายเหลี่ยมนูน จะได้ว่า $c \in P$ สำหรับทุกจุดยอด P_i จะเห็นว่า $d_E(c, P_i) \leq d \leq 2r$ □



รูปที่ 15 รูปตัวอย่างของรูปหลายเหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดคือ d ที่ถูกปกคลุมด้วยวงกลมที่มีรัศมี r ตามทฤษฎีบท 3.2.25

จากทฤษฎีข้างต้นนี้จะถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์เพื่อหาจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดที่สามารถปกคลุมพื้นที่นั้น โดยสร้างรูปหลายเหลี่ยมนูนจากจุดตัดระหว่างเส้นขอบวงของพื้นที่ใดๆ และเส้นขอบเขตที่บรรจุจุดก่อกำเนิดเดิมทั้งหมด ซึ่งรูปหลายเหลี่ยมนูนนั้นต้องปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด



รูปที่ 16 รูปภาพจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดที่สามารถปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมบริเวณ 1 กิโลเมตร
รอบคูเมือง จังหวัดเชียงใหม่

จากรูปที่ 16 ทำให้เราได้ว่าเมื่อใช้วิธีการในการสร้างรูปหลายเหลี่ยมเพื่อวิเคราะห์จำนวนวงกลมที่น้อยที่สุด
ข้างต้นแล้ว ได้จำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดที่สามารถปกคลุมประมาณ 1 กิโลเมตร รอบคูเมือง จังหวัดเชียงใหม่
คือ 4 วง

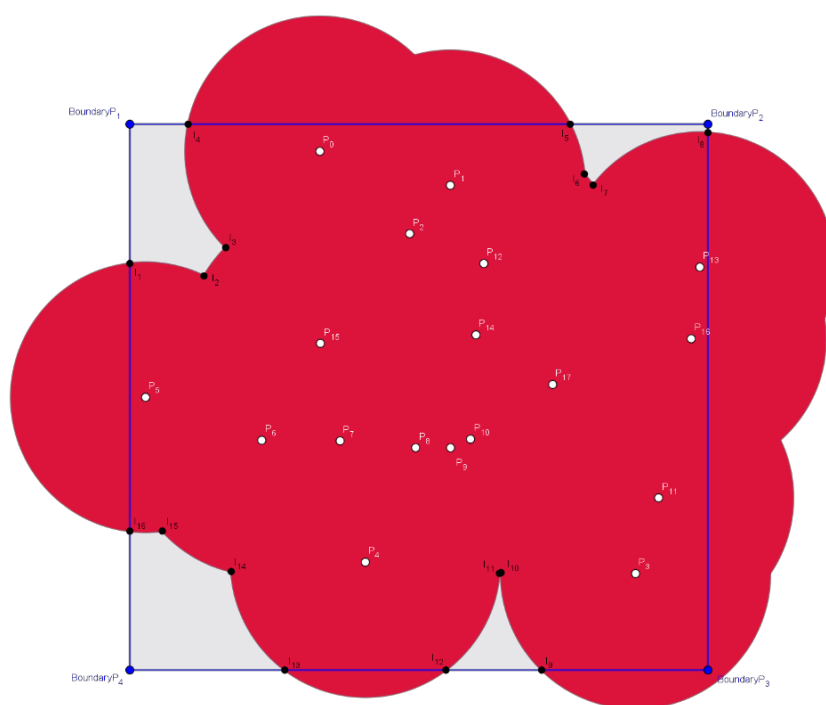
3.3 การใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

ให้ $C_1, C_2, \dots, C_n$ แทนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดก่อกำเนิดซึ่งมีรัศมี r กำหนดให้บริเวณ $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$ และให้ $I_1, I_2, \dots, I_n$ เป็นจุดตัดของรูปสี่เหลี่ยมกับบริเวณ A ในที่นี้เราจะพิจารณาจุดตัดของโลคัสซึ่งก่อกำเนิดจากวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $I_1, I_2, \dots, I_n$ รัศมี r จุดตัดเหล่านี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมใหม่ที่นำไปได้

แนวคิดนี้เกิดจากการสังเกตเส้นขอบวงของวงกลมใดๆ ที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดตัดของวงกลมสองวงที่มีรัศมีเท่ากัน เมื่อทางวงกลมจากจุดตัดนั้นด้วยรัศมีเดิมแล้วเส้นขอบวงของวงกลมนี้จะบรรจุจุดก่อกำเนิดของวงกลมสองวงนั้นเช่นกัน เนื่องจากเมื่อระยะห่างของจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงใดๆ ที่มีรัศมีเท่ากันมีระยะทางเท่ากับรัศมี แล้วจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งจะอยู่บนเส้นขอบของวงกลมอีกวง

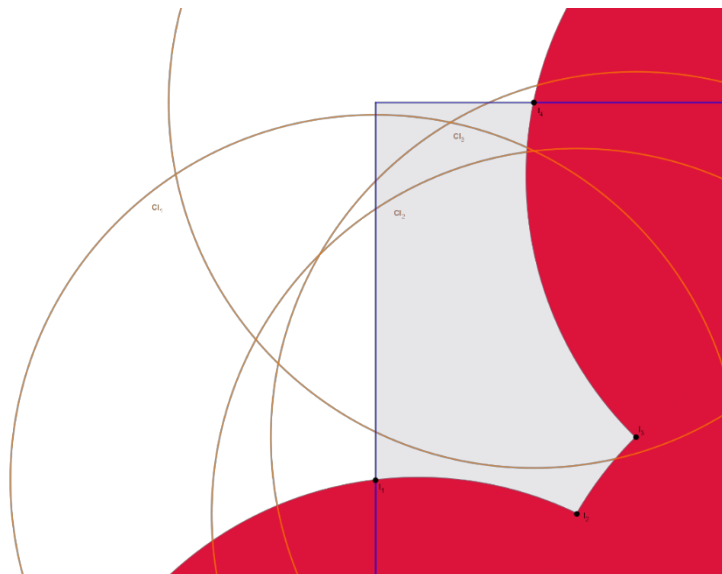
3.3.1 ขั้นตอนวิธี และตัวอย่างของการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

3.3.1.1 สร้างเส้นขอบวงที่เกิดจากจุดตัดระหว่างเส้นขอบวงของพื้นที่ใดๆ และเส้นขอบเขตที่บรรจุจุดก่อกำเนิดเดิมทั้งหมดดังรูปที่ 17

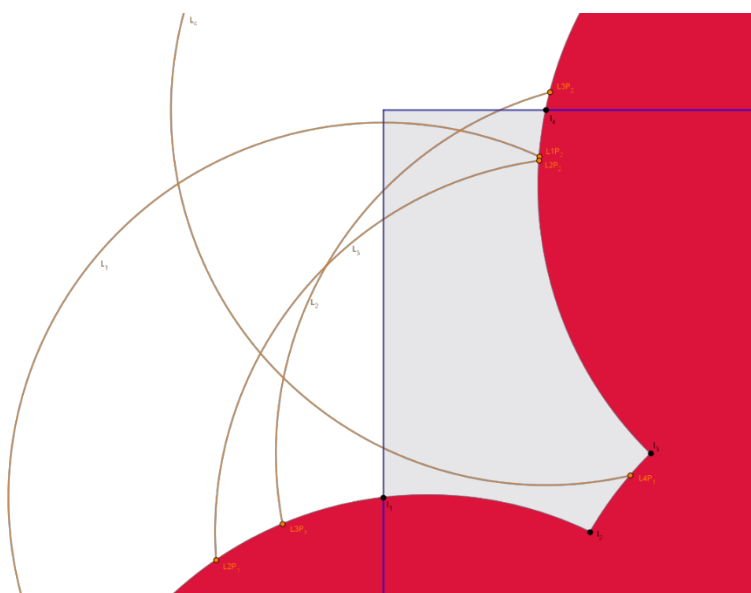


รูปที่ 17 ภาพจุดตัดทั้งหมดที่เกิดจากเส้นขอบวงของจุดก่อกำเนิด และขอบเขตที่บรรจุจุดก่อกำเนิดเดิม

3.3.1.2 สร้างโลคัสที่เกิดจากเส้นขอบวงของวงกลมดังรูปที่ 18 โดยที่โลคัสนั้นจะเป็นส่วนของเส้นขอบวงที่ไม่ถูกทับซ้อนด้วยพื้นที่ของจุดก่อกำเนิดอื่นดังรูปที่ 19

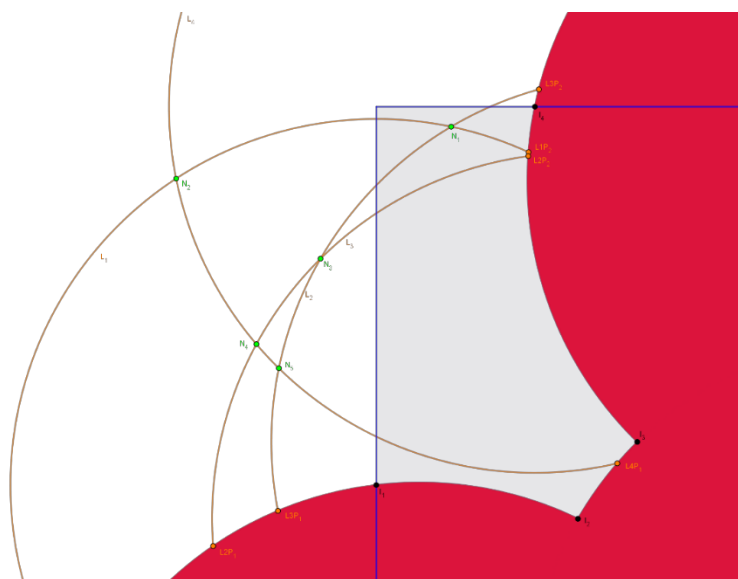


รูปที่ 18 ภาพเส้นขอบวงที่มีจุดก่อกำเนิดจากจุดตัด I_1, I_2, I_3 และ I_4



รูปที่ 19 ภาพโลคัสที่เกิดจากเส้นขอบวงที่มีจุดก่อกำเนิดเป็นจุดตัด I_1, I_2, I_3 และ I_4

3.3.1.3 สร้างจุดตัดของโลคัสแต่ละคู่ เพื่อนำมาใช้ในการพิจารณาจุดก่อกำเนิดใหม่ของแผนภาพไวโรนอยดังรูปที่ 20



รูปที่ 20 ภาพจุดก่อกำเนิดใหม่ที่เกิดจากจุดตัดของโลคัสที่มีจุดก่อกำเนิดเป็นจุดตัด N_1, N_2, N_3 และ N_4

3.3.2 สรุปผลของการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

จากการใช้ขั้นตอนวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต กับข้อมูลที่นำมาศึกษาแล้ว ได้ผลลัพธ์เป็นตารางบอกพิกัดของจุดตัดและสมการของโลคัสของแต่ละจุด และได้ตารางพิกัดของจุดก่อกำเนิดใหม่และคู่ของโลคัสที่ทำให้เกิดจุดนั้นตามตาราง 4 - ตาราง 6 และได้ภาพรวมของจุดก่อกำเนิดทั้งหมดดังรูปที่ 21

ตาราง 4 ตารางหมายเลขของจุดตัด พิกัดของจุดตัด และสมการของโลคัสของจุดตัด จากวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

จุดที่	พิกัดของจุดตัด	สมการของโลคัส
1	(98.9681356, 18.7965889)	$(x - 98.9681356)^2 + (y - 18.7965889)^2 = 0.0082223^2$
2	(98.9726682, 18.7958303)	$(x - 98.9726682)^2 + (y - 18.7958303)^2 = 0.0082223^2$
3	(98.9740007, 18.797557)	$(x - 98.9740007)^2 + (y - 18.797557)^2 = 0.0082223^2$
4	(98.97170, 18.8050859)	$(x - 98.97170)^2 + (y - 18.8050859)^2 = 0.0082223^2$
5	(98.9950572, 18.8050859)	$(x - 98.9950572)^2 + (y - 18.8050859)^2 = 0.0082223^2$
6	(98.9959216, 18.8020457)	$(x - 98.9959216)^2 + (y - 18.8020457)^2 = 0.0082223^2$
7	(98.996458, 18.8013746)	$(x - 98.996458)^2 + (y - 18.8013746)^2 = 0.0082223^2$
8	(99.0034753, 18.8045742)	$(x - 99.0034753)^2 + (y - 18.8045742)^2 = 0.0082223^2$

จุดที่	พิกัดของจุดตัด	สมการของโลคัส
9	(98.9933096, 18.77178)	$(x - 98.9933096)^2 + (y - 18.77178)^2 = 0.0082223^2$
10	(98.9908278, 18.7777235)	$(x - 98.9908278)^2 + (y - 18.7777235)^2 = 0.0082223^2$
11	(98.9907284, 18.777684)	$(x - 98.9907284)^2 + (y - 18.777684)^2 = 0.0082223^2$
12	(98.9874595, 18.77178)	$(x - 98.9874595)^2 + (y - 18.77178)^2 = 0.0082223^2$
13	(98.9776091, 18.77178)	$(x - 98.9776091)^2 + (y - 18.77178)^2 = 0.0082223^2$
14	(98.9743318, 18.7777933)	$(x - 98.9743318)^2 + (y - 18.7777933)^2 = 0.0082223^2$
15	(98.9701198, 18.7802646)	$(x - 98.9701198)^2 + (y - 18.7802646)^2 = 0.0082223^2$
16	(98.9681356, 18.7802575)	$(x - 98.9681356)^2 + (y - 18.7802575)^2 = 0.0082223^2$

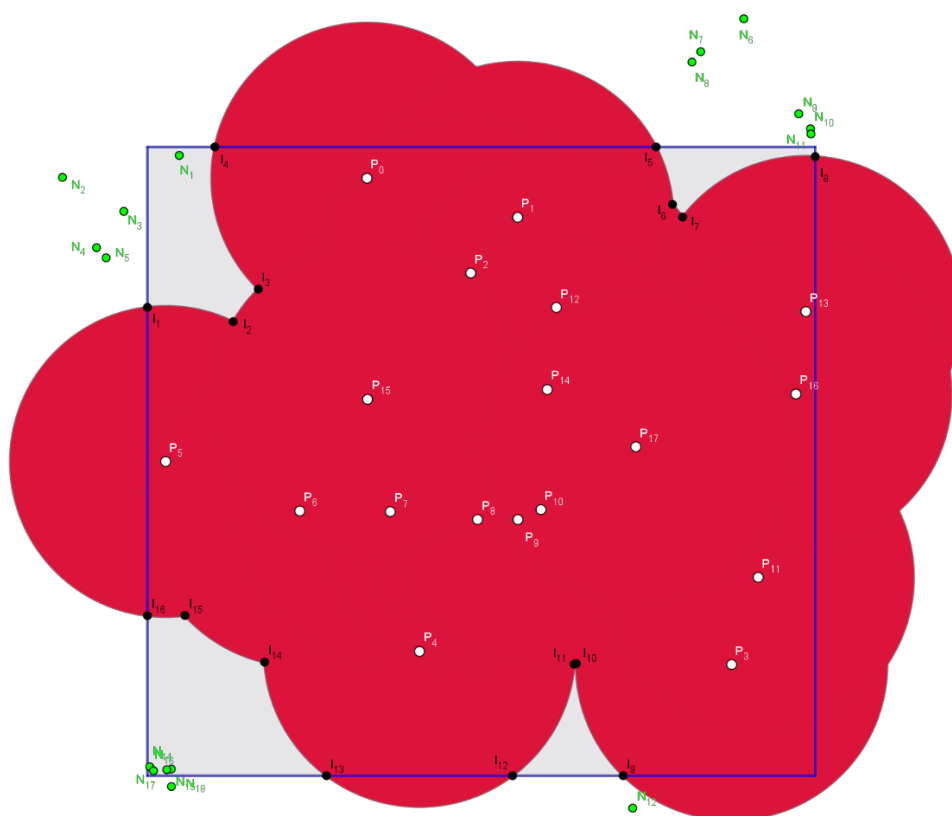
ตาราง 5 ตารางหมายเลขของจุดก่อกำเนิดใหม่ พิกัดของจุดก่อกำเนิดใหม่ และคูโลคัสที่ทำให้เกิดจุดนั้น

จุดที่	พิกัดจุดก่อกำเนิดใหม่	โลคัสที่ 1	โลคัสที่ 2
จุดก่อกำเนิดของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ I_1, I_2, I_3, I_4 และ $Boundary P_1$			
1	(98.9698197, 18.8046369)	L_1	L_3
2	(98.9636377, 18.8034719)	L_1	L_4
3	(98.9668826, 18.8016727)	L_2	L_3
4	(98.9654419, 18.7997528)	L_2	L_4
5	(98.9659467, 18.7992118)	L_3	L_4
จุดก่อกำเนิดของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ I_5, I_6, I_7, I_8 และ $Boundary P_2$			
6	(98.9996945, 18.8118757)	L_5	L_8
7	(98.9974151, 18.8101312)	L_6	L_8
8	(98.9969539, 18.8095819)	L_7	L_8
9	(99.0026039, 18.8068367)	L_6	L_7
10	(99.003223, 18.8060479)	L_5	L_7
11	(99.0032508, 18.8057725)	L_5	L_6
จุดก่อกำเนิดของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ I_9, I_{10}, I_{11} และ I_8			
12	(98.9938149, 18.770063)	L_{10}	L_{11}
13	(98.9903845, 18.7640956)	L_9	L_{12}

จุดที่	พิกัดจุดก่อกำเนิดใหม่	โลคัสที่ 1	โลคัสที่ 2
จุดก่อกำเนิดของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ $I_{13}, I_{14}, I_{15}, I_{16}$ และ $BoundaryP_4$			
14	(98.9682526, 18.7722571)	L_{14}	L_{15}
15	(98.9693944, 18.7721321)	L_{13}	L_{16}
16	(98.9691568, 18.7720988)	L_{15}	L_{16}
17	(98.9684563, 18.7720414)	L_{14}	L_{16}
18	(98.9694067, 18.770063)	L_{13}	L_{14}

ตาราง 6 ตารางผลลัพธ์ของจุดก่อกำเนิดใหม่ในแต่ละพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมพร้อมเส้นโลคัส ด้วยวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

รูปหลายเหลี่ยม	รูปภาพผลลัพธ์ของจุดก่อกำเนิดใหม่ของแต่ละพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุม
รูปหลายเหลี่ยม I_1, I_2, I_3, I_4 และ $BoundaryP_1$	
รูปหลายเหลี่ยม I_5, I_6, I_7, I_8 และ $BoundaryP_2$	



รูปที่ 21 ภาพรวมของจุดที่กำหนดใหม่ทั้งหมดด้วยวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

3.4 การใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

จากการกำหนดจุดตัด $I_1, I_2, \dots, I_n$ เป็นจุดตัดของรูปสี่เหลี่ยมกับบริเวณ A ในวิธีการนี้จะพิจารณาจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมและเส้นขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมนูนที่ไม่ถูกทับซ้อนด้วยพื้นที่ของจุดกึ่งกลางอื่น โดยเราจะนิยามเส้นขอบเขตที่มีลักษณะข้างต้นว่าเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมใหม่ที่น่าจะเป็นไปได้

ซึ่งแนวคิดนี้เกิดจากการสังเกตทฤษฎีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 3.2 โดยเลือกใช้จุดกึ่งกลางของเส้น แทนจุดมัธยฐานของรูปหลายเหลี่ยมเนื่องจากต้องการให้มีความหลากหลายในการพิจารณาจุดกึ่งกลาง เมื่อพิจารณาจุดกึ่งกลางที่ได้จากวิธีการนี้จะทำให้ได้จุดกึ่งกลางที่อยู่ภายในขอบเขตที่บรรจุจุดกึ่งกลางเดิม

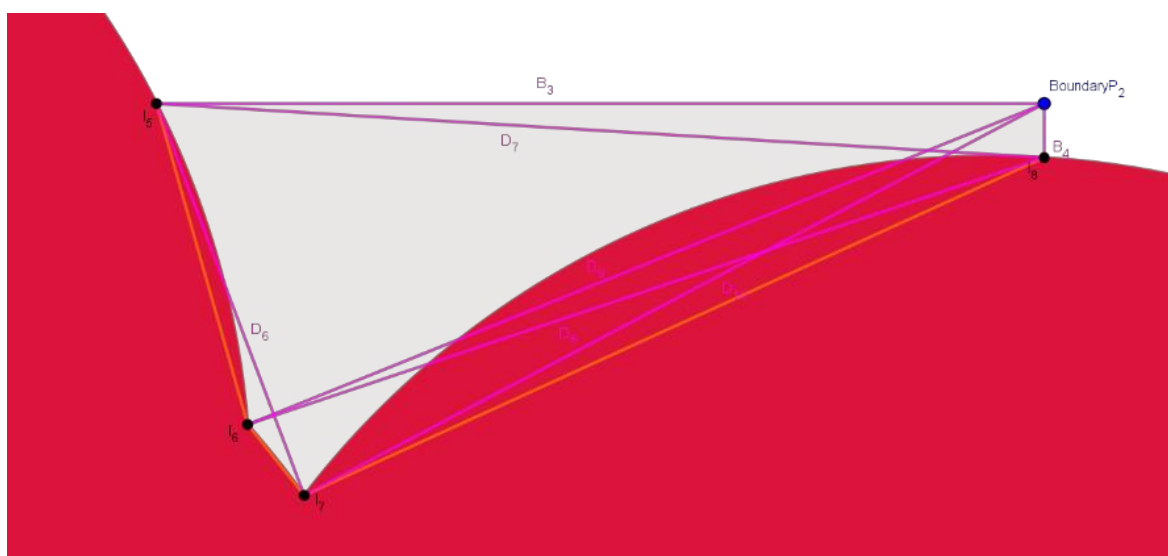
3.4.1 ขั้นตอนวิธี และตัวอย่างของการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

3.4.1.1 สร้างรูปหลายเหลี่ยมนูนจากจุดตัดระหว่างเส้นขอบวงของพื้นที่ใดๆ และเส้นขอบเขตที่บรรจุจุดกึ่งกลางเดิมทั้งหมดดังรูปที่ 22



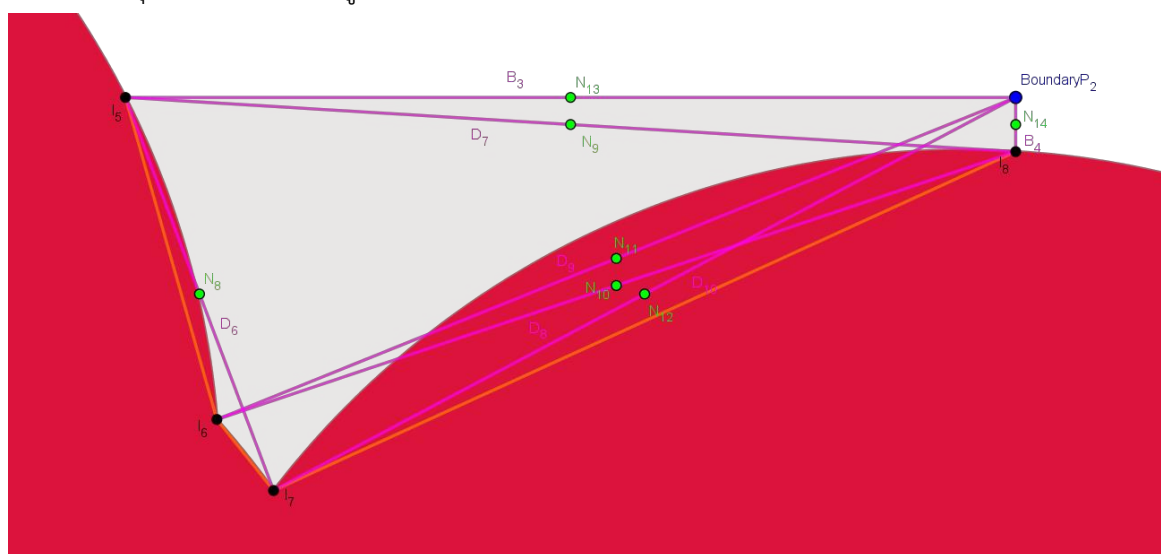
รูปที่ 22 ภาพรูปหลายเหลี่ยมนูนที่มีจุดยอดเป็นจุดตัด I_5, I_6, I_7, I_8 และจุดยอด $Boundary P_2$

3.4.1.2 สร้างเส้นทแยงมุมและพิจารณาเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยมดังรูปที่ 23



รูปที่ 23 ภาพเส้นทแยงมุมและเส้นขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นจุดตัด I_5, I_6, I_7, I_8 และจุดยอด $BoundaryP_2$

3.4.1.3 สร้างจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมและเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยมเพื่อนำมาใช้ในการพิจารณาจุดกึ่งกลางใหม่ดังรูปที่ 24



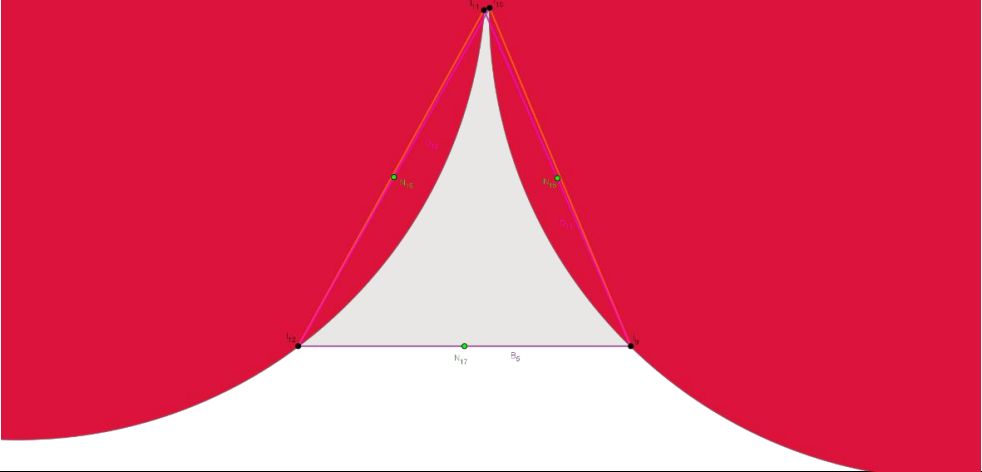
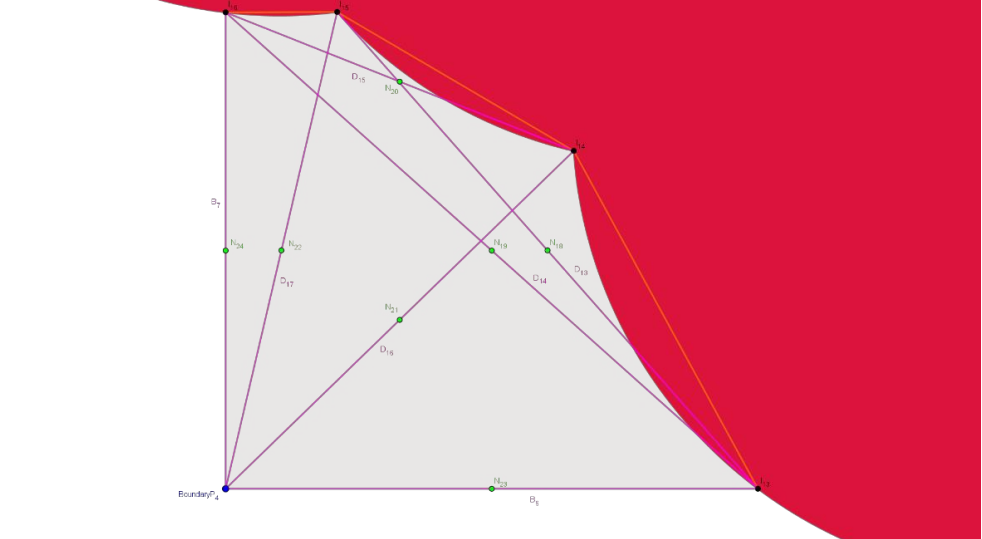
รูปที่ 24 ภาพจุดกึ่งกลางใหม่ที่เกิดจากจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมและเส้นขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นจุดตัด I_5, I_6, I_7, I_8 และจุดยอด $BoundaryP_2$

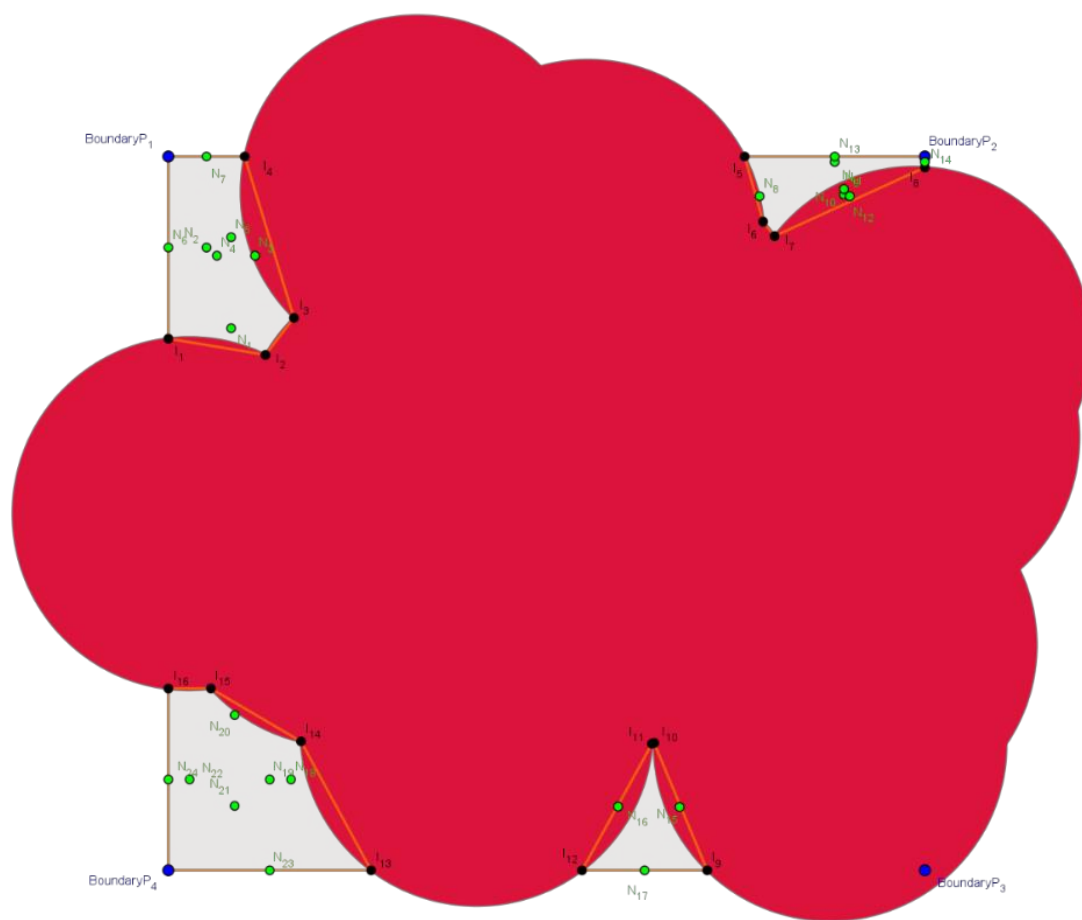
3.4.4 สรุปผลของการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

จากการใช้ขั้นตอนวิธีการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม กับ ข้อมูลที่นำมาศึกษาแล้วได้ผลลัพธ์เป็นตารางพิกัดของจุดกึ่งกลางใหม่และเส้นทแยงมุมหรือขอบเขตของรูปหลายเหลี่ยมที่ทำให้เกิดจุดนั้นตามตาราง 7 และตาราง 8 และได้ภาพรวมของจุดกึ่งกลางใหม่ทั้งหมดดังรูปที่ 25

ตาราง 7 ตารางหมายเลขของจุดกึ่งกลางใหม่ และเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

จุดที่	พิกัดจุดกึ่งกลางใหม่	เส้นทแยงมุม / เส้นขอบเขต
จุดกึ่งกลางของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ I_1, I_2, I_3, I_4 และ $BoundaryP_1$		
1	(98.9710682, 18.797073)	D_1
2	(98.9699178, 18.8008374)	D_2
3	(98.9721841, 18.8004581)	D_3
4	(98.9704019, 18.8004581)	D_4
5	(98.9710682, 18.8013214)	D_5
6	(98.9681356, 18.8008374)	B_1
7	(98.9699178, 18.8050859)	B_2
จุดกึ่งกลางของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ I_5, I_6, I_7, I_8 และ $BoundaryP_2$		
8	(98.9957576, 18.8032303)	D_6
9	(98.9992663, 18.8048301)	D_7
10	(98.9996984, 18.80331)	D_8
11	(98.9996984, 18.8035658)	D_9
12	(98.9999666, 18.8032303)	D_{10}
13	(98.9992663, 18.8050859)	B_3
14	(99.0034753, 18.8048301)	B_4
จุดกึ่งกลางของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ I_9, I_{10}, I_{11} และ I_8		
15	(98.992019, 18.774730)	D_{11}
16	(98.9891436, 18.7747517)	D_{12}
17	(98.9903845, 18.77178)	B_5
จุดกึ่งกลางของพื้นที่ที่ปกคลุมโดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดได้แก่ $I_{13}, I_{14}, I_{15}, I_{16}$ และ $BoundaryP_4$		
18	(98.9738645, 18.7760223)	D_{13}
19	(98.9718724, 18.7760187)	D_{14}
20	(98.9712337, 18.7790254)	D_{15}

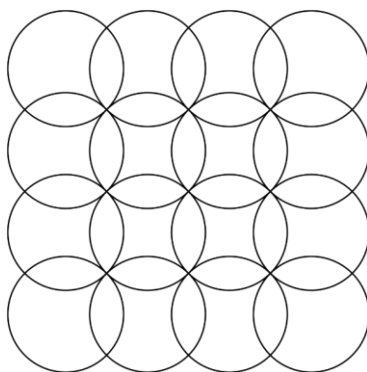
รูปหลายเหลี่ยม	รูปภาพผลลัพธ์ของจุดก่อกำเนิดใหม่ของแต่ละพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุม
รูปหลายเหลี่ยม I_9, I_{10}, I_{11} และ I_8	
รูปหลายเหลี่ยม $I_{13}, I_{14}, I_{15}, I_{16}$ และ $BoundaryP_4$	



รูปที่ 25 ภาพรวมของจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดด้วยวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

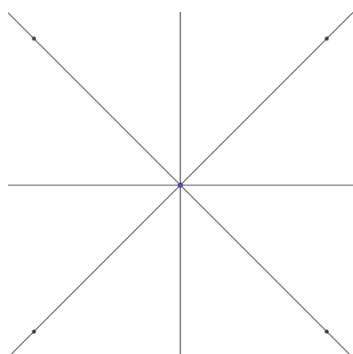
3.5 การเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

วิธีการนี้เป็นวิธีการที่เราจะเพิ่มจุดก่อกำเนิดใหม่ครั้งละหลายจุด ซึ่งเราได้แนวคิดนี้ได้จากการศึกษาปัญหาการปกคลุมพื้นที่ โดยการสร้างวงกลมที่มีลักษณะตามรูปที่ 26 ซึ่งเป็นวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทที่สามารถปกคลุมพื้นที่ได้อย่างทั่วถึง แล้วทำการพิจารณาจุดที่จะใช้เป็นจุดเริ่มต้นในการสร้างวงกลมด้วยวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต โดยจะพิจารณาจุดก่อกำเนิดใหม่จากจุดศูนย์กลางของวงกลมข้างต้น

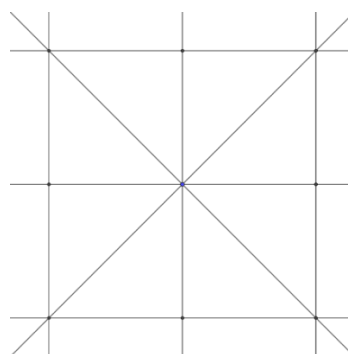


รูปที่ 26 ภาพลักษณะของวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

โดยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทนั้นเกิดจากการวางจุดบนโครงตาข่ายในลักษณะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ทุกจุดทำมุมกันเป็นมุมฉาก ซึ่งเราสามารถสร้างได้จากการวางจุดเริ่มต้นหนึ่งจุด จากนั้นสร้างเส้นตรงที่ผ่านจุดนั้น ซึ่งขนานกับแกน x และแกน y แล้วสร้างเส้นตรงแบ่งครึ่งมุมของเส้นตรงทั้งสอง สร้างจุดที่มีระยะทางเป็นสองเท่าของรัศมีตามเส้นตรงแบ่งครึ่งมุมดังรูปที่ 27 จากนั้นสร้างเส้นตรงตั้งฉากแกนทั้ง 2 ที่ผ่านจุดใหม่นั้น แล้วสร้างจุดที่ได้จากการตัดกันของเส้นตรงที่ตั้งฉากทั้งหมดดังรูปที่ 28 ได้เป็นลักษณะของจุดบนโครงตาข่ายในลักษณะสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กล่าวมาข้างต้นดังรูปที่ 29 ซึ่งเมื่อกางวงกลมจากรัศมีแล้วจะได้กริดวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทดังรูปที่ 30



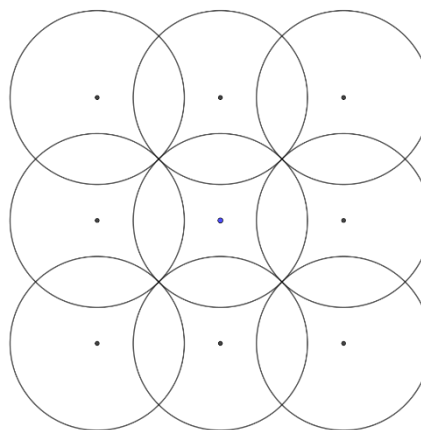
รูปที่ 27 รูปจุดที่มีระยะทางห่างกันเป็นสองเท่าของรัศมีที่อยู่บนเส้นตรงแบ่งครึ่งมุม



รูปที่ 28 รูปของจุดที่ได้เพิ่มเติมจากการตัดกันของแต่ละเส้นตรงที่ตั้งฉากแกนของแต่ละจุด



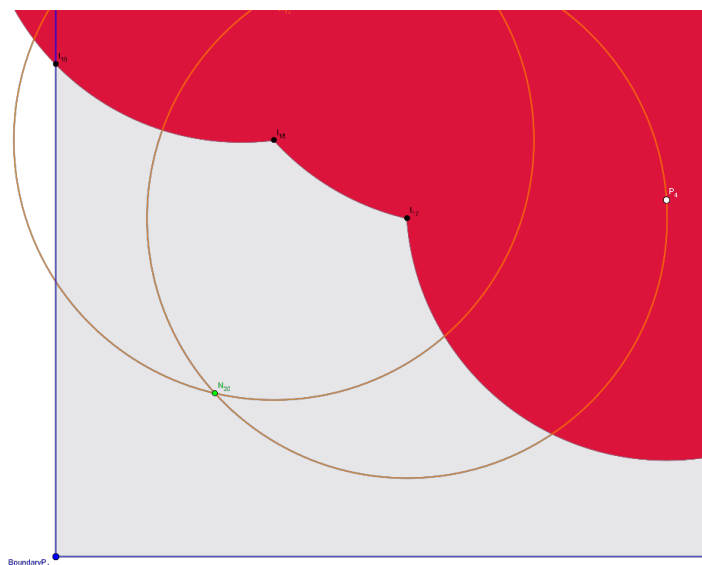
รูปที่ 29 รูปของจุดบนโครงตาข่ายในลักษณะ
สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ได้จากการสร้างข้างต้น



รูปที่ 30 รูปของกริดวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทที่ได้
จากการสร้างข้างต้น

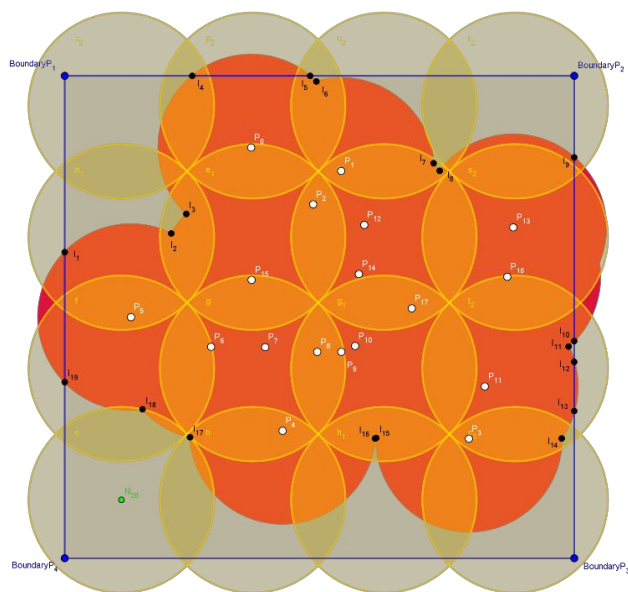
3.5.1 ขั้นตอนวิธี และตัวอย่างของการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

1. สร้างจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นจากเส้นขอบวงของที่เกิดจากจุดตัดจากจุดตัดระหว่างเส้นขอบวงของพื้นที่ใดๆ และเส้นขอบเขตที่บรรจุจุดก่อกำเนิดเดิมทั้งหมดดังรูปที่ 31



รูปที่ 31 ภาพการสร้างจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นจากจุดตัด I_{17} และ I_{18}

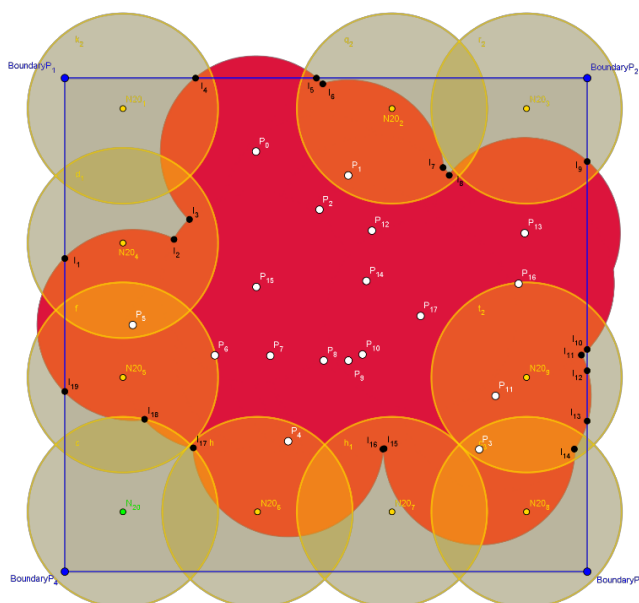
2. สร้างวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทให้ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมดจากจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น
ดังรูปที่ 32



รูปที่ 32 ภาพวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทที่เกิดจากจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นเป็นจุด N_{20}

3. นำวงกลมที่พื้นที่ทั้งหมดทับซ้อนกับพื้นที่ของจุดก่อกำเนิดเดิมออก รวมถึงวงกลมที่ทับซ้อนพื้นที่เดียวกันแต่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมได้น้อยกว่าดังรูปรูปที่ 33

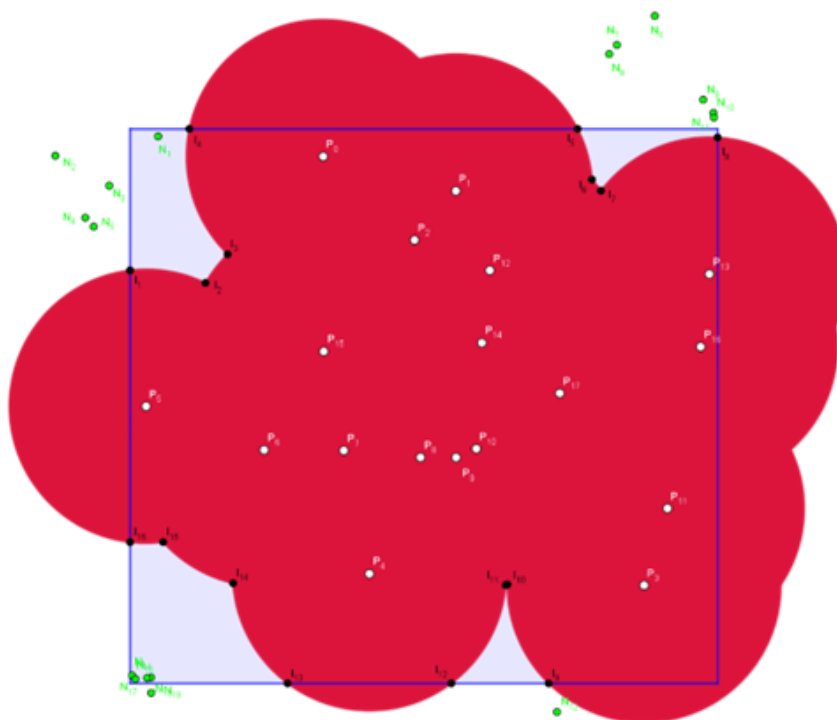
4. สร้างจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เหลือ จากนั้นเลือกชุดที่มีจำนวนอยู่ภายใต้จำนวนวงกลมขั้นต่ำที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมดเพื่อนำไปพิจารณาเป็นจุดก่อกำเนิดใหม่ดังรูปที่ 33



รูปที่ 33 ภาพวงกลมและจุดศูนย์กลางที่เป็นผลลัพธ์จากการตัดวงกลมส่วนเกินของวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท
ที่มีจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นคือจุด N_{20}

3.5.2 สรุปผลการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทบนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

จากการใช้ขั้นตอนวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทบนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่ ได้ผลลัพธ์เป็นภาพรวมของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ตั้งต้นทั้งหมดดังรูปที่ 34 และตารางพิกัดของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ตั้งต้น และจำนวนของจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดของแต่ละจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ตั้งต้นตามตาราง 9 และตาราง 10



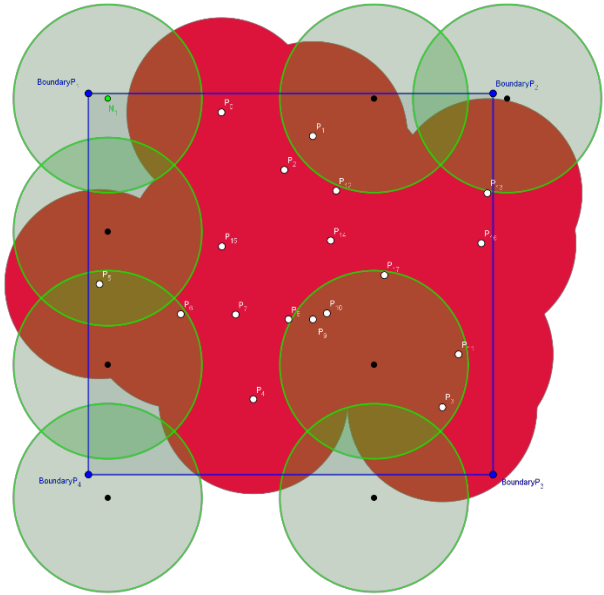
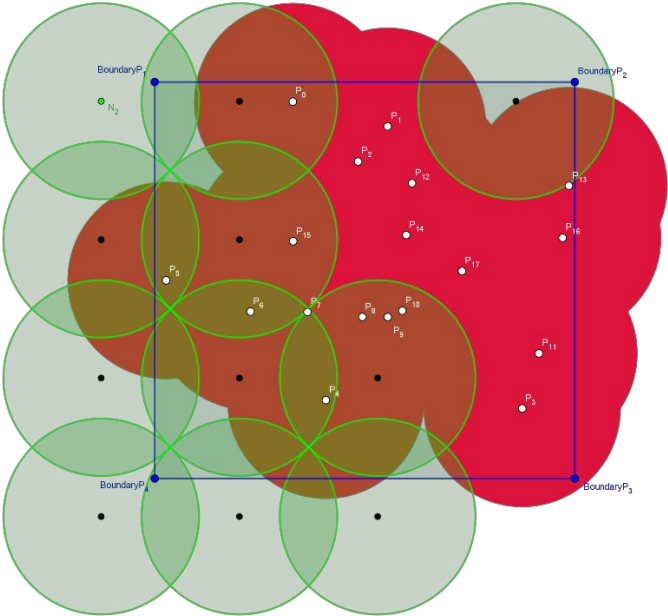
รูปที่ 34 ภาพจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ตั้งต้นทั้งหมดที่ได้จากการตัดกันของเส้นขอบวงของจุดตัดของพื้นที่และขอบเขตบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

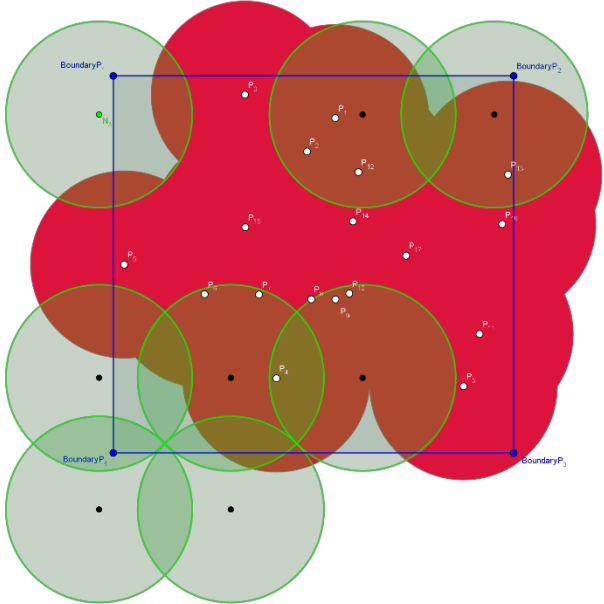
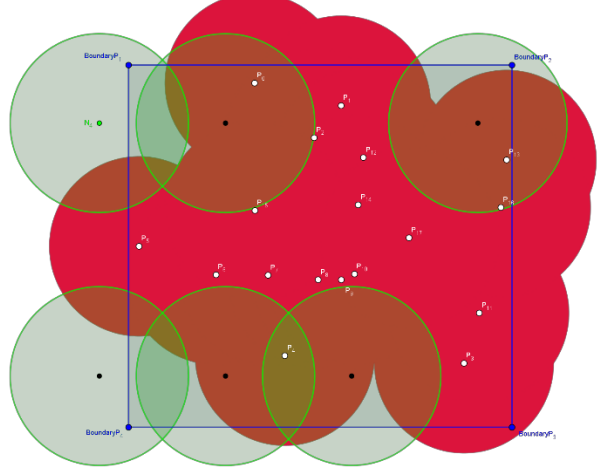
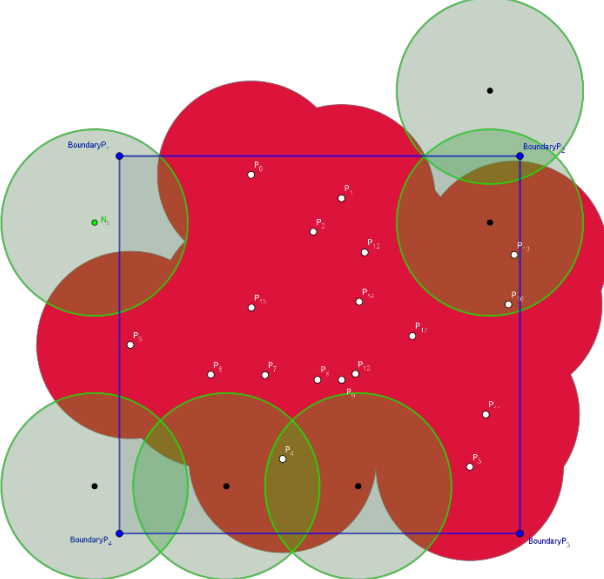
ตาราง 9 ตารางหมายเลขของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ตั้งต้น และพิกัดของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ตั้งต้นนั้นๆ

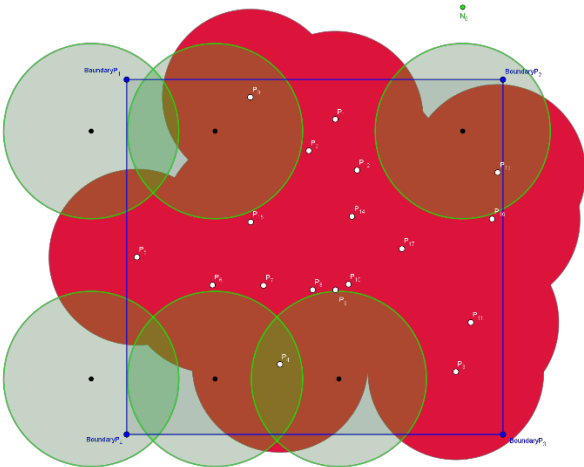
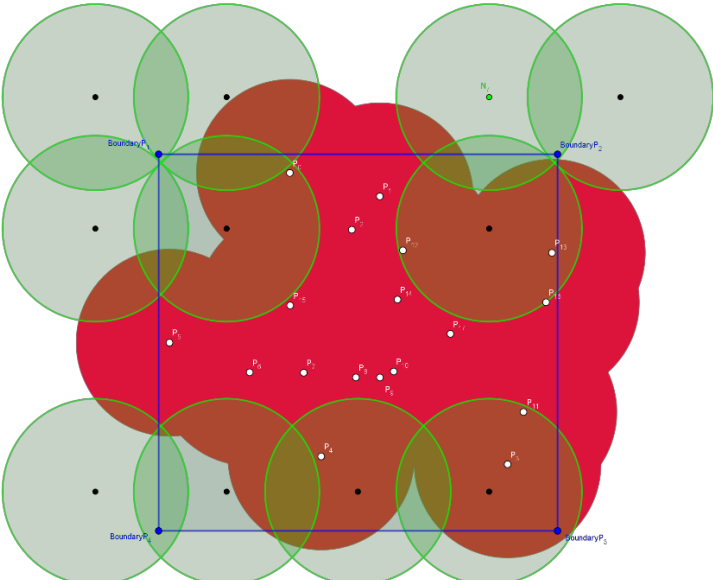
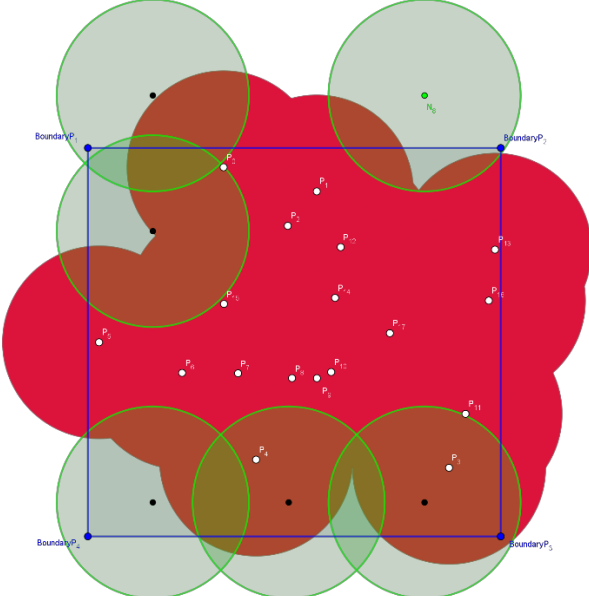
จุดที่	พิกัดจุดก่อกำเนิดใหม่	จุดที่	พิกัดจุดก่อกำเนิดใหม่
1	(98.9698197, 18.8046369)	2	(98.9636377, 18.8034719)
3	(98.9668826, 18.8016727)	4	(98.9654419, 18.7997528)
5	(98.9659467, 18.7992118)	6	(98.9996945, 18.8118757)
7	(98.9974151, 18.8101312)	8	(98.9969539, 18.8095819)
9	(99.0026039, 18.8068367)	10	(99.003223, 18.8060479)
11	(99.0032508, 18.8057725)	12	(98.9938149, 18.770063)

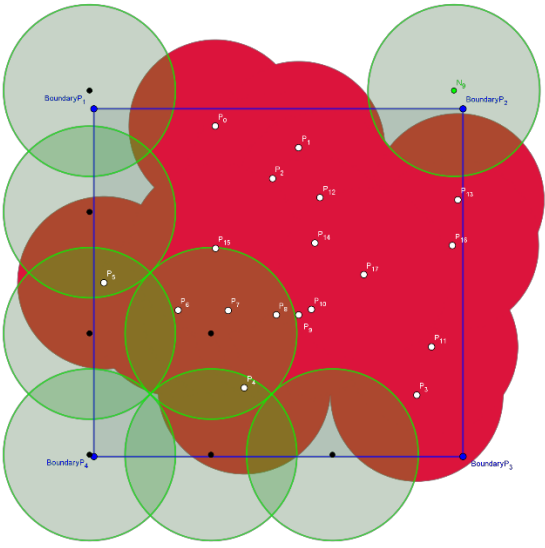
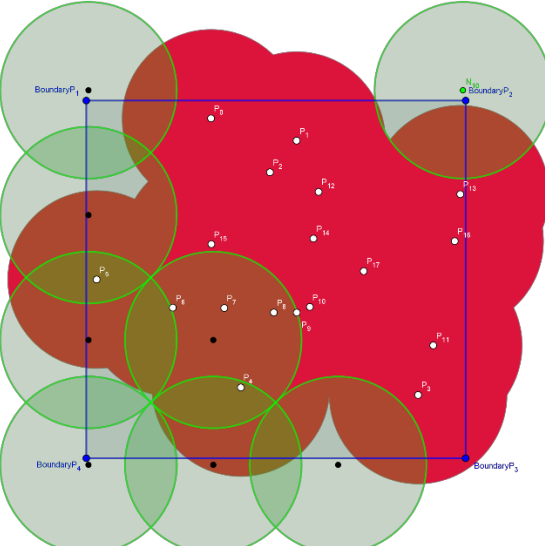
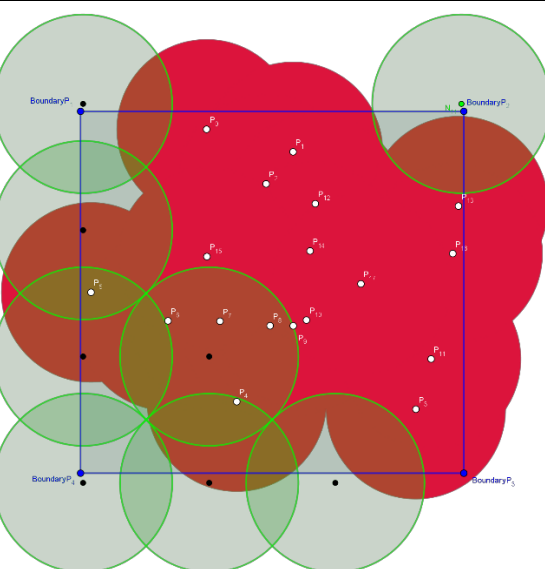
จุดที่	พิกัดจุดก่อกำเนิดใหม่	จุดที่	พิกัดจุดก่อกำเนิดใหม่
13	(98.9903845, 18.7640956)	14	(98.9682526, 18.7722571)
15	(98.9693944, 18.7721321)	16	(98.9691568, 18.7720988)
17	(98.9684563, 18.7720414)	18	(98.9694067, 18.770063)

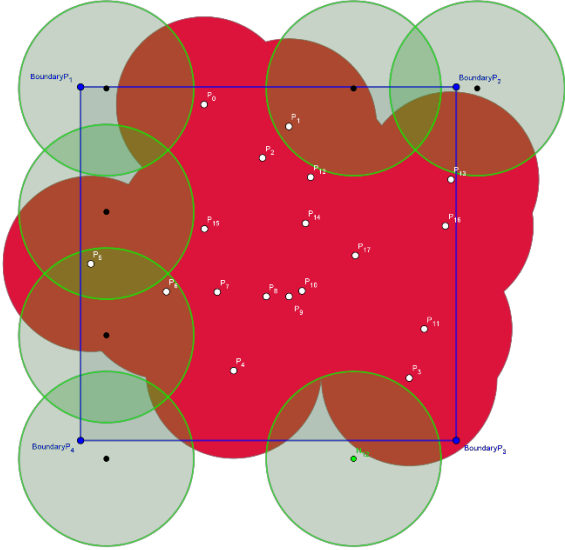
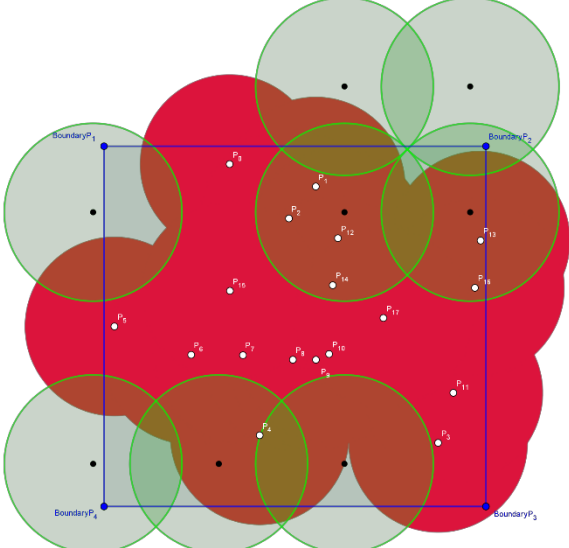
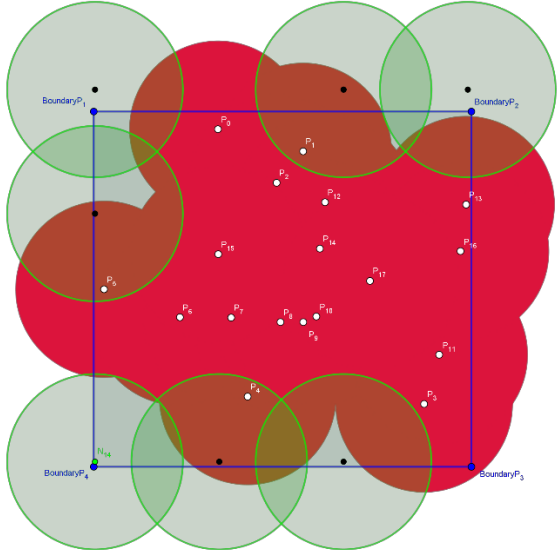
ตาราง 10 ตารางจำนวนของจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดของแต่ละจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นจากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดทีละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

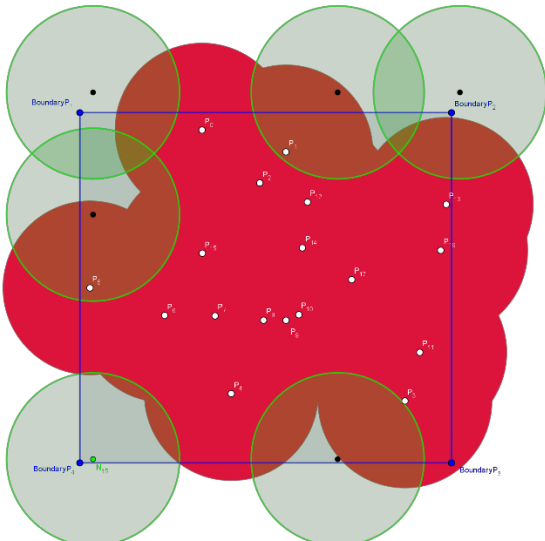
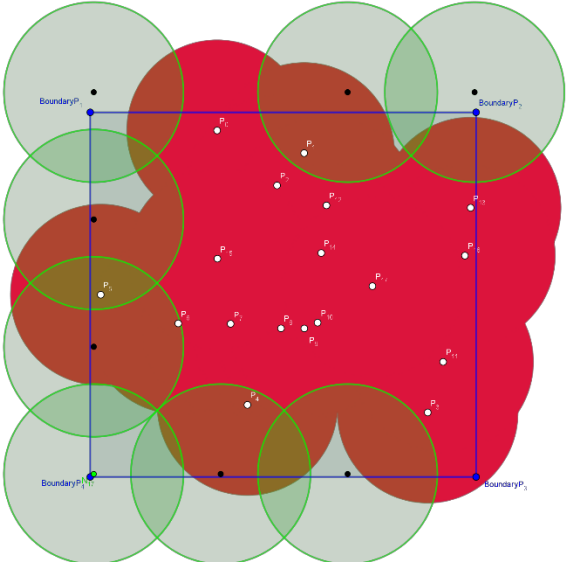
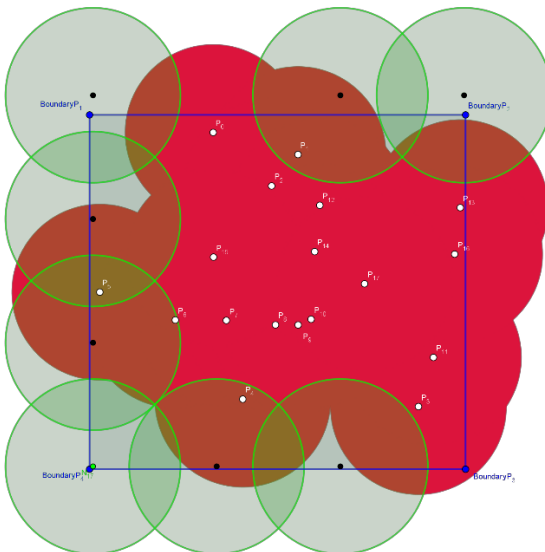
จุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุดก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_1	8	
N_2	11	

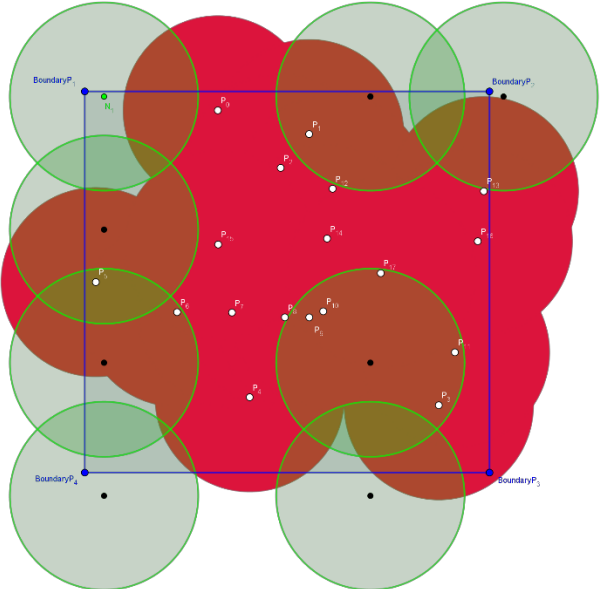
จุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุดก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_3	8	 The diagram for N_3 shows a red region containing 8 new seed points, labeled P_1 through P_8. Each point is surrounded by a green circular boundary, labeled BoundaryP1 through BoundaryP8. The points are distributed within the red region, with some overlapping boundaries.
N_4	6	 The diagram for N_4 shows a red region containing 6 new seed points, labeled P_1 through P_6. Each point is surrounded by a green circular boundary, labeled BoundaryP1 through BoundaryP6. The points are distributed within the red region, with some overlapping boundaries.
N_5	6	 The diagram for N_5 shows a red region containing 6 new seed points, labeled P_1 through P_6. Each point is surrounded by a green circular boundary, labeled BoundaryP1 through BoundaryP6. The points are distributed within the red region, with some overlapping boundaries.

จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_6	6	
N_7	11	
N_8	6	

จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_9	8	
N_{10}	8	
N_{11}	8	

จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{12}	7	
N_{13}	8	
N_{14}	7	

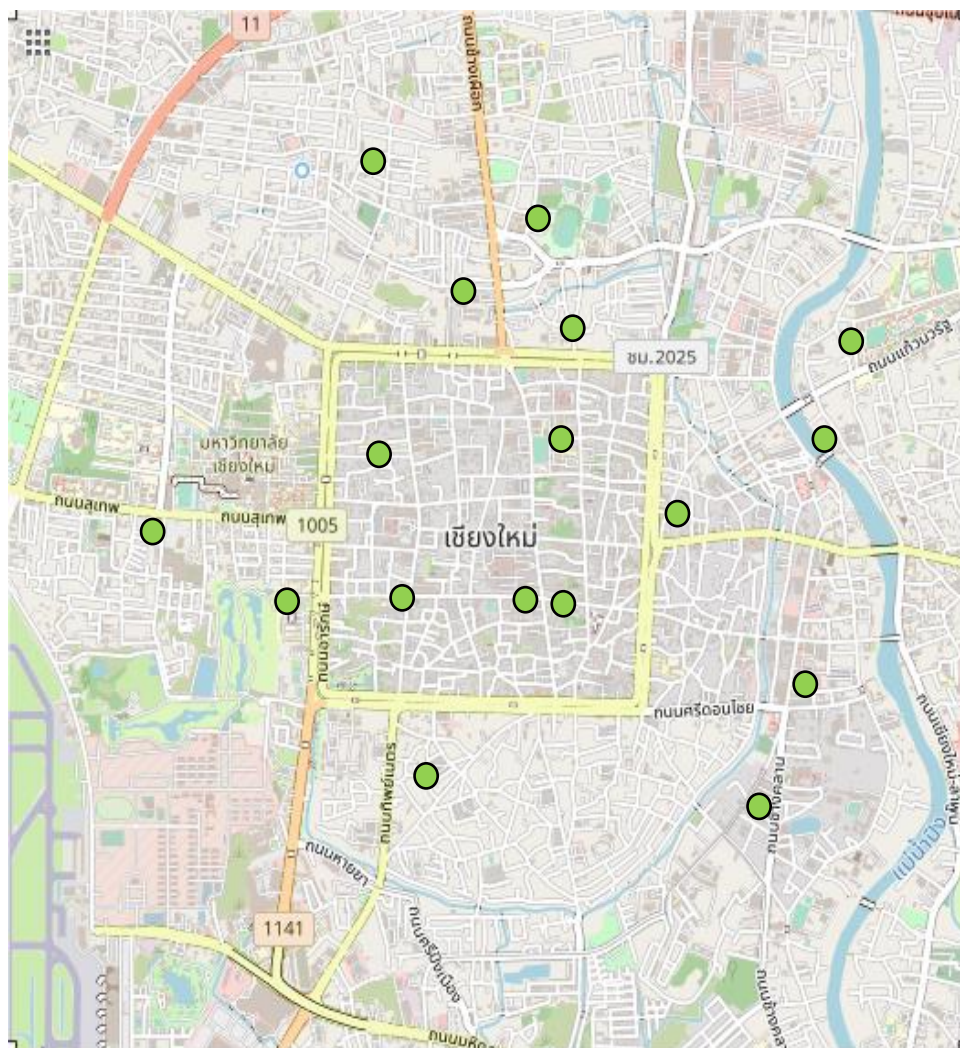
จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{15}	6	
N_{16}	8	
N_{17}	8	

จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{18}	8	

จากตารางข้างต้นเราจะนำเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดคือ 6 วง เนื่องจากไม่สามารถหาวงกลมที่สอดคล้องขอบเขตบนต่ำที่สุดของจำนวนวงกลมที่ปกคลุมขั้นต่ำได้ ได้แก่เซตที่มีจุดก่อกำเนิดตั้งต้น ได้แก่จุด N_4, N_5, N_6, N_8 และ N_{15} ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการพิจารณาความเหมาะสมของจุดก่อกำเนิดใหม่ในหัวข้อถัดไป

3.5.3 การเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมือง จังหวัดเชียงใหม่

อย่างไรก็ตาม ในการศึกษาด้วยวิธีการนี้เราทำการศึกษาเพิ่มเติมโดย ขยายบริเวณของขอบเขต ออกเป็นพื้นที่ประมาณ 1.5 กิโลเมตรรอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่ดังรูปที่ 35 เพื่อให้ได้พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้วย วงกลมที่มากขึ้น เนื่องจากเราต้องการลองศึกษาวิธีการข้างต้นกับพื้นที่ที่กว้างขึ้นจากเดิม เพื่อดูว่าวิธีการนี้จะมี ความเหมาะสมมากขึ้นหรือไม่เมื่อขยายพื้นที่

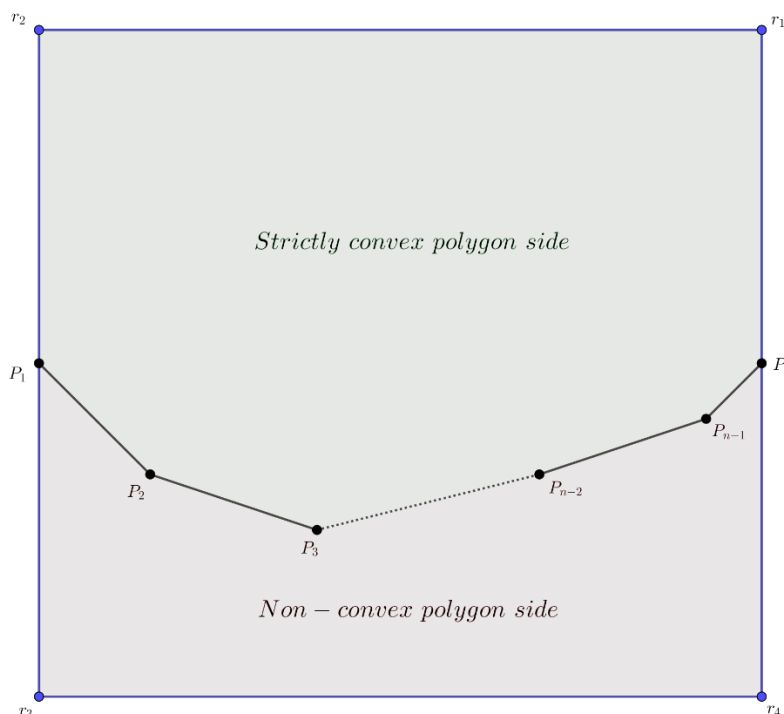


รูปที่ 35 ภาพขอบเขตประมาณ 1.5 กิโลเมตรรอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

3.5.3.1 การตรวจสอบลักษณะของรูปหลายเหลี่ยมที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด

เนื่องจากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิบนพื้นที่การขยายขอบเขตของ พื้นที่ในการศึกษาตามที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ ทำให้จำเป็นต้องกำหนดวิธีในการหาจำนวนวงกลมขั้นต่ำมากที่สุด และน้อยที่สุดที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด

ทฤษฎีบท 3.2.26 ให้ R เป็นรูปหลายเหลี่ยมมุมซึ่งมีจุดยอด r_1, r_2, r_3, r_4 และมีจุด $P_1, P_2, \dots, P_n$ เป็นจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมมุม R โดยที่ $r_1, r_2, P_1, P_2, \dots, P_n$ เป็นรูปหลายเหลี่ยมมุมโดยแท้ แล้วรูปหลายเหลี่ยม $r_3, r_4, P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$ เป็นรูปหลายเหลี่ยมเว้าดังรูปที่ 36



รูปที่ 36 รูปตัวอย่างของทฤษฎีบท 3.2.26 โดยพื้นที่สีเขียวคือรูปหลายเหลี่ยมมุมแท้ และพื้นที่สีแดงคือรูปหลายเหลี่ยมเว้า

พิสูจน์ ให้รูปสี่เหลี่ยมมุมหนึ่งมีจุดภายในที่สามารถแบ่งรูปนี้ออกเป็นสองส่วนได้ โดยที่เมื่อลากเส้นผ่านจุดแล้ว ได้ว่ามุมภายในทุกมุมของด้านหนึ่งที่ถูกมีขนาดไม่เกิน 180 องศา นั่นคือมุมภายในของด้านตรงข้ามจะมีมุมที่ขนาดมากกว่า 180 องศา ทำให้ด้านนั้นไม่เป็นรูปหลายเหลี่ยมมุมตามนิยาม 2.1.9 ดังนั้นด้านตรงข้ามจะเป็นรูปหลายเหลี่ยมเว้า $\square$

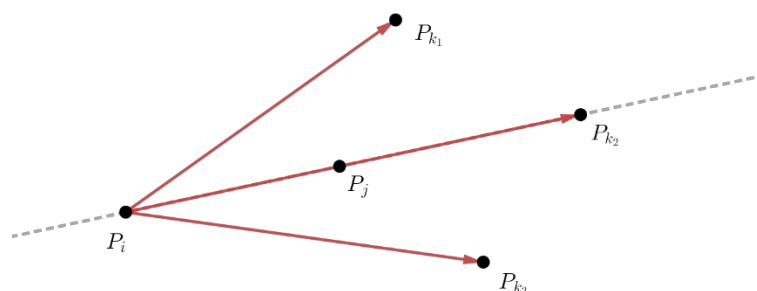
นิยาม 3.5.27 กำหนดให้จุด $P_i(x_i, y_i)$, $P_j(x_j, y_j)$ และ $P_k(x_k, y_k)$ เป็นจุดในระนาบที่เรียงกันตามเข็มนาฬิกา โดยจะทำการตรวจสอบทิศทาง (orientation test) ของจุด P_k ว่ามีทิศทางอยู่ทางซ้าย-ขวา หรือมีทิศทางเดียวกับเส้นตรง P_iP_j โดยพิจารณาเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_iP_j}$ และ $\overrightarrow{P_iP_k}$ จะได้ว่า

- จุด P_k จะอยู่บนเส้น P_iP_j ก็ต่อเมื่อ $\begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix} = 0$ ตามจุด P_{k_1} ดังรูปที่ 37
- จุด P_k จะมีทิศทางเป็นทางซ้ายของเส้น P_iP_j ก็ต่อเมื่อ $\begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix} > 0$ ตามจุด P_{k_2} ดังรูปที่ 37

- จุด P_k จะมีทิศทางเป็นทางขวาของเส้น P_iP_j ก็ต่อเมื่อ $\begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix} < 0$ ตามจุด P_{k_3} ดังรูปที่ 37

ทั้งนี้การตรวจสอบทิศทางการอยู่ด้านซ้ายและด้านขวา จะสมมูลกับการตรวจสอบด้วยดีเทอร์มิแนนต์

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} \text{ กล่าวคือ } \det(P_i, P_j, P_k) = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}$$

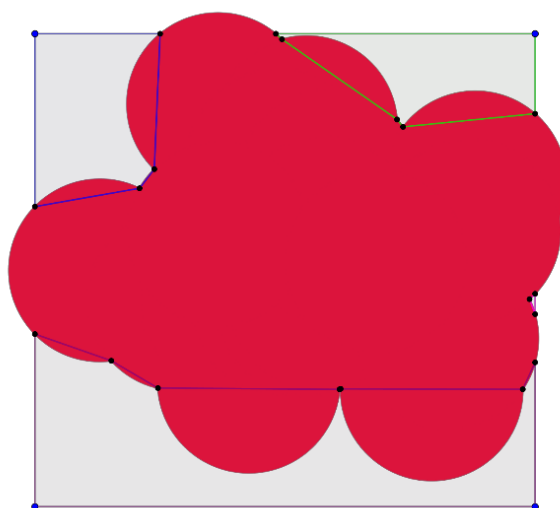


รูปที่ 37 รูปทิศทางของจุด P_k ต่างๆ เทียบกับเส้นตรง P_iP_j

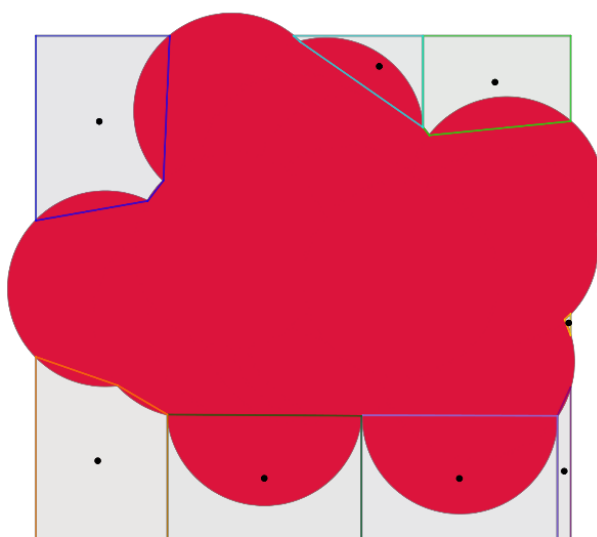
เมื่อเราได้ว่ารูปหลายเหลี่ยมที่ปกคลุมพื้นที่ว่างเป็นรูปหลายเหลี่ยมเว้าตาม **ทฤษฎีบท 3.2.26** แล้วจะทำการแบ่งรูปหลายเหลี่ยมนั้นจากรูปหลายเหลี่ยมเว้านั้น เริ่มจากการตรวจสอบทิศทางของจุดตามนิยาม 3.5.27 โดยเมื่อมีทิศทางเป็นทางซ้ายแล้วจะสร้างเส้นตั้งฉากของจุดก่อนหน้าของจุดที่มีทิศทางซ้ายกับด้านที่ยาวที่สุดซึ่งเป็นขอบเขตที่บรรจุจุดก่อนกำเนิดเดิมของรูปหลายเหลี่ยมเว้า

3.5.3.2 การวิเคราะห์ขอบเขตบนของจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดที่สามารถปกคลุมพื้นที่ 1.5 กิโลเมตรรอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

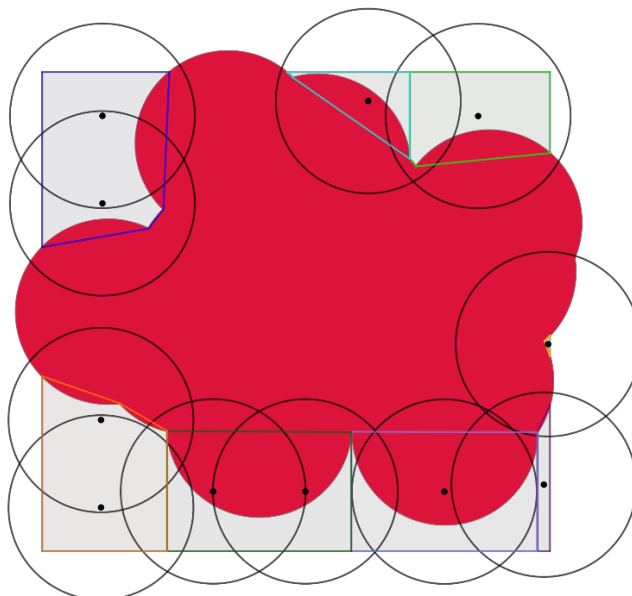
จากแนวคิดตามหัวข้อ 3.2 จะสังเกตได้ว่าที่จุดมัธยฐานของรูปหลายเหลี่ยมมนั้นสามารถสร้างวงกลมที่มากกว่า 1 วง ที่ปกคลุมพื้นที่ทั้งหมดได้ จึงทำการสร้างวงกลม 2 วงที่มีจุดศูนย์กลางเกิดจากระยะ 1 ใน 4 และ 3 ใน 4 ของด้านที่ยาวที่สุดของรูปหลายเหลี่ยมมนั้นที่เกิดจากเส้นขอบเขต ซึ่งถูกฉายให้อยู่บนเส้นขนานของด้านนั้นที่บรรจุจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดของรูปหลายเหลี่ยมนั้นดังรูปที่ 38 - รูปที่ 40



รูปที่ 38 ภาพรูปหลายเหลี่ยมของพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมที่ได้จากแต่ละจุดตัดของพื้นที่และเส้นขอบเขต



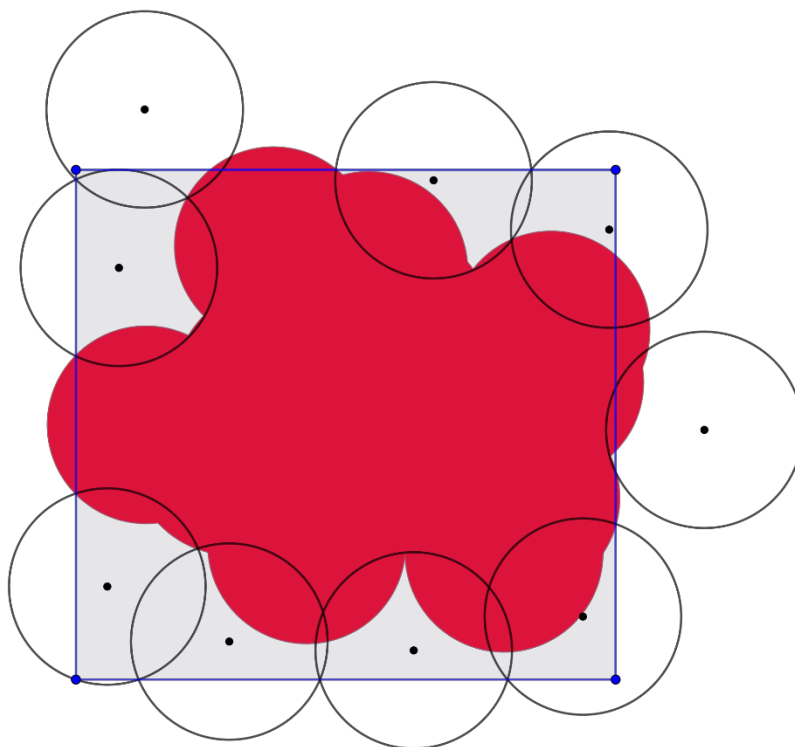
รูปที่ 39 ภาพรูปหลายเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งรูปหลายเหลี่ยมไว้ ด้วยวิธีการตามหัวข้อ 3.2



รูปที่ 40 ภาพจำนวนวงกลมขั้นต่ำมากที่สุดที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด

นอกจากนี้เราจะเห็นว่าที่รูปหลายเหลี่ยมมุมที่มีจุด I_{14}, I_{15} และ I_{16} เป็นจุดยอด สามารถใช้จุดมัธยฐานของรูปหลายเหลี่ยมนั้นได้ เนื่องจากเมื่อกางพื้นที่ของจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดทั้งหมดซึ่งปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมดแล้ว พบว่าไม่มีความจำเป็นในการแบ่งรูปหลายเหลี่ยมข้างต้นเพื่อให้มีวงกลมที่มากกว่า 1 วง ในการปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด ดังนั้นจำนวนวงกลมขั้นต่ำมากที่สุดที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด คือ 11 วง

แต่เรามองว่าวิธีการก่อนหน้านี้อาจจะยังไม่ใช่ว่าขอบเขตบนต่ำที่สุดของจำนวนวงกลมที่สามารถปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมได้ วิธีที่เราจะใช้ในการหาขอบเขตบนต่ำที่สุดของจำนวนวงกลมขั้นต่ำที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด ใช้วิธีวิธีเดียวกับในการหาจุดก่อกำเนิดในหัวข้อ 3.3 นั่นคือการสร้างวงกลมที่มีจุดก่อกำเนิดเกิดจากการตัดกันของเส้นขอบวงที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดตัดระหว่างเส้นขอบวงของพื้นที่ใดๆ และเส้นขอบเขตที่บรรจุจุดก่อกำเนิดเต็มทั้งหมด เนื่องจากวงกลม 1 วงไม่สามารถปกคลุมแต่ละพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมดได้ จึงสร้างวงกลมจากจุดตัดที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมนั้นได้มากที่สุดขึ้นมา จากนั้นจึงสร้างวงกลมต่อไปจากจุดตัดทั้งหมดที่นำวงกลมก่อนหน้านี้มาพิจารณาด้วย ได้จำนวนวงกลมน้อยที่สุดที่สามารถปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมได้ทั้งหมด คือ 9 วงดังรูปที่ 41

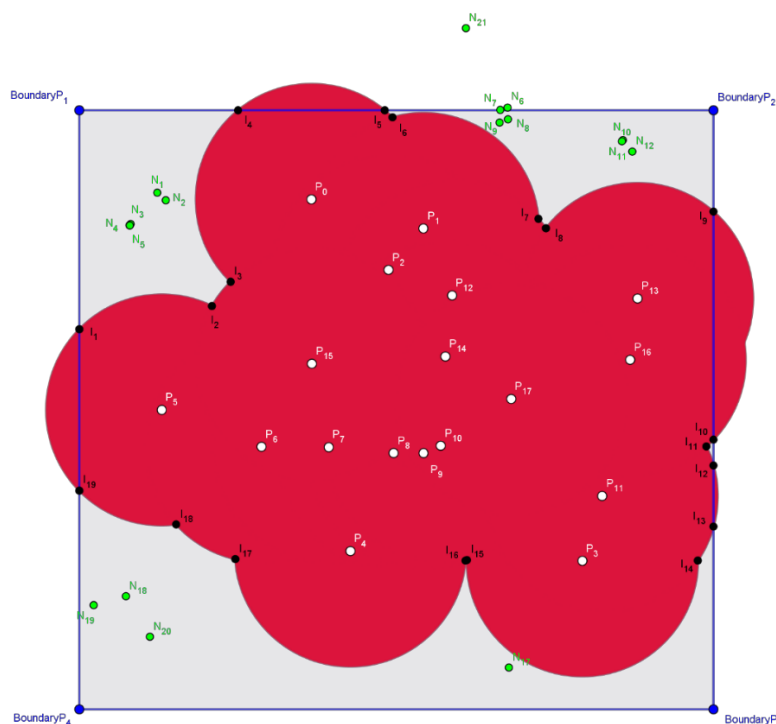


รูปที่ 41 ภาพขอบเขตบนต่ำที่สุดของจำนวนวงกลมชั้นต่ำที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด

โดยการหาวงกลมที่ปกคลุมที่น้อยที่สุดด้วย 2 วิธีการข้างต้นจะได้ว่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุด คือ 9 แต่อย่างไรก็ตามเราก็เลือกวิเคราะห์เขตของจุดก่อกำเนิดวงกลมที่สามารถสร้างวงกลมได้จำนวน 9-11 วง เท่านั้น

3.5.2.3 สรุปผลการเพิ่มจุดก่อกำเนิดทีละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

จากการใช้ขั้นตอนวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดทีละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท กับข้อมูลที่นำมาศึกษาแล้วได้ผลลัพธ์เป็นภาพรวมของจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นทั้งหมด รวมถึงตารางจำนวนของจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดตามตาราง 11 และตาราง 12 และภาพของวงกลมที่ได้จากแต่ละจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น ดังรูปที่ 42

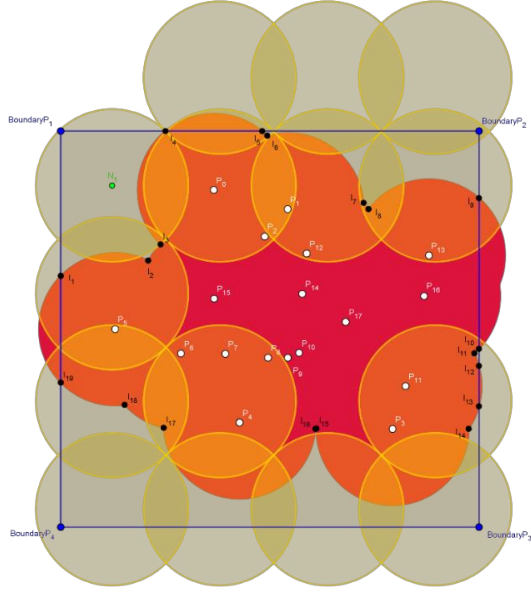
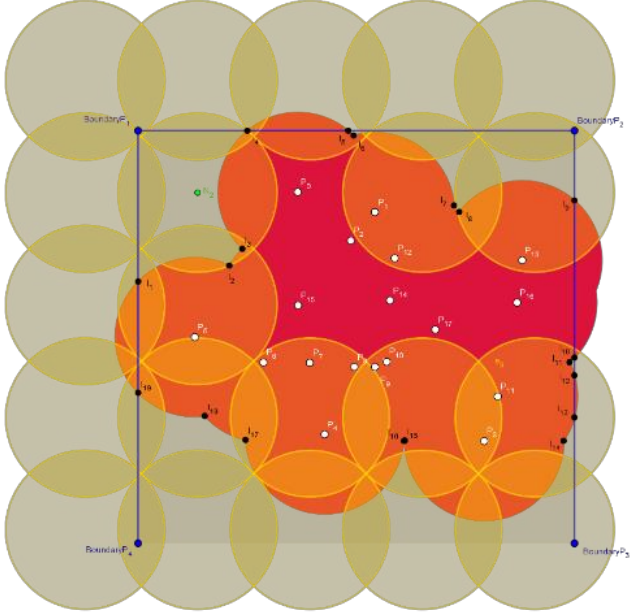


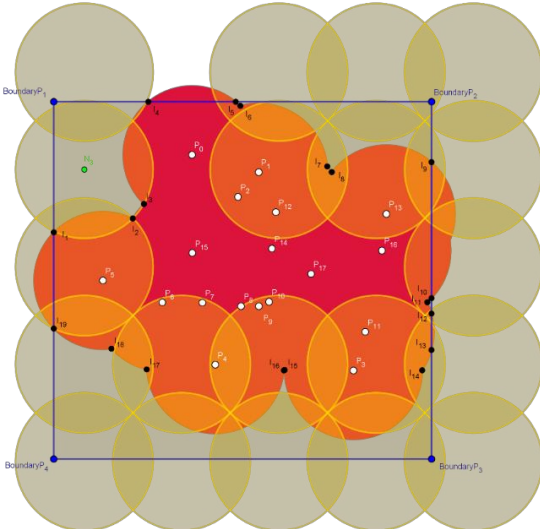
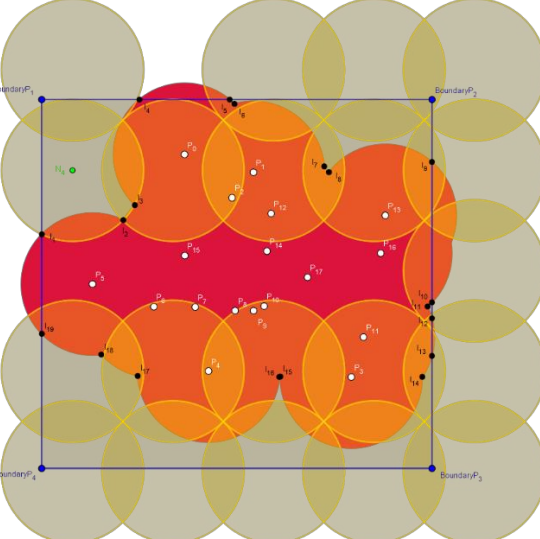
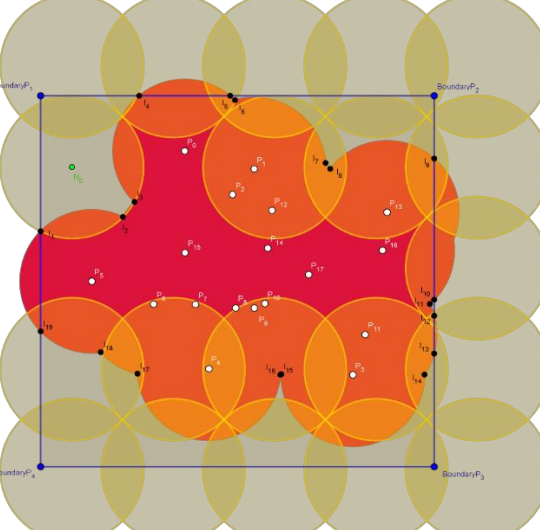
รูปที่ 42 ภาพจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นทั้งหมดที่ได้จากการตัดกันของเส้นขอบวงของจุดตัดของพื้นที่และ
ขอบเขตบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

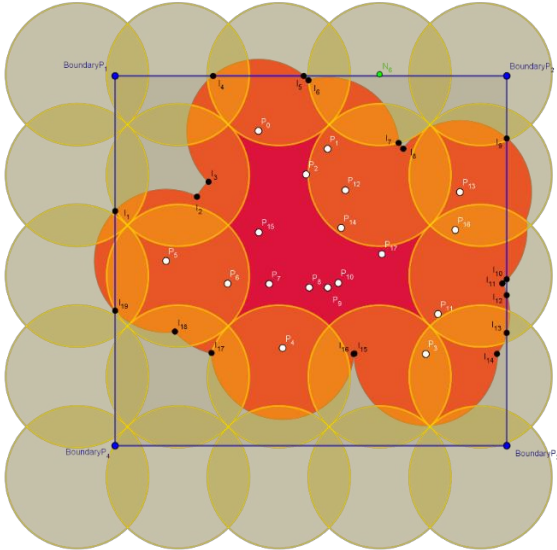
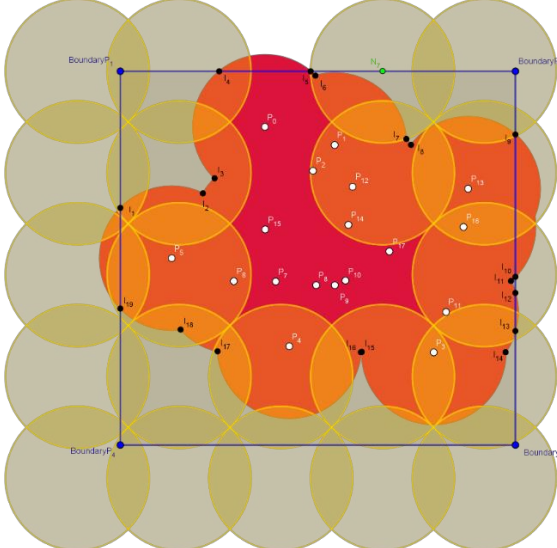
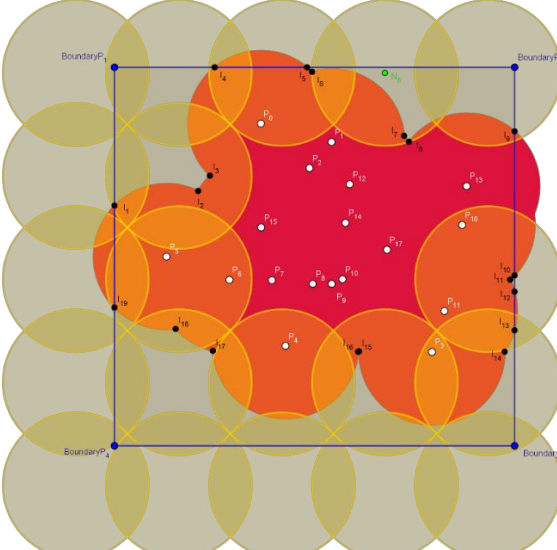
ตาราง 11 ตารางพิกัดของจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นทั้งหมดที่ได้จากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วย
วงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

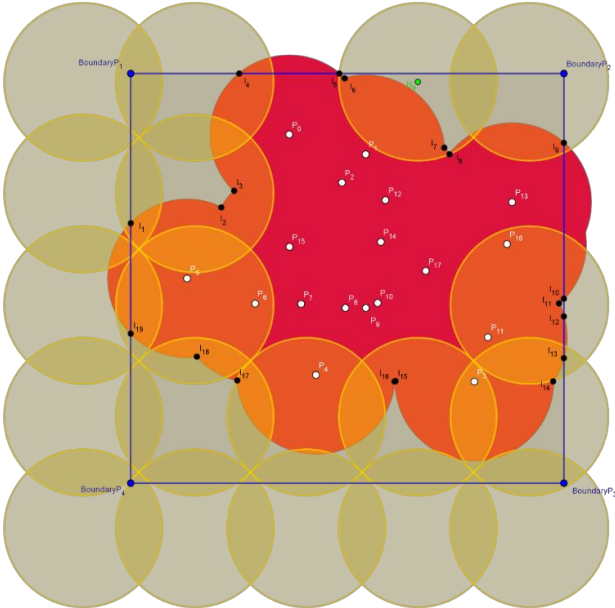
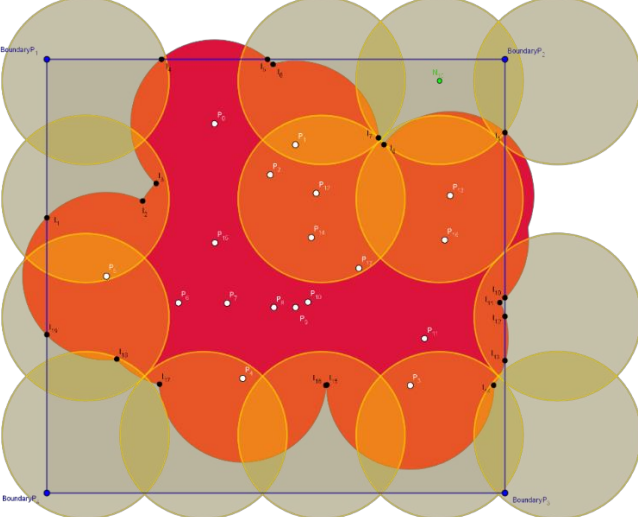
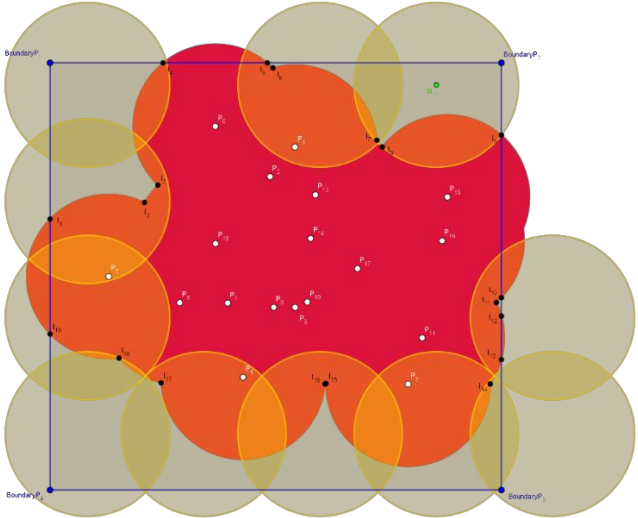
จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น	จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น
1	(98.968776, 18.8039059)	2	(98.9693827, 18.8033676)
3	(98.9668826, 18.8016727)	4	(98.966795, 18.8015845)
5	(98.9668244, 18.8015703)	6	(98.9937243, 18.809969)
7	(98.9932011, 18.8098049)	8	(98.9937517, 18.8091388)
9	(98.9931543, 18.8089041)	10	(99.0019332, 18.8076552)
11	(99.0018657, 18.8075684)	12	(99.0026039, 18.8068367)
13	(99.0158118, 18.7879968)	14	(99.0165577, 18.7853845)
15	(99.0138176, 18.780131)	16	(99.0152015, 18.7755121)
17	(98.9938149, 18.770063)	18	(98.9665469, 18.7751473)
19	(98.9642466, 18.7745103)	20	(98.9682526, 18.7722571)
21	(98.9907554, 18.8156313)		

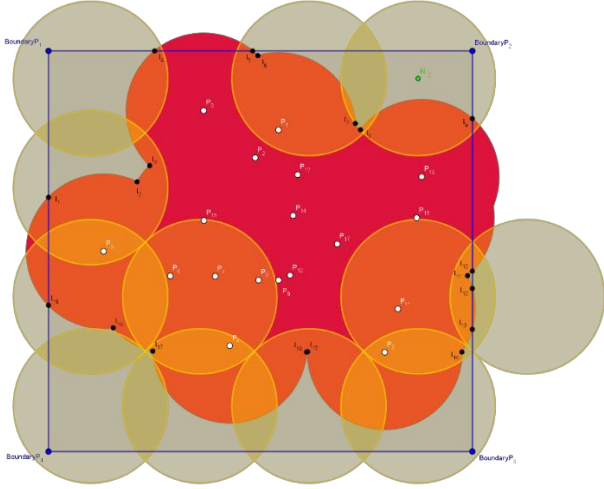
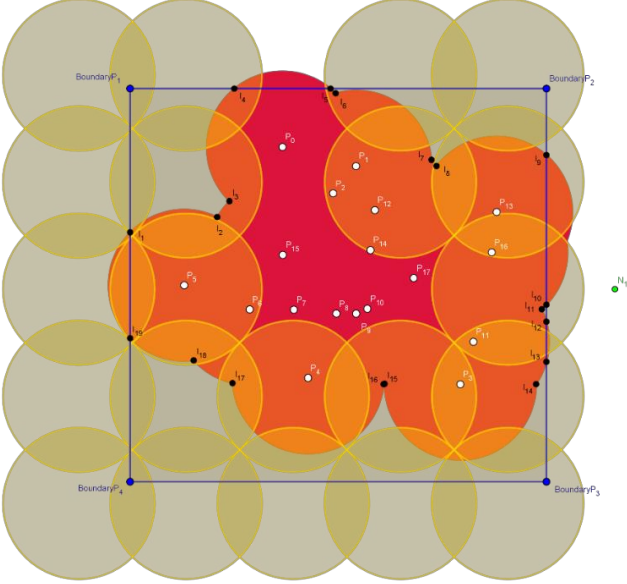
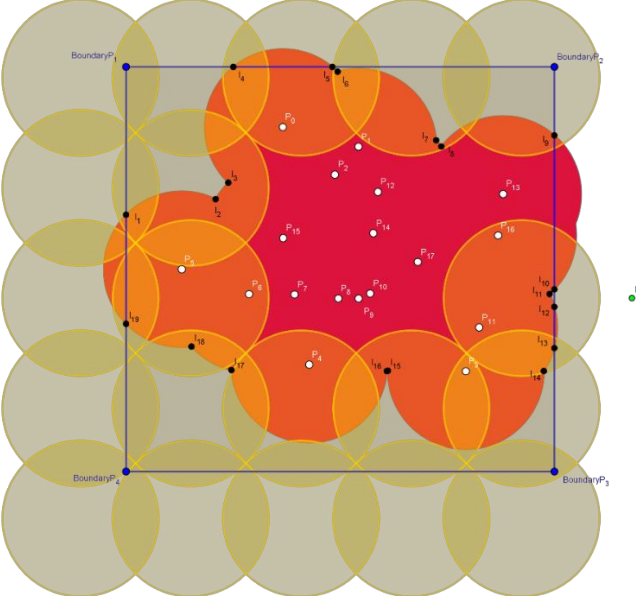
ตาราง 12 ตารางจำนวนของจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดของแต่ละจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นจากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดทีละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

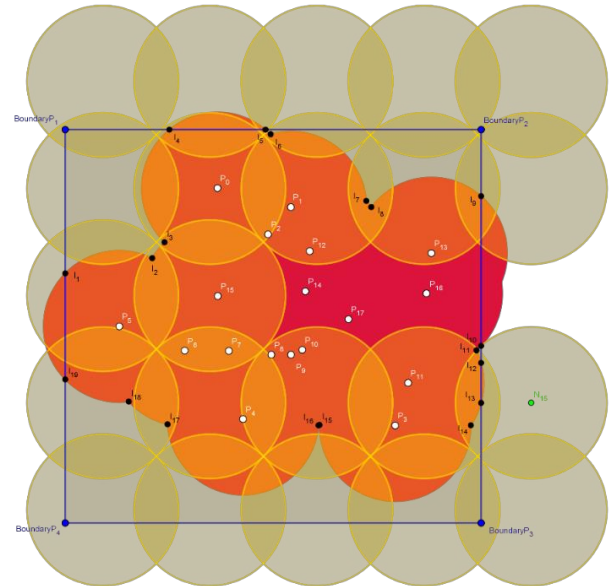
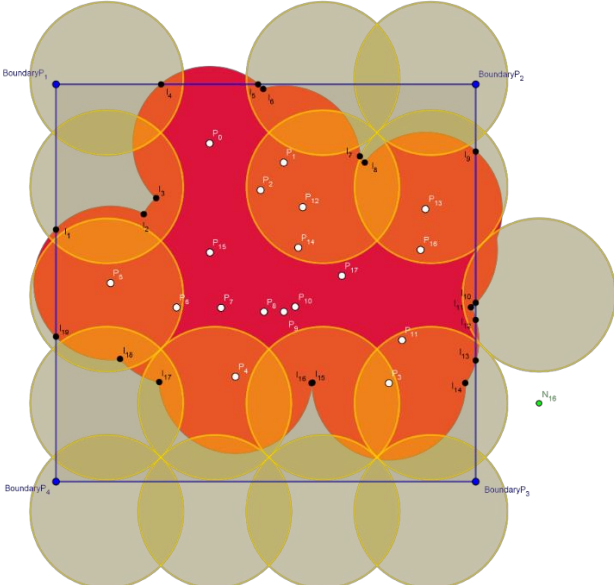
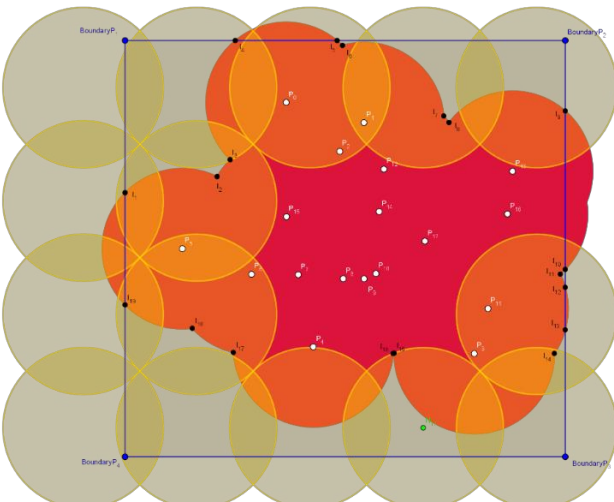
จุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุดก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_1	15	
N_2	21	

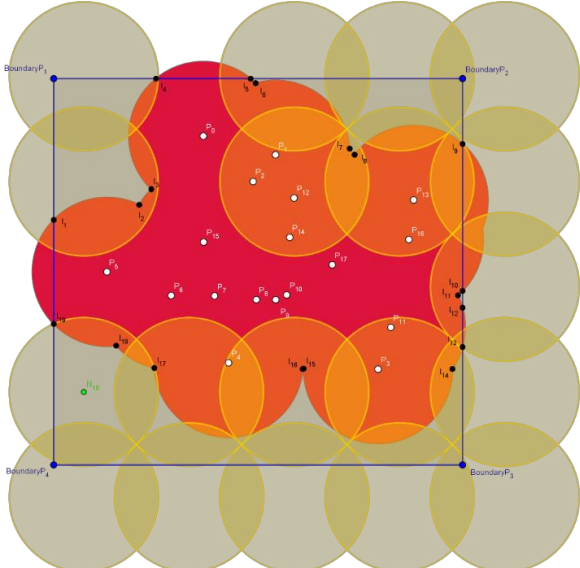
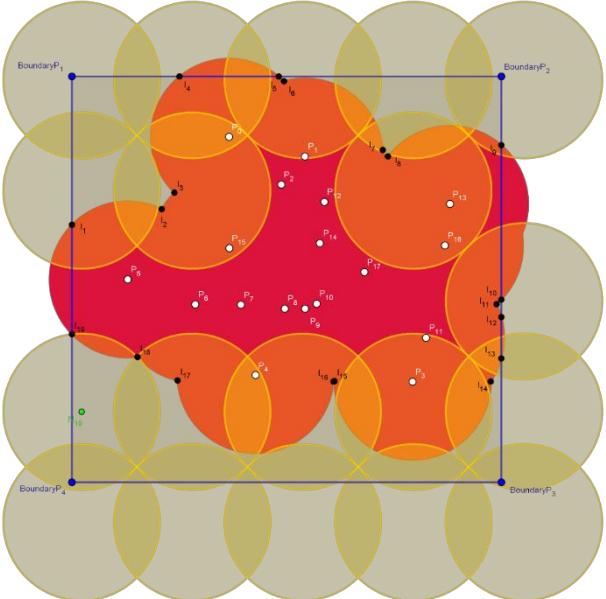
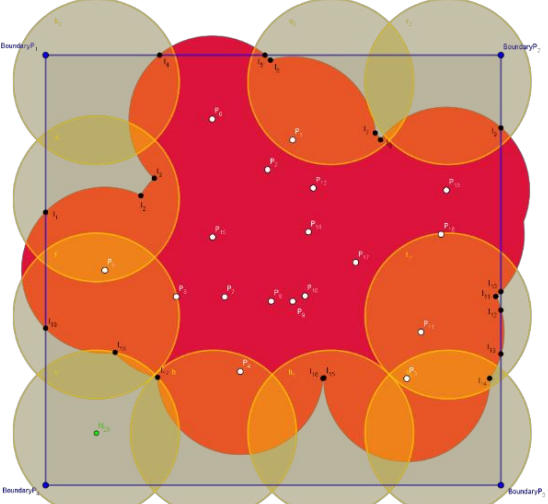
จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_3	20	
N_4	20	
N_5	20	

จุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุดก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_6	22	 The diagram for N_6 shows a central red region surrounded by yellow circles. Points are labeled P_1 to P_{19} and I_1 to I_{19}. The boundaries are labeled P_1 to P_4. A green dot is labeled N_6.
N_7	21	 The diagram for N_7 shows a central red region surrounded by yellow circles. Points are labeled P_1 to P_{19} and I_1 to I_{19}. The boundaries are labeled P_1 to P_4. A green dot is labeled N_7.
N_8	20	 The diagram for N_8 shows a central red region surrounded by yellow circles. Points are labeled P_1 to P_{19} and I_1 to I_{19}. The boundaries are labeled P_1 to P_4. A green dot is labeled N_8.

จุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุดก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_9	19	
N_{10}	14	
N_{11}	11	

จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{12}	12	
N_{13}	21	
N_{14}	20	

จุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุดก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{15}	22	
N_{16}	16	
N_{17}	15	

จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{18}	19	
N_{19}	19	
N_{20}	10	

จุดก่อกำเนิด ใหม่ตั้งต้น	จำนวนจุด ก่อกำเนิดใหม่	ภาพวงกลมทั้งหมดของจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{21}	17	

จากตารางข้างต้นเราจะนำเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีจำนวนวงกลมอยู่ภายใต้จำนวนวงกลมขั้นต่ำที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด ได้แก่ เซตที่มีจุดก่อกำเนิดตั้งต้นเป็น N_{11} และ N_{20} ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการพิจารณาความเหมาะสมของจุดก่อกำเนิดใหม่ในหัวข้อถัดไป

บทที่ 4

ความเหมาะสมของการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอย

4.1 เงื่อนไขและสมบัติทั่วไปของจุดก่อกำเนิดใหม่

เงื่อนไขข้างต้นนี้ถือได้ว่าเป็นสมบัติของจุดก่อกำเนิดทุกจุด ซึ่งเงื่อนไขเหล่านี้จะใช้ในการพิจารณาแต่ละจุดเอกเทศที่ได้จากการใช้วิธีการหาจุดก่อกำเนิดต่างๆ เพื่อให้ได้เซตของจุดก่อกำเนิดที่เหมาะสมในขั้นต้น

4.1.1 พื้นที่ที่เกิดจากเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดต้องปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมด

4.1.2 จุดก่อกำเนิดใหม่ใดๆต้องไม่ทับซ้อนบนพื้นที่ให้บริการของจุดก่อกำเนิดเดิม

4.1.3 จำนวนของพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมหลังจากกางพื้นที่ของจุดก่อกำเนิดต้องน้อยกว่าจำนวนเส้นขอบเขตของพื้นที่ที่ครอบคลุมจุดก่อกำเนิดนั้นๆ

4.2 เงื่อนไขที่นำมาวิเคราะห์เซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ในแต่ละด้าน

เมื่อได้ตัดเซตของจุดที่ไม่ตรงกับเงื่อนไขและสมบัติทั่วไปของจุดก่อกำเนิดใหม่แล้ว เงื่อนไขต่อไปนี้จะนำมาใช้ในการวิเคราะห์ความเหมาะสมในการวางเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่เหมาะสมที่สุดที่จะนำไปวางเป็นจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ดีที่สุดของแต่ละวิธีการ

4.2.1 จุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดควรมีจำนวนน้อยที่สุดตามการวิเคราะห์ขอบเขตบนของจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุด

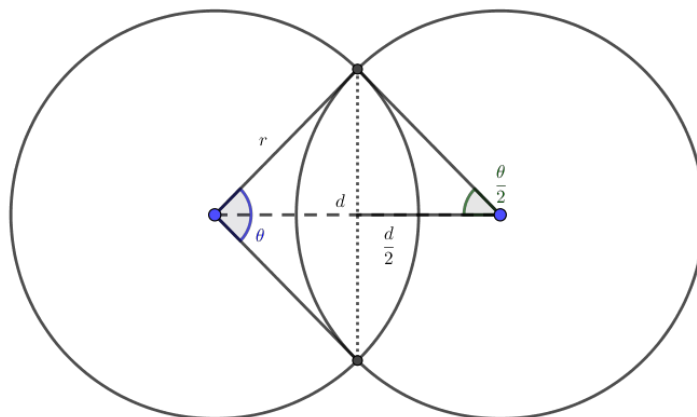
4.2.2 ค่าเฉลี่ยของระยะทางทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดเมื่อเพิ่มเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ ควรมีระยะทางมากที่สุด

4.2.3 ค่าเฉลี่ยของพื้นที่ที่ทับซ้อนทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดเมื่อเพิ่มเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ ควรได้พื้นที่น้อยที่สุด

โดยเราจะใช้โปรแกรมในการคำนวณหัวข้อ 4.2.2 ด้วยโปรแกรมโปรแกรมคำนวณระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดคู่ใดๆ ด้วยสามเหลี่ยมเดอลาเน่ บน Python ผ่านทาง Google Colaboratory ที่กล่าวถึงในหัวข้อ 3.1 และในส่วนของหัวข้อ 4.2.3 ด้วยโปรแกรมในการคำนวณพื้นที่ที่ทับซ้อนเฉลี่ยของวงกลมแต่ละคู่บน Python ผ่านทาง Google Colaboratory ซึ่งจะมีการสร้างฟังก์ชันสำหรับแยกแยะการทับซ้อนของวงกลมด้วยรัศมี โดยกำหนดให้ระยะห่างระหว่างจุดแทนด้วย d และรัศมีแทนด้วย r โดยที่

1. ถ้าระยะห่างระหว่างจุดก่อกำเนิดมากกว่าสองเท่าของรัศมีแล้วพื้นที่ที่ทับซ้อนคือ 0 ตารางหน่วย
2. ถ้าระยะห่างระหว่างจุดก่อกำเนิดน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 แล้วพื้นที่ที่ทับซ้อนคือ πr^2 ตารางหน่วย

3. สำหรับระยะห่างอื่นๆ จากการวิเคราะห์ส่วนของวงกลมนั้นจะได้ว่าเซกเมนต์วงกลมใดๆ จะมีขนาดของมุม θ คือ $2\arccos(\frac{d}{2r})$ โดยพื้นที่ที่ทับซ้อนของวงกลมสองวงนั้นคือพื้นที่ของสองเซกเมนต์ที่มีขนาดและมุมเท่ากัน มีค่าเป็น $r^2(\theta - \sin \theta)$ ตารางหน่วย ดังรูปที่ 43 ตามนิยาม 2.1.16



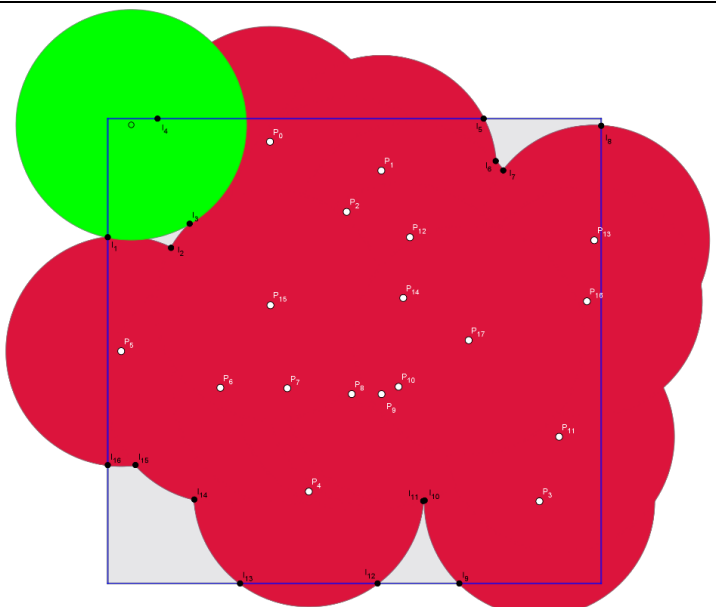
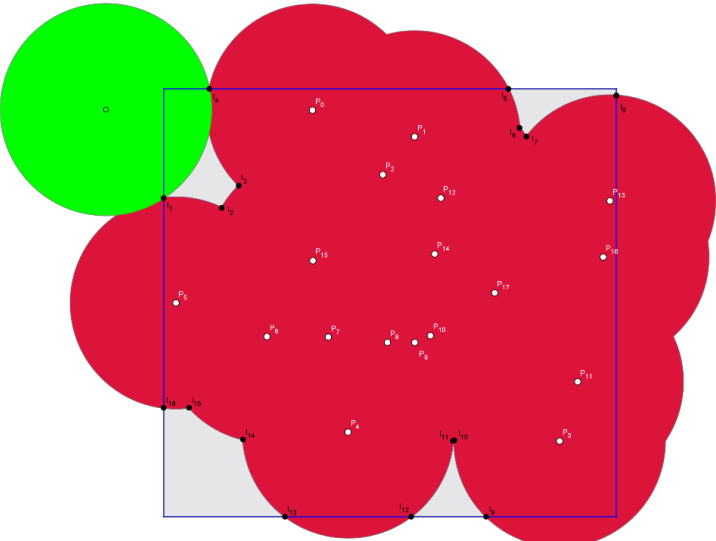
รูปที่ 43 รูปตัวอย่างการหาขนาดของมุมของเซกเมนต์ ที่ใช้ในการคำนวณพื้นที่ที่ทับซ้อน

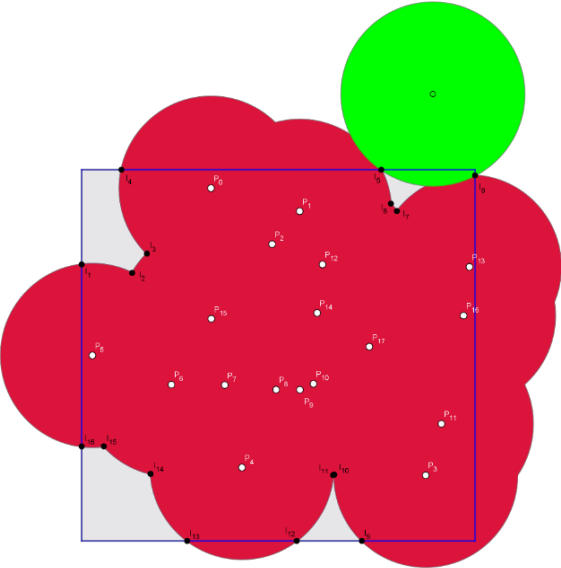
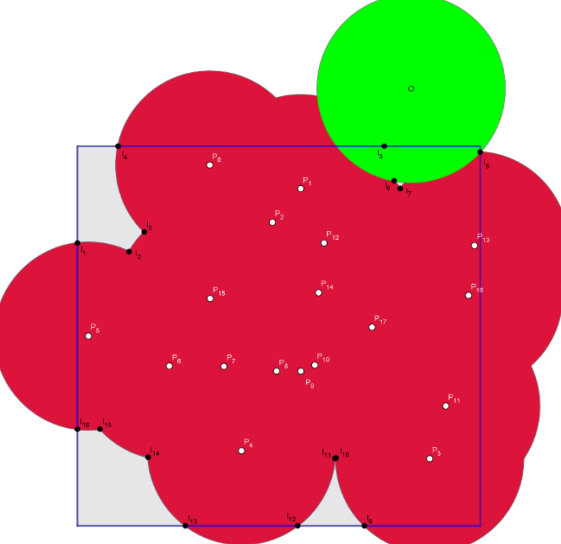
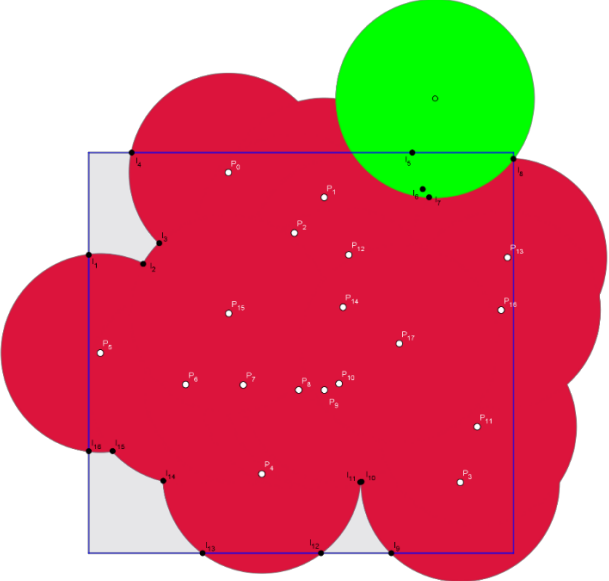
4.3 วิเคราะห์เงื่อนไขที่กำหนดวิธีการที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า

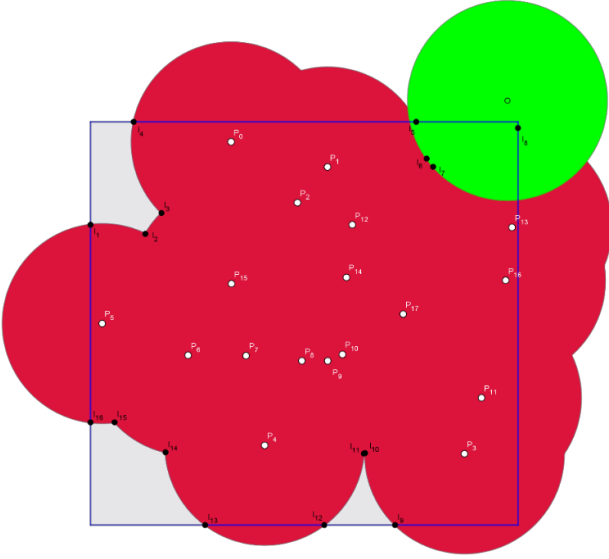
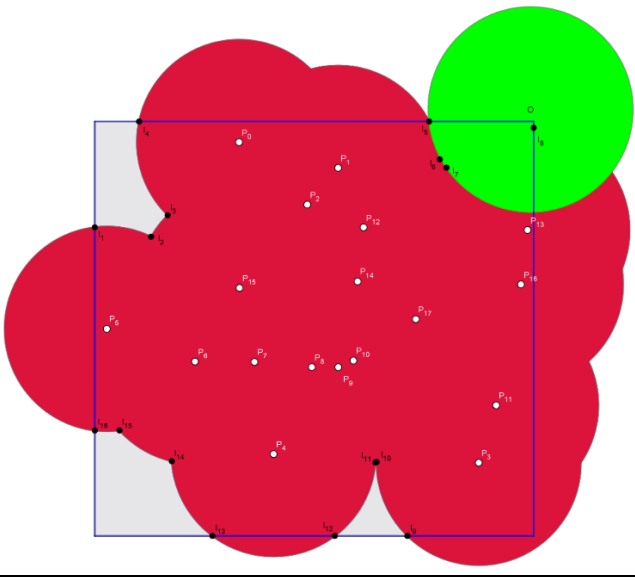
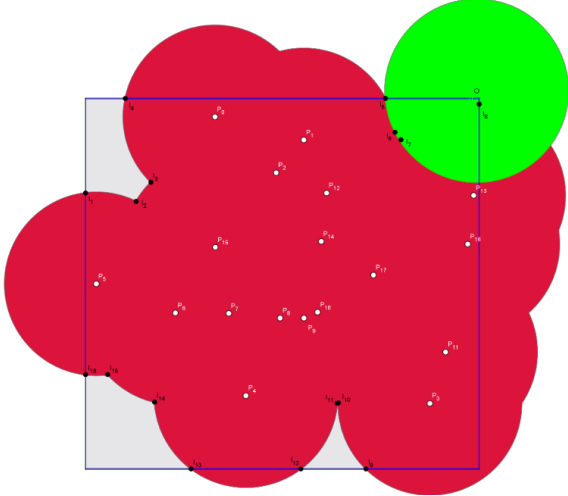
4.3.1 การใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

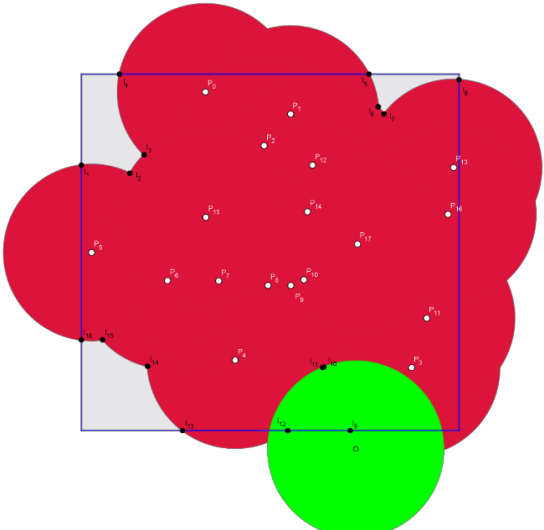
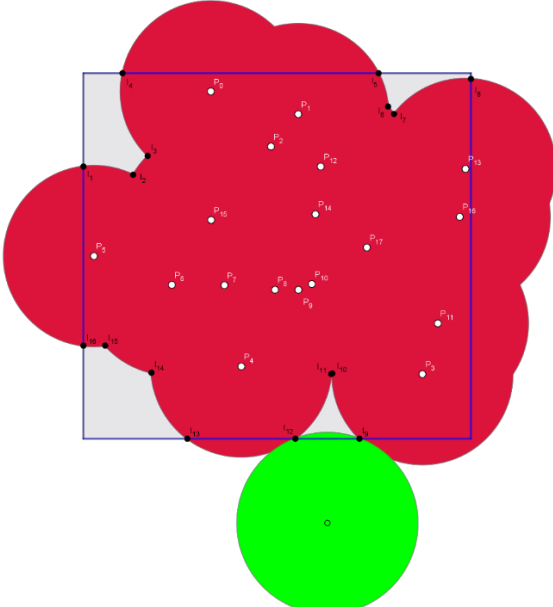
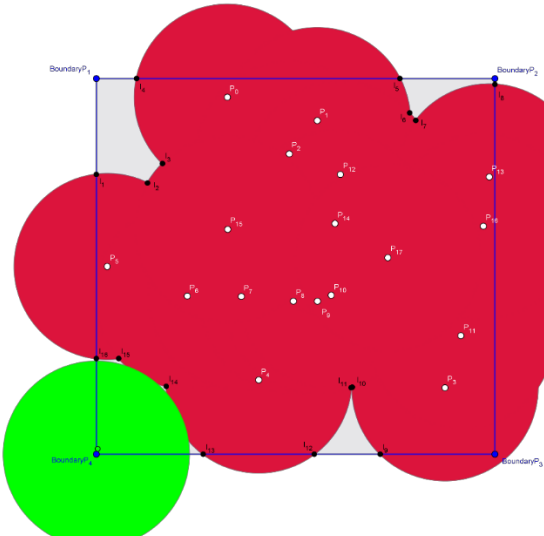
เราทำการวิเคราะห์เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับทุกจุดก่อกำเนิดใหม่ สำหรับวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต โดยตารางต่อไปนี้จะแสดงความสามารถในการครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมดของแต่ละจุดก่อกำเนิดตามตาราง 13 เพื่อนำไปใช้ในการเลือกจุดก่อกำเนิดใหม่ที่สอดคล้องเงื่อนไขและพิจารณาในขั้นตอนต่อไป

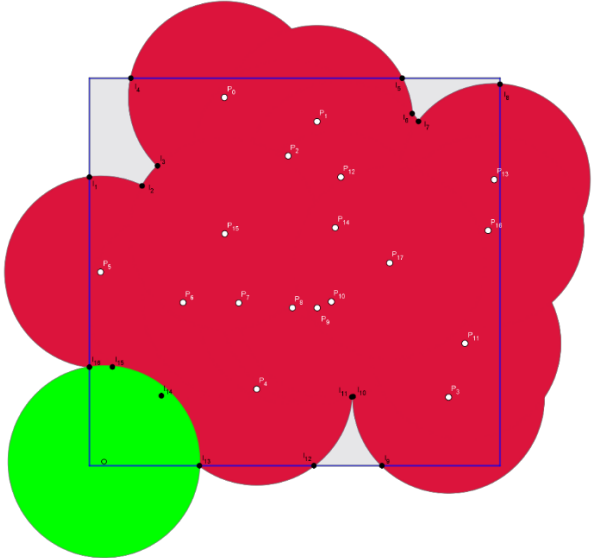
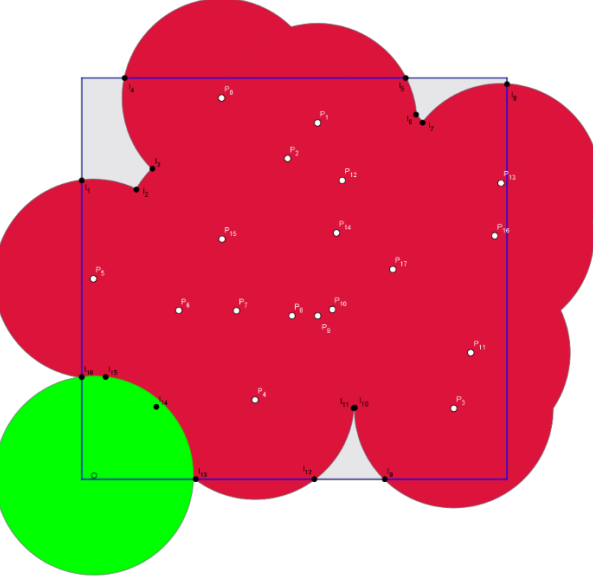
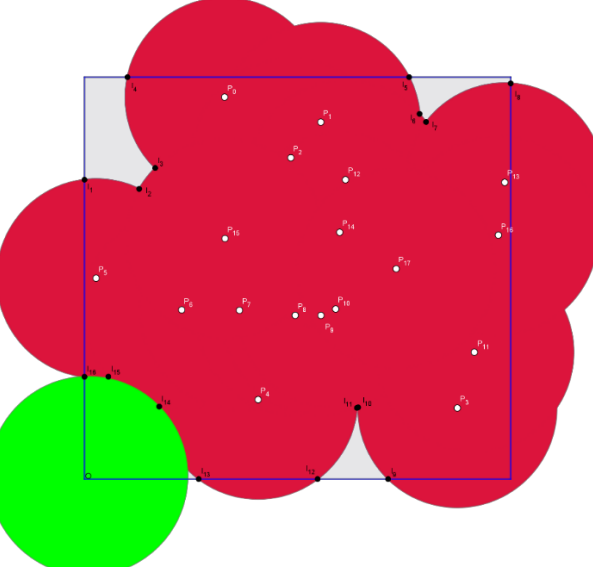
ตาราง 13 ตารางการปกคลุมพื้นที่ของจุดก่อกำเนิดใหม่ด้วยวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

จุดก่อกำเนิดใหม่	การปกคลุมพื้นที่ทั้งหมด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_1	ไม่ปกคลุม	
N_2	ไม่ปกคลุม	

จุดก่อกำเนิด ใหม่	การปกคลุมพื้นที่ ทั้งหมด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_6	ไม่ปกคลุม	
N_7	ไม่ปกคลุม	
N_8	ปกคลุม	

จุดก่อกำเนิด ใหม่	การปกคลุมพื้นที่ ทั้งหมด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_9	ปกคลุม	
N_{10}	ไม่ปกคลุม	
N_{11}	ปกคลุม	

จุดก่อกำเนิด ใหม่	การปกคลุมพื้นที่ ทั้งหมด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{12}	ปกคลุม	
N_{13}	ไม่ปกคลุม	
N_{14}	ไม่ปกคลุม	

จุดก่อกำเนิด ใหม่	การปกคลุมพื้นที่ ทั้งหมด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{15}	ปกคลุม	
N_{16}	ไม่ปกคลุม	
N_{17}	ไม่ปกคลุม	

จุดก่อกำเนิดใหม่	การปกคลุมพื้นที่ทั้งหมด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{18}	ไม่ปกคลุม	

จากตารางข้างต้นเราจะได้ว่าจุดที่ปกคลุมพื้นที่ทั้งหมดของพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านบนซ้ายได้แก่ N_3 และ N_5 พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านบนขวาได้แก่ N_8, N_9 และ N_{11} พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านล่างขวาได้แก่ N_{12} พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านล่างซ้ายได้แก่ N_{15} โดยนำจุดก่อกำเนิดข้างต้นมาแบ่งตามพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมดสี่พื้นที่ตามตำแหน่ง เพื่อสร้างเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ตามตาราง 14

ตาราง 14 ตารางสมาชิกของเซตจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ได้จากวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

เซตที่	สมาชิกของจุดก่อกำเนิดใหม่	เซตที่	สมาชิกของจุดก่อกำเนิดใหม่
1	N_3, N_8, N_{12} และ N_{15}	2	N_3, N_9, N_{12} และ N_{15}
3	N_3, N_{11}, N_{12} และ N_{15}	4	N_5, N_8, N_{12} และ N_{15}
5	N_5, N_9, N_{12} และ N_{15}	6	N_5, N_{11}, N_{12} และ N_{15}

เมื่อนำเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ข้างต้นไปใช้ในการพิจารณาค่าเฉลี่ยของระยะทางทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ และค่าเฉลี่ยของพื้นที่ที่ทับซ้อนทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ เพื่อหาจุดก่อกำเนิดที่เหมาะสมที่สุดในวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต ซึ่งได้ผลลัพธ์ของการนำเซตดังกล่าวไปวิเคราะห์ตามตาราง 15

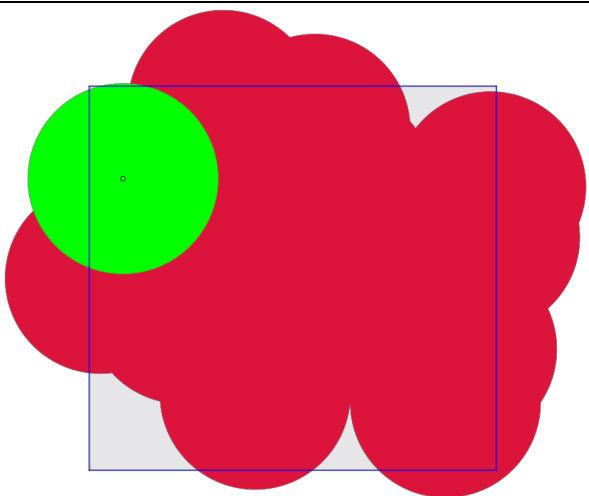
ตาราง 15 ตารางระยะทางเฉลี่ยและพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยของแต่ละเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ ตามวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

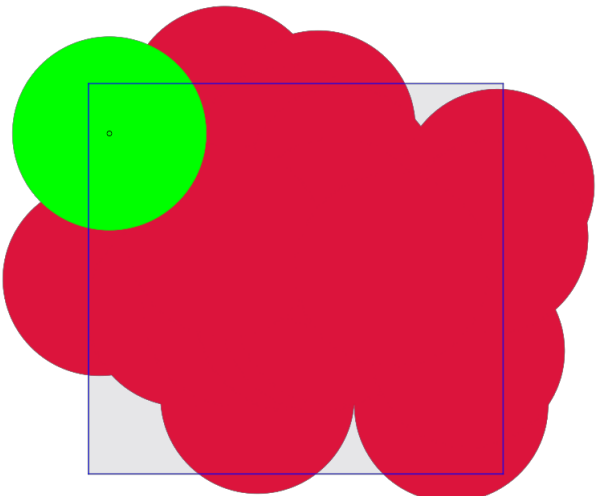
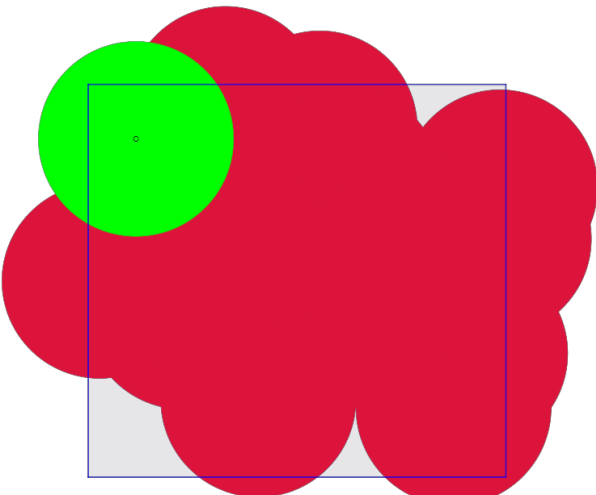
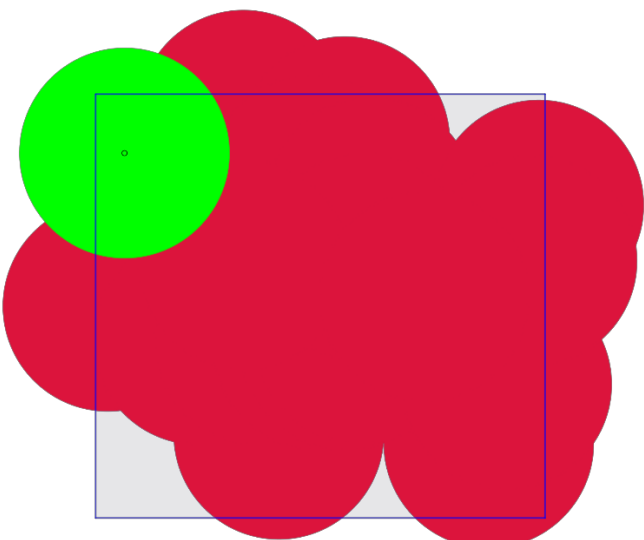
เซตที่	ระยะทางเฉลี่ยระหว่างทุกคู่จุดก่อกำเนิด		พื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ
	หน่วยองศา	หน่วยเมตร	
1	0.01000315	1111.74	10.74
2	0.010206655	1134.36	10.77
3	0.009784683	1087.46	10.82
4	0.009970197	1108.08	10.77
5	0.009722058	1080.50	10.80
6	0.009719944	1080.26	10.84

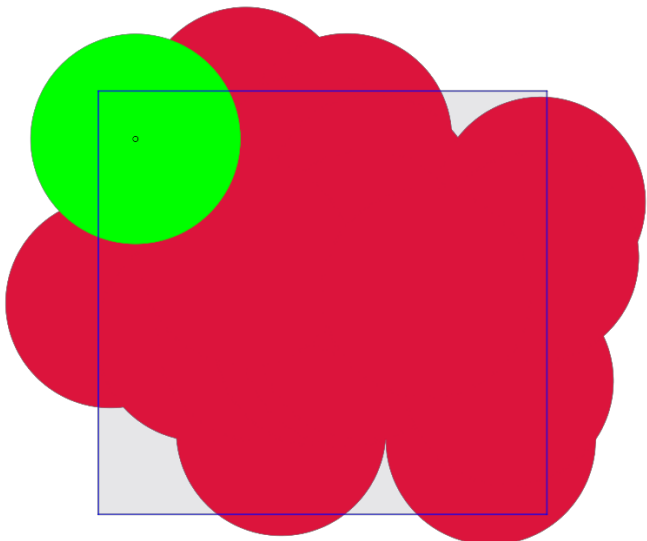
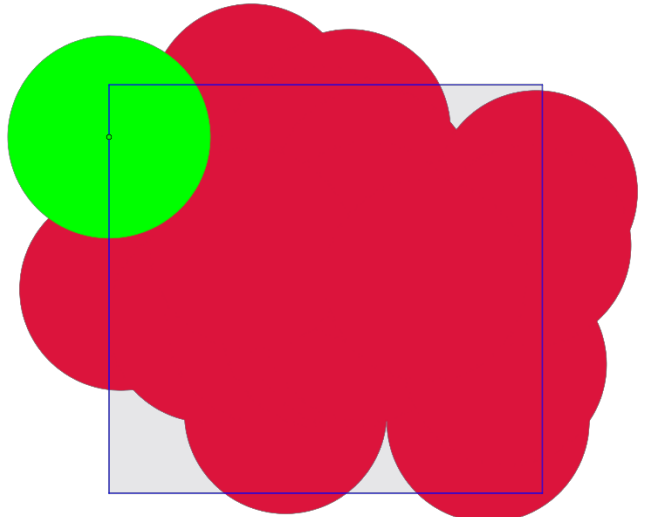
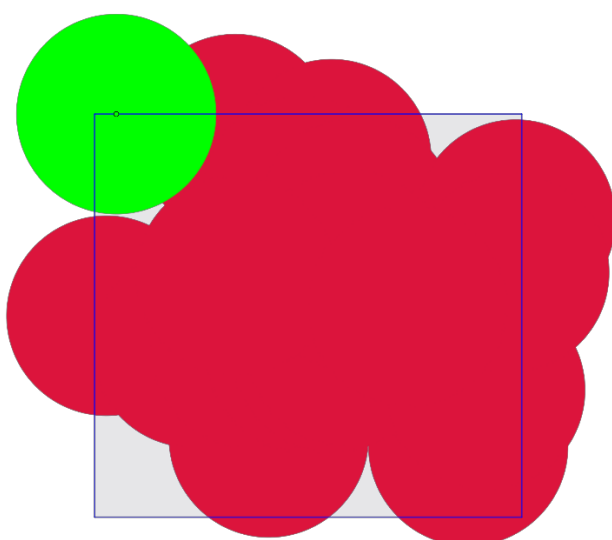
4.3.2 การใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

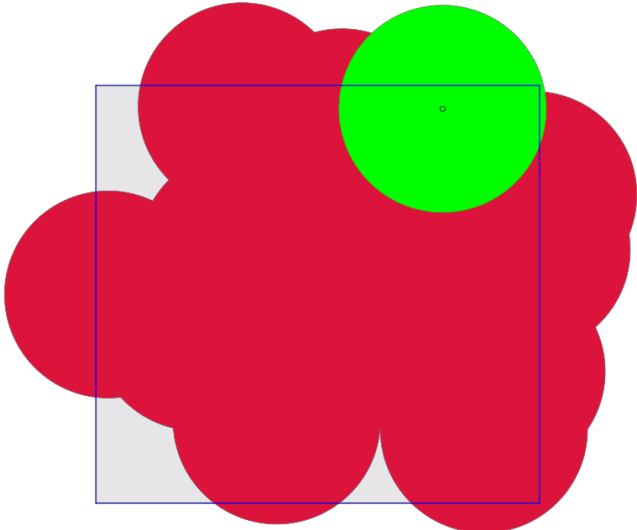
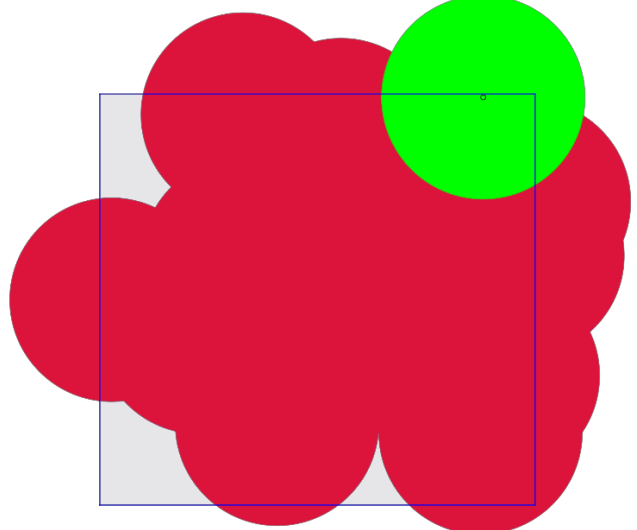
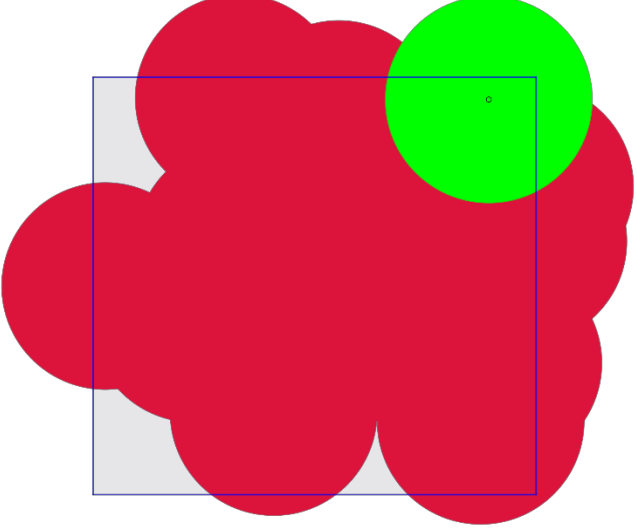
เราทำการวิเคราะห์เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับทุกจุดก่อกำเนิดใหม่ สำหรับวิธีการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม โดยตารางต่อไปนี้จะแสดงความสามารถในการครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมดของแต่ละจุดก่อกำเนิด และการทับซ้อนของจุดก่อกำเนิดใหม่บนพื้นที่ให้บริการของจุดก่อกำเนิดเดิมตามตาราง 16 เพื่อนำไปใช้ในการเลือกจุดก่อกำเนิดใหม่ที่สอดคล้องเงื่อนไข และพิจารณาในขั้นตอนต่อไป

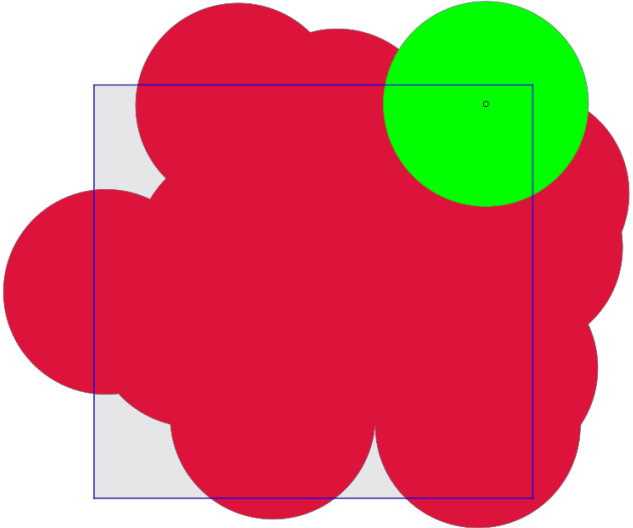
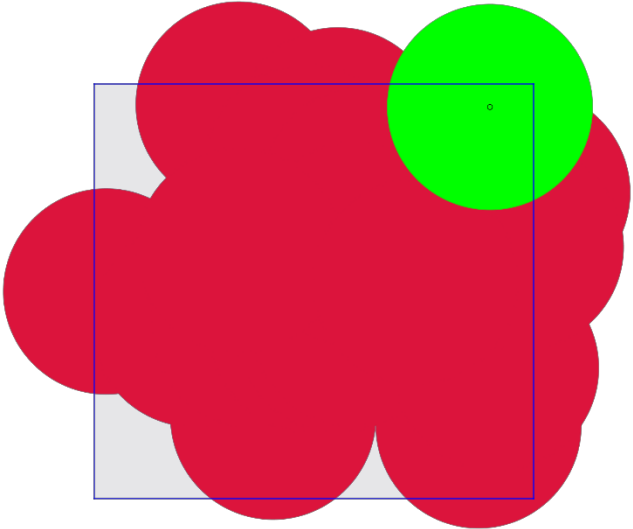
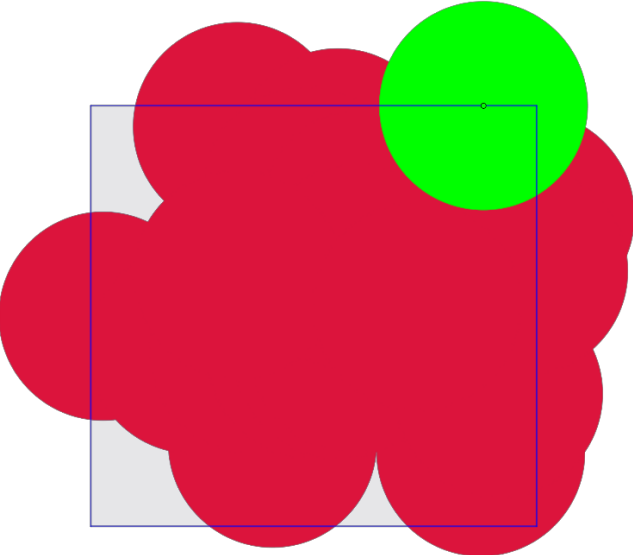
ตาราง 16 ตารางการปกคลุมพื้นที่ของจุดก่อกำเนิดใหม่ และการทับซ้อนของจุดก่อกำเนิดใหม่บนพื้นที่ให้บริการของจุดก่อกำเนิดเดิม

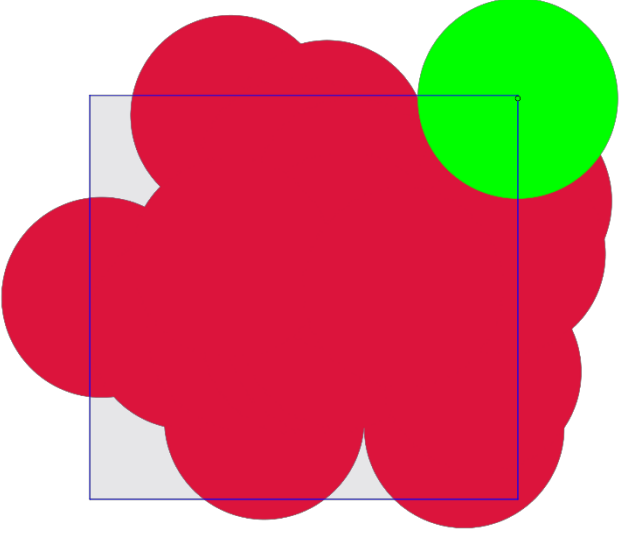
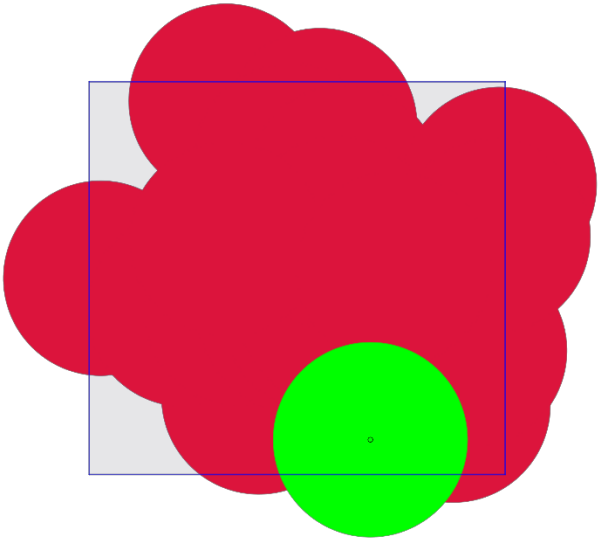
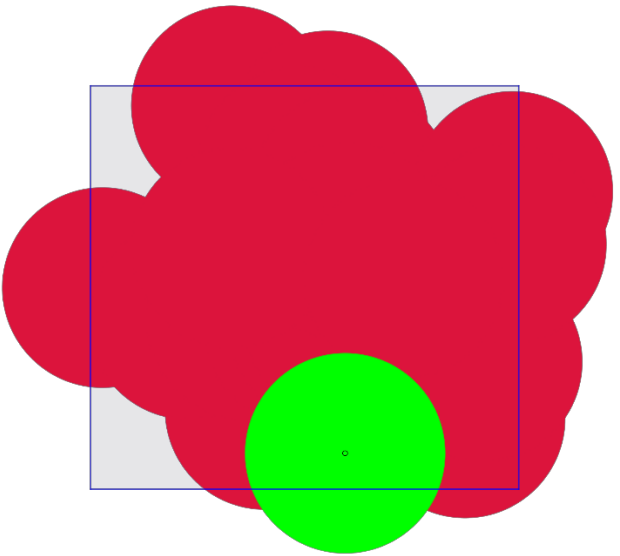
จุดก่อกำเนิดใหม่	การปกคลุมพื้นที่	การทับซ้อนของจุดก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_1	ไม่ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	

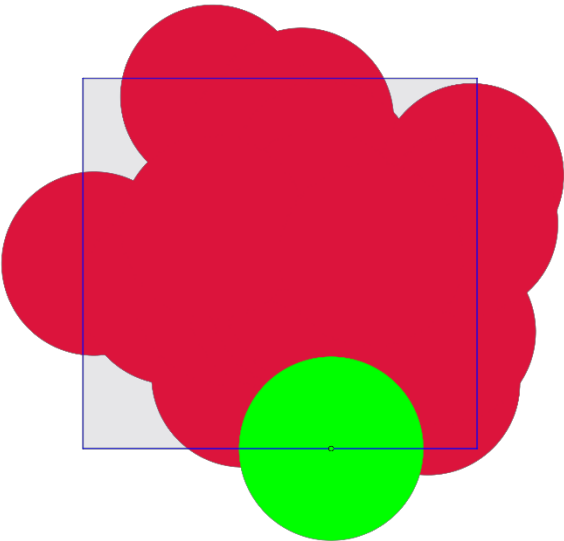
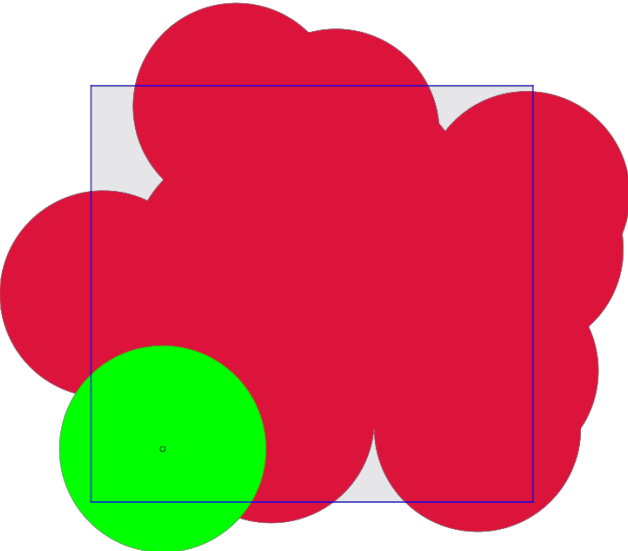
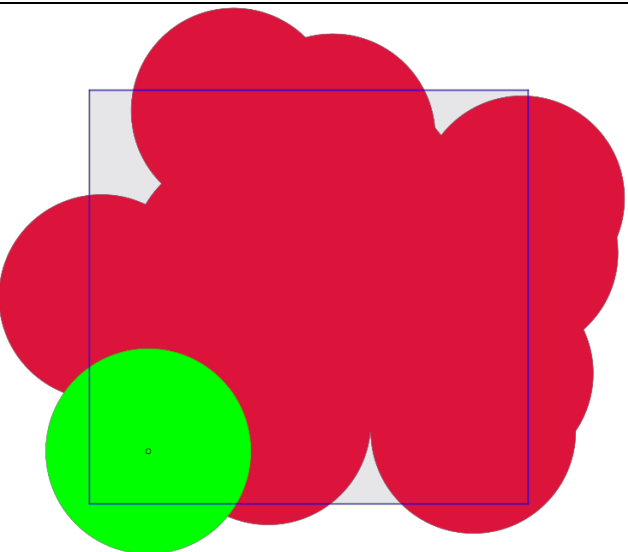
จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_2	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_3	ปกคลุม	ทับซ้อน	
N_4	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	

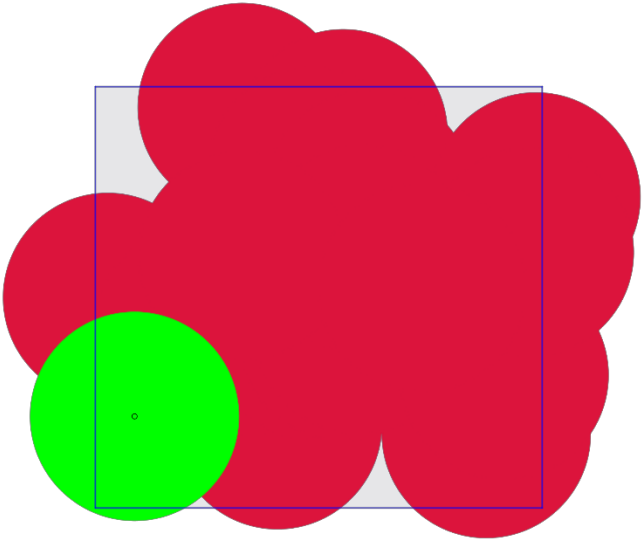
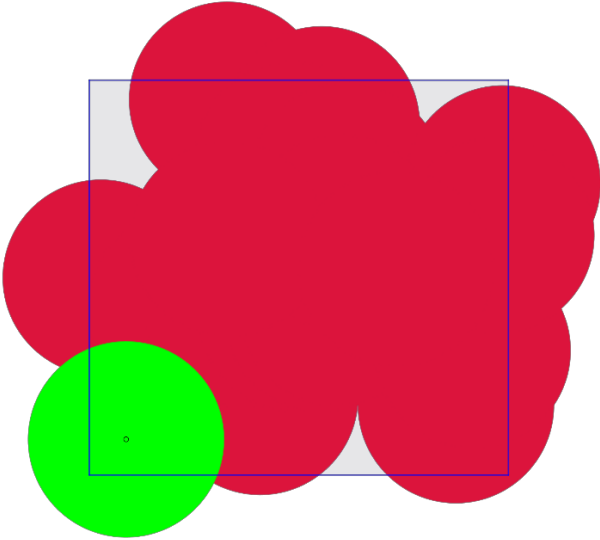
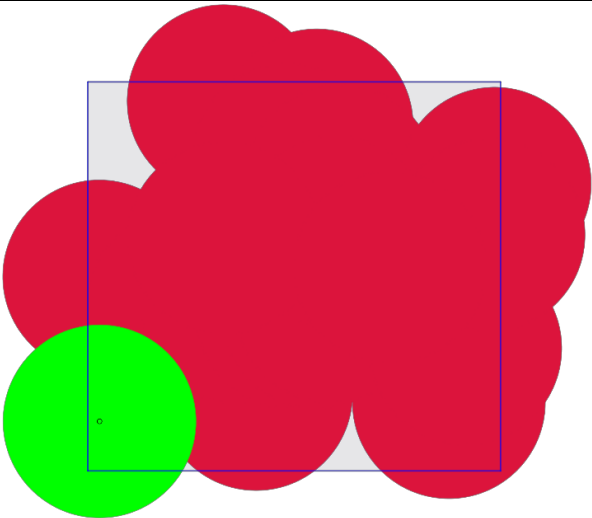
จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_5	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_6	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_7	ไม่ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	

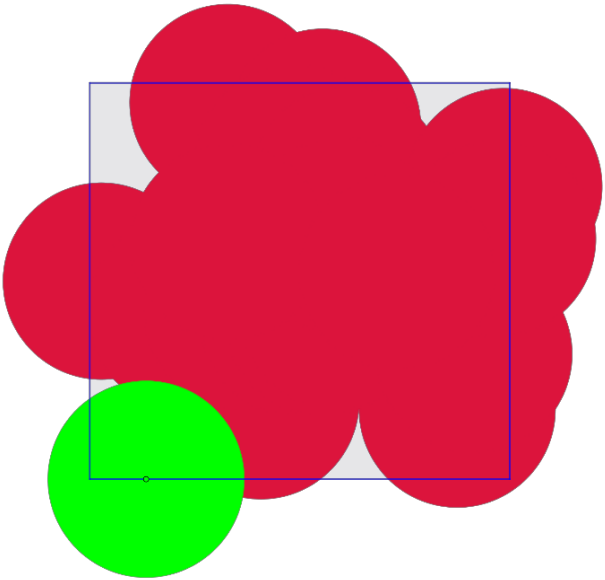
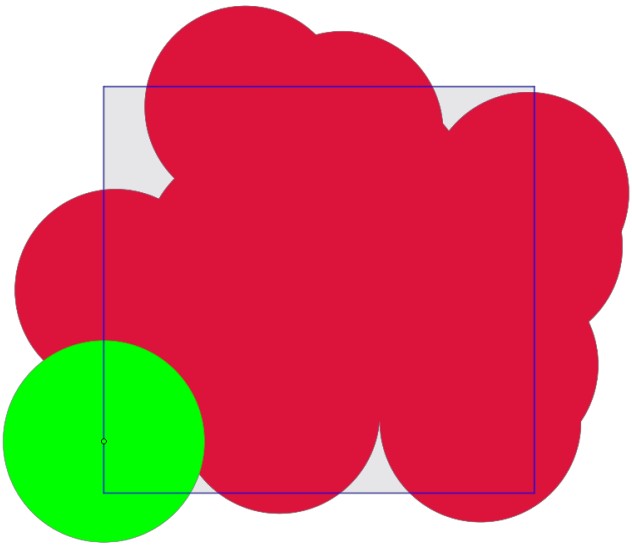
จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_8	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_9	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_{10}	ปกคลุม	ทับซ้อน	

จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{11}	ปกคลุม	ทับซ้อน	
N_{12}	ปกคลุม	ทับซ้อน	
N_{13}	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	

จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{14}	ไม่ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_{15}	ปกคลุม	ทับซ้อน	
N_{16}	ปกคลุม	ทับซ้อน	

จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{17}	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_{18}	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_{19}	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	

จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{20}	ไม่ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_{21}	ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_{22}	ไม่ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	

จุด ก่อกำเนิด ใหม่	การปก คลุมพื้นที่	การทับซ้อน ของจุด ก่อกำเนิด	ภาพวงกลมที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่
N_{23}	ไม่ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	
N_{24}	ไม่ปกคลุม	ไม่ทับซ้อน	

จากตารางข้างต้นเราจะได้ว่าจุดที่ปกคลุมพื้นที่ทั้งหมดและไม่ทับซ้อนบนพื้นที่ให้บริการของจุดก่อกำเนิดเดิมของพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านบนซ้ายได้แก่ N_2, N_4, N_5 และ N_6 พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านบนขวาได้แก่ N_8, N_9 และ N_{13} พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านล่างขวาได้แก่ N_{17} พื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมด้านล่างซ้ายได้แก่ N_{18}, N_{19} และ N_{21} โดยนำจุดก่อกำเนิดข้างต้นมาแบ่งตามพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมทั้งหมดสี่พื้นที่ตามตำแหน่งเพื่อสร้างเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ตามตาราง 17

ตาราง 17 ตารางสมาชิกของเซตจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ได้จากวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขตตามวิธีการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

เซตที่	สมาชิกของจุดก่อกำเนิดใหม่	เซตที่	สมาชิกของจุดก่อกำเนิดใหม่
1	N_2, N_8, N_{17} และ N_{18}	2	N_2, N_8, N_{17} และ N_{19}
3	N_2, N_8, N_{17} และ N_{21}	4	N_2, N_9, N_{17} และ N_{18}
5	N_2, N_9, N_{17} และ N_{19}	6	N_2, N_9, N_{17} และ N_{21}
7	N_2, N_{13}, N_{17} และ N_{18}	8	N_2, N_{13}, N_{17} และ N_{19}
9	N_2, N_{13}, N_{17} และ N_{21}	10	N_4, N_8, N_{17} และ N_{18}
11	N_4, N_8, N_{17} และ N_{19}	12	N_4, N_8, N_{17} และ N_{21}
13	N_4, N_9, N_{17} และ N_{18}	14	N_4, N_9, N_{17} และ N_{19}
15	N_4, N_9, N_{17} และ N_{21}	16	N_4, N_{13}, N_{17} และ N_{18}
17	N_4, N_{13}, N_{17} และ N_{19}	18	N_4, N_{13}, N_{17} และ N_{21}
19	N_5, N_8, N_{17} และ N_{18}	20	N_5, N_8, N_{17} และ N_{19}
21	N_5, N_8, N_{17} และ N_{21}	22	N_5, N_9, N_{17} และ N_{18}
23	N_5, N_9, N_{17} และ N_{19}	24	N_5, N_9, N_{17} และ N_{21}
25	N_5, N_{13}, N_{17} และ N_{18}	26	N_5, N_{13}, N_{17} และ N_{19}
27	N_5, N_{13}, N_{17} และ N_{21}	28	N_6, N_8, N_{17} และ N_{18}
29	N_6, N_8, N_{17} และ N_{19}	30	N_6, N_8, N_{17} และ N_{21}
31	N_6, N_9, N_{17} และ N_{18}	32	N_6, N_9, N_{17} และ N_{19}
33	N_6, N_9, N_{17} และ N_{21}	34	N_6, N_{13}, N_{17} และ N_{18}
35	N_6, N_{13}, N_{17} และ N_{19}	36	N_6, N_{13}, N_{17} และ N_{21}

เมื่อนำเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ข้างต้นไปใช้ในการพิจารณาค่าเฉลี่ยของระยะทางทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ และค่าเฉลี่ยของพื้นที่ที่ทับซ้อนทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ เพื่อหาจุดก่อกำเนิดที่เหมาะสมที่สุดในวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต ซึ่งได้ผลลัพธ์ของการนำเซตดังกล่าวไปวิเคราะห์ตามตาราง 18

ตาราง 18 ตารางระยะทางเฉลี่ยและพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยของแต่ละเขตของจุดก่อกำเนิดใหม่ ตามวิธีการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

เขตที่	ระยะทางเฉลี่ยระหว่างทุกคู่จุดก่อกำเนิด		พื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ
	หน่วยองศา	หน่วยเมตร	
1	0.008538043	948.91	11.87
2	0.008605952	956.46	11.77
3	0.008669804	963.55	11.67
4	0.008722486	969.41	11.54
5	0.008790395	976.96	11.44
6	0.008854247	984.05	11.34
7	0.008730252	970.27	11.52
8	0.008798162	977.82	11.43
9	0.008862013	984.92	11.33
10	0.008518035	946.69	11.90
11	0.008585944	954.23	11.81
12	0.008649795	961.33	11.71
13	0.008702478	967.18	11.58
14	0.008770387	974.73	11.48
15	0.008834239	981.83	11.38
16	0.008710244	968.05	11.56
17	0.008778153	975.60	11.46
18	0.008842005	982.69	11.36
19	0.008521791	947.10	11.91
20	0.0085897	954.65	11.81
21	0.008653551	961.75	11.71
22	0.008706234	967.60	11.58
23	0.008774143	975.15	11.49
24	0.008837994	982.25	11.39
25	0.008714	968.47	11.57
26	0.008781909	976.01	11.47
27	0.008845761	983.11	11.37

เขตที่	ระยะทางเฉลี่ยระหว่างทุกคู่จุดก่อกำเนิด		พื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ
	หน่วยองศา	หน่วยเมตร	
28	0.008584488	954.07	11.80
29	0.008652397	961.62	11.70
30	0.008716248	968.72	11.60
31	0.008768931	974.57	11.47
32	0.00883684	982.12	11.38
33	0.008900691	989.21	11.28
34	0.008776697	975.43	11.46
35	0.008844606	982.98	11.36
36	0.008908458	990.08	11.26

4.3.3 การเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทสำหรับการพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

เราทำการวิเคราะห์เงื่อนไขที่เป็นสำหรับทุกจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นที่มีจำนวนวงกลมชั้นต่ำที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมตามที่กำหนด ในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้ว่ามีจุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ตรงตามเงื่อนไขข้างต้นได้แก่ N_4, N_5, N_6, N_8 และ N_{15} ตามตาราง 19

ตาราง 19 ตารางพิกัดของเขตจุดก่อกำเนิดใหม่จากจุดก่อกำเนิดตั้งต้นจากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท ของพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิด	จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิด
จุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ N_4			
1	(98.9654419,18.7997528)	2	(98.9886981,18.7764966)
3	(98.9770700,18.7764966)	4	(98.9654419,18.7764966)
5	(99.0003262,18.7997528)	6	(98.9770700,18.7997528)
จุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ N_5			
1	(98.9659467,18.7992118)	2	(98.9892029,18.7759556)
3	(98.9778748,18.7759556)	4	(98.9659467,18.7759556)
5	(99.0008310,18.7992118)	6	(99.0008310,18.8108399)

จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิด	จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิด
จุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ N_6			
1	(98.9880664,18.7769914)	2	(98.9764383,18.7769914)
3	(98.9648102,18.7769914)	4	(98.9996945,18.8002476)
5	(98.9764383,18.8002476)	6	(98.9648102,18.8002476)
จุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ N_8			
1	(98.9969539,18.8095819)	2	(98.9969539,18.7746977)
3	(98.9853258,18.7746977)	4	(98.9736977,18.7746977)
5	(98.9736977,18.7979538)	6	(98.9736977,18.8095819)
จุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ N_{15}			
1	(98.9699440,18.7721321)	2	(99.0042787,18.8070164)
3	(98.9926506,18.7721321)	4	(98.9926506,18.8070164)
5	(98.9693944,18.7953883)	6	(98.9693944,18.8070164)

เมื่อนำเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ข้างต้นไปใช้ในการพิจารณาค่าเฉลี่ยของระยะทางทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ และค่าเฉลี่ยของพื้นที่ที่ทับซ้อนทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ เพื่อหาจุดก่อกำเนิดที่เหมาะสมที่สุดในวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท ซึ่งได้ผลลัพธ์ของการนำเซตดังกล่าวไปวิเคราะห์ตามตาราง 20

ตาราง 20 ตารางระยะทางเฉลี่ยและพื้นที่ที่ทับซ้อนเฉลี่ยของแต่ละเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ได้จากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

เซตที่	ระยะทางเฉลี่ยระหว่างทุกคู่จุดก่อกำเนิด		พื้นที่ที่ทับซ้อนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ
	หน่วยองศา	หน่วยเมตร	
1	0.008504660	945.20	11.52
2	0.009271952	1030.48	10.79
3	0.008504344	945.16	11.50
4	0.008980889	998.13	10.79
5	0.009328632	1036.77	9.96

4.3.4 การเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทสำหรับการพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

เราทำการวิเคราะห์เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับทุกจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ได้จากจุดก่อกำเนิดใหม่ตั้งต้นที่มีจำนวนวงกลมชั้นต่ำที่ปกคลุมพื้นที่ที่ไม่ถูกปกคลุมตามที่กำหนด ในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้ว่ามีจุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ตรงตามเงื่อนไขข้างต้นได้แก่ N_{11} และ N_{20} ตามตาราง 21

ตาราง 21 ตารางพิกัดของเซตจุดก่อกำเนิดใหม่จากจุดก่อกำเนิดตั้งต้นจากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท ของพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิด	จุดที่	พิกัดของจุดก่อกำเนิด
จุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ N_{11}			
1	(98.9669814, 18.8075684)	2	(98.9902376, 18.8075684)
3	(99.0018657, 18.8075684)	4	(98.9669814, 18.7959403)
5	(98.9669814, 18.7843122)	6	(99.0134938, 18.7843122)
7	(98.9669814, 18.7726841)	8	(98.9786095, 18.7726841)
9	(98.9902376, 18.7726841)	10	(99.0018657, 18.7726841)
11	(99.0134938, 18.7726841)		
จุดก่อกำเนิดตั้งต้นที่ N_{20}			
1	(98.9682526, 18.8071414)	2	(98.9915088, 18.8071414)
3	(99.0031369, 18.8071414)	4	(98.9682526, 18.7955133)
5	(98.9682526, 18.7838852)	6	(99.0031369, 18.7838852)
7	(98.9682526, 18.7722571)	8	(98.9798807, 18.7722571)
9	(98.9915088, 18.7722571)	10	(99.0031369, 18.7722571)

เมื่อนำเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ข้างต้นไปใช้ในการพิจารณาค่าเฉลี่ยของระยะทางทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ และค่าเฉลี่ยของพื้นที่ทับซ้อนทั้งหมดระหว่างจุดก่อกำเนิดแต่ละคู่ เพื่อหาจุดก่อกำเนิดที่เหมาะสมที่สุดในวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท ซึ่งได้ผลลัพธ์ของการนำเซตดังกล่าวไปวิเคราะห์ตามตาราง 22

ตาราง 22 ตารางระยะทางเฉลี่ยและพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยของแต่ละเขตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่ได้จากวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่หลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิท

เขตที่	ระยะทางเฉลี่ยระหว่างทุกคู่จุดก่อกำเนิด		พื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ
	หน่วยองศา	หน่วยเมตร	
1	0.009484292	1054.07	7.68
2	0.009484292	1054.07	8.73

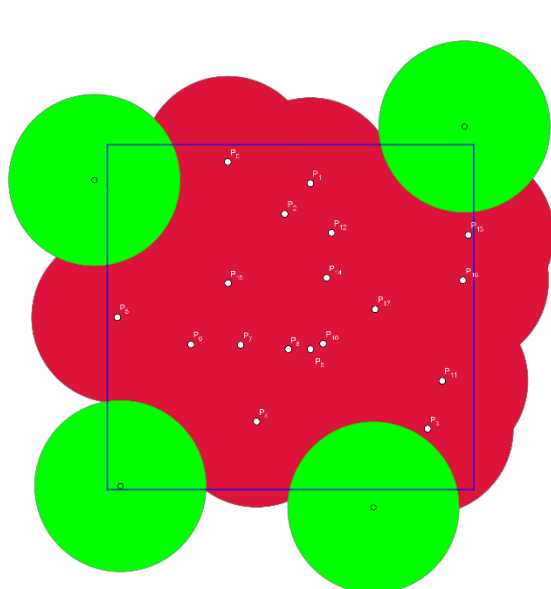
บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

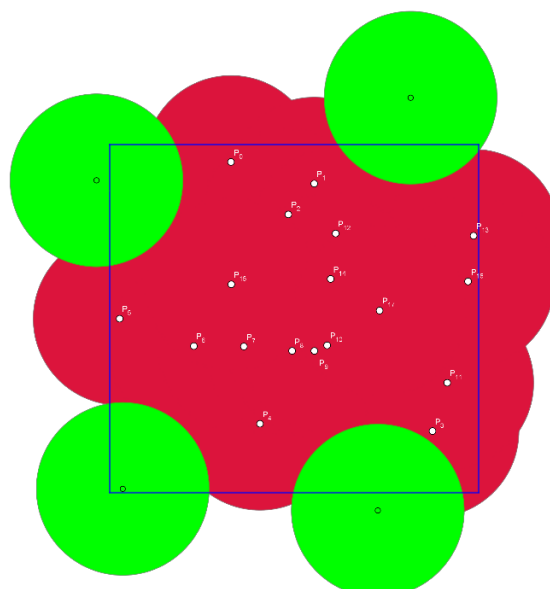
การค้นคว้าอิสระนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอยทั่วไป โดยศึกษาผ่านนิยามและทฤษฎีบทของปัญหาการวางตำแหน่งสาหรณูปโภค ปัญหาการปกคลุมพื้นที่ และแผนภาพไวโรนอยทั่วไป

5.1 สรุปผลการค้นคว้าอิสระ

จากการศึกษาปัญหาการเพิ่มจุดก่อกำเนิดของแผนภาพไวโรนอยทั่วไป จะได้ผลสรุปของแต่ละวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดใหม่ของแผนภาพไวโรนอยดังนี้

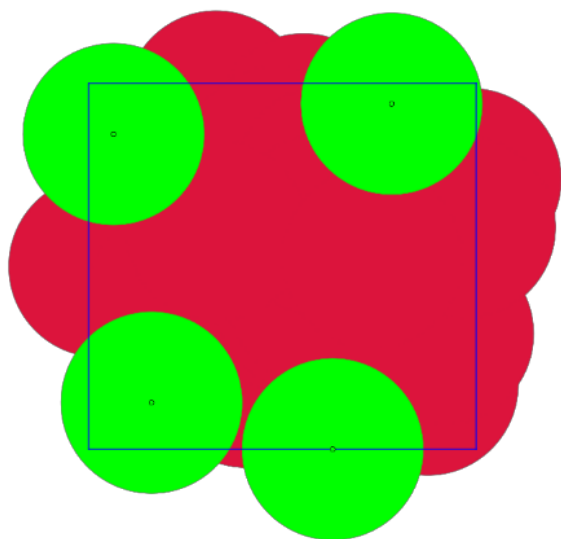


รูปที่ 44 รูปเซตของจุด N_3, N_9, N_{12} และ N_{15} ที่มีระยะทางเฉลี่ยมากที่สุดของวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

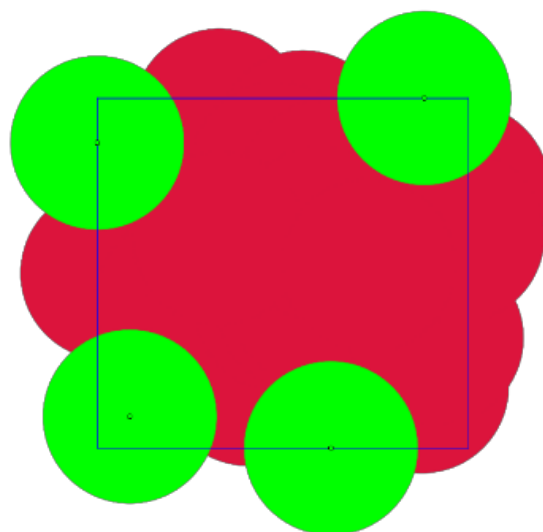


รูปที่ 45 รูปเซตของจุด N_3, N_8, N_{12} และ N_{15} ที่มีพื้นที่ที่ทับซ้อนเฉลี่ยที่สุดของวิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต

วิธีการใช้จุดตัดของเส้นขอบวงของพื้นที่และเส้นขอบเขต ได้ว่าเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีระยะทางเฉลี่ยมากที่สุดคือเซตของจุด N_3, N_9, N_{12} และ N_{15} ดังรูปที่ 44 และเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีร้อยละของพื้นที่ทับซ้อนที่น้อยที่สุดคือเซตของจุด N_3, N_8, N_{12} และ N_{15} ดังรูปที่ 45 ซึ่งเมื่อนำผลลัพธ์ของเซตจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดมาเฉลี่ยแล้วพบว่าจะมีระยะทางเฉลี่ยรวมอยู่ที่ 0.009901115 องศา หรือ 1,100.4 เมตร โดยระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดเพิ่มขึ้นร้อยละ 20.42 และมีพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยรวมคือร้อยละ 10.79 โดยพื้นที่ทับซ้อนของพื้นที่ให้บริการเฉลี่ยลดลงจากเดิมร้อยละ 31.13

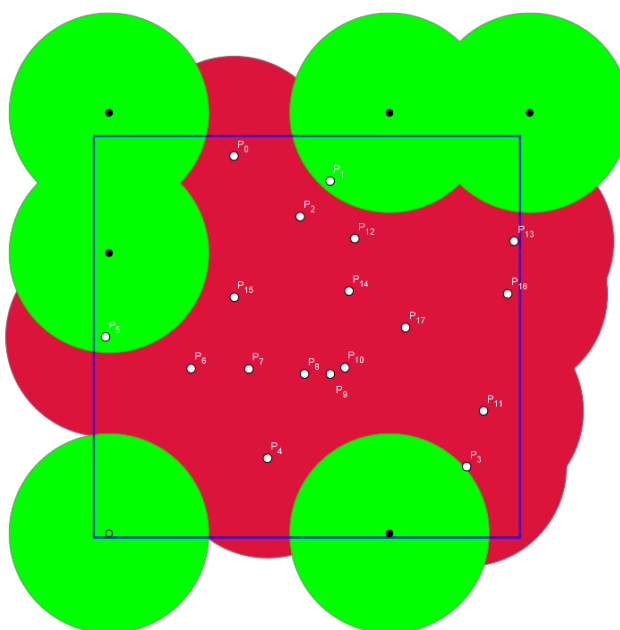


รูปที่ 46 รูปเซตของจุด N_4, N_8, N_{17} และ N_{18} ที่มีระยะทางเฉลี่ยมากที่สุดของวิธีการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม



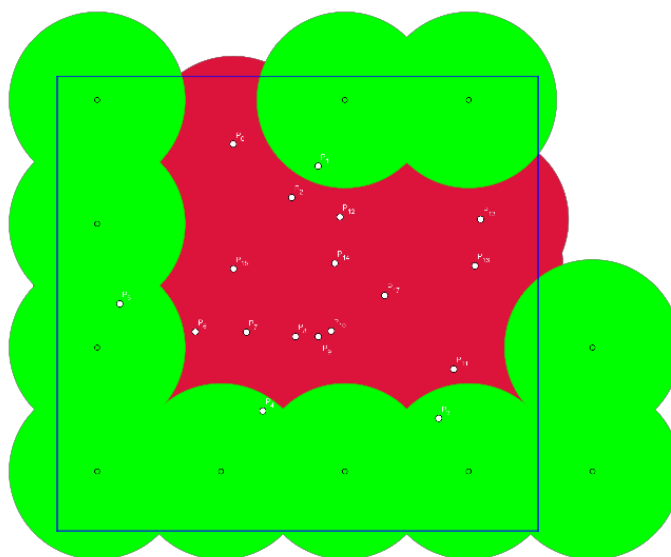
รูปที่ 47 รูปเซตของจุด N_6, N_{13}, N_{17} และ N_{21} ที่มีพื้นที่ที่ทับซ้อนเฉลี่ยน้อยที่สุดของวิธีการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม

วิธีการใช้จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมหรือเส้นขอบเขตนอกของรูปหลายเหลี่ยม ได้ว่าเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีระยะทางเฉลี่ยมากที่สุดคือเซตของจุด N_4, N_8, N_{17} และ N_{18} ดังรูปที่ 46 และเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีร้อยละของพื้นที่ทับซ้อนที่น้อยที่สุดคือเซตของจุด N_6, N_{13}, N_{17} และ N_{21} ดังรูปที่ 47 ซึ่งเมื่อนำผลลัพธ์ของเซตจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดมาเฉลี่ยแล้วพบว่าจะมีระยะทางเฉลี่ยรวมอยู่ที่ 0.008732696 องศา หรือ 970.54 เมตร โดยระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดเพิ่มขึ้นร้อยละ 5.84 และมีพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยรวมคือร้อยละ 11.55 โดยพื้นที่ทับซ้อนของพื้นที่ให้บริการเฉลี่ยลดลงจากเดิมร้อยละ 26.28



รูปที่ 48 รูปเซตของจุดก่อกำเนิดตั้งต้น N_{15} จากวิธีวิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดทีละหลายจุดด้วยวงกลม
 ทับซ้อนที่แนบสนิทบนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

วิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดทีละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แนบสนิทบนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมือง
 จังหวัดเชียงใหม่ ได้ว่าเซตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีระยะทางเฉลี่ยเท่ากันทั้งสองเซต และเซตของจุดก่อกำเนิด
 ใหม่ที่มีร้อยละของพื้นที่ทับซ้อนที่น้อยที่สุดคือเซตของจุดก่อกำเนิดตั้งต้น N_{15} ดังรูปที่ 48 ซึ่งเมื่อนำผลลัพธ์
 ของเซตจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดมาเฉลี่ยแล้วพบว่าจะมีระยะทางเฉลี่ยรวมอยู่ที่ 0.009328632 องศา หรือ
 1,036.77 เมตร โดยระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดเพิ่มขึ้นร้อยละ 13.46 และมีพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยรวมคือ
 ร้อยละ 9.96 โดยพื้นที่ทับซ้อนของพื้นที่ให้บริการเฉลี่ยลดลงจากเดิมร้อยละ 36.41



รูปที่ 49 รูปเขตของจุดก่อกำเนิดตั้งต้น N_{11} วิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แบบสนิทบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่

วิธีการเพิ่มจุดก่อกำเนิดที่ละหลายจุดด้วยวงกลมทับซ้อนที่แบบสนิทบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตร รอบคูเมืองจังหวัดเชียงใหม่ ได้ว่าเขตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีระยะทางเฉลี่ยเท่ากันทั้งสองเขต และเขตของจุดก่อกำเนิดใหม่ที่มีร้อยละของพื้นที่ทับซ้อนที่น้อยที่สุดคือเขตของจุดก่อกำเนิดตั้งต้น N_{11} ดังรูปที่ 49 ซึ่งเมื่อนำผลลัพธ์ของเขตจุดก่อกำเนิดใหม่ทั้งหมดมาเฉลี่ยแล้วพบว่าจะมีระยะทางเฉลี่ยรวมอยู่ที่ 0.009484292 องศา หรือ 1,054.07 เมตร โดยระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดเพิ่มขึ้นร้อยละ 15.35 และมีพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยรวมคือร้อยละ 8.21 โดยพื้นที่ทับซ้อนของพื้นที่ให้บริการเฉลี่ยลดลงจากเดิมร้อยละ 47.63

โดยจากวิธีการที่ได้จากการศึกษาค้นคว้าทั้งหมดสามารถสรุปเกี่ยวกับระยะทางเฉลี่ยเมื่อเทียบกับระยะทางเฉลี่ยตอนตั้งต้น บนพื้นที่ 1 กิโลเมตร และบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตรรอบคูเมืองเชียงใหม่รอบคูเมืองเชียงใหม่ออกมาได้เป็นตาราง 23 และตาราง 24

ตาราง 23 ตารางเปรียบเทียบระยะทางเฉลี่ยของเขตที่ดีที่สุดของแต่ละวิธีการวางจุดก่อกำเนิดใหม่บนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองเชียงใหม่

วิธีการที่	ระยะทางเฉลี่ยที่มากที่สุด (เมตร)	การเพิ่มขึ้นของระยะทางเฉลี่ย
1	1,100.40	20.42%
2	970.54	5.84%
3	1,036.77	13.46%

ตาราง 24 ตารางเปรียบเทียบระยะทางเฉลี่ยของเซตที่ดีที่สุดของแต่ละวิธีการวางจุดก่อกำเนิดใหม่บนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองเชียงใหม่

วิธีการที่	ระยะทางเฉลี่ยที่มากที่สุด (เมตร)	การเพิ่มขึ้นของระยะทางเฉลี่ย
3	1,054.07	15.35%

นอกจากนี้จากวิธีการที่ได้จากการศึกษาค้นคว้าทั้งหมดสามารถสรุปเกี่ยวกับการทับซ้อนของพื้นที่เฉลี่ย เมื่อเทียบกับการทับซ้อนของพื้นที่ตอนต้น บนพื้นที่ 1 กิโลเมตร และบนพื้นที่ 1.5 กิโลเมตรรอบคูเมืองเชียงใหม่ รอบคูเมืองเชียงใหม่ ออกมาได้เป็นตาราง 25 และตาราง 26

ตาราง 25 ตารางเปรียบเทียบระยะทางเฉลี่ยของเซตที่ดีที่สุดของแต่ละวิธีการวางจุดก่อกำเนิดใหม่บนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองเชียงใหม่

วิธีการที่	พื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยที่น้อยที่สุด	การลดลงของพื้นที่เฉลี่ย
1	10.79%	31.13%
2	11.55%	26.28%
3	9.96%	36.41%

ตาราง 26 ตารางเปรียบเทียบระยะทางเฉลี่ยของเซตที่ดีที่สุดของแต่ละวิธีการวางจุดก่อกำเนิดใหม่บนพื้นที่ 1 กิโลเมตร รอบคูเมืองเชียงใหม่

วิธีการที่	พื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยที่น้อยที่สุด	การลดลงของพื้นที่เฉลี่ย
3	9.96%	31.13%

5.2 ข้อเสนอแนะการค้นคว้าอิสระ

การค้นคว้าอิสระนี้ไม่ได้นำตัวแปรอื่น เช่น ความหนาแน่นของประชากร ภูมิประเทศ และการทับซ้อนของอาคารที่ตั้งอยู่ก่อนแล้ว เพื่อให้เกิดความสมจริงในการศึกษา ผู้ค้นคว้าอิสระหวังให้ผู้ที่จะศึกษาต่อหรือนำไปพัฒนานำตัวแปรอื่นมาคิดด้วย โดยแนะนำให้ลองประยุกต์ปัญหากับแผนภาพไวโรนอยบนโครงข่ายเพื่อให้ได้ระยะทางตามความเป็นจริง และอาจจะมีการนำระยะทางที่เป็นค่าผิดปกติออกก่อนทำการหารค่าเฉลี่ยของพื้นที่ให้บริการทั้งหมด นอกจากนี้ถ้าสามารถหาขอบเขตล่างของของจำนวนวงกลมที่ปกคลุมพื้นที่ หรือพิสูจน์ว่าวิธีการที่ใช้ในการหาจำนวนวงกลมที่น้อยที่สุดได้ค่าออกมาเป็นขอบเขตล่างจริง จะทำให้มีความเหมาะสม

บรรณานุกรม

- [1] Devadoss S.L., O'Rourke, J. (2011). Discrete and Computational Geometry. New Jersey, Princeton University Press
- [2] Okabe, A., Suzuki, A. (1997). Location optimization problems solved through Voronoi diagrams. European Journal of Operational Research, 98, 445-456.
- [3] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., Chiu, S.N. (2000). Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi diagram Second Edition. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.
- [4] OpenAI's ChatGPT AI language model, response to a question from the author, Retrieved 15 December 2022.
- [5] Preparata, F.P., Shamos, M.I. (1985). Computational Geometry An Introduction. New York: Springer-Verlag New York Inc.
- [6] Toth, C.D., O'Rourke, J., Goodman J.E. (2004). Handbook of Discrete and Computational Geometry 2nd Edition. New York: Chapman and Hall/CRC.
- [7] Weisstein E. (2002). Circular Segment. Wolfram MathWorld, Retrieved 31 January 2023, From <https://mathworld.wolfram.com/CircularSegment.html>
- [8] กชกร กันทะเนตร. (2019). นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานเกี่ยวกับแผนภาพโรรนอยบนโครงข่าย, การออกแบบเส้นทางท่องเที่ยวที่สั้นที่สุดโดยใช้แผนภาพโรรนอยบนโครงข่าย. 9-10.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

โปรแกรมคำนวณระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดคู่ใดๆ ด้วยสามเหลี่ยมเดอลาน์

โปรแกรมคำนวณระยะทางเฉลี่ยระหว่างจุดก่อกำเนิดคู่ใดๆ ด้วยสามเหลี่ยมเตอลาเน่ บน Python ผ่านทาง Google Colaboratory

1. นำเข้าชุดคำสั่งที่จำเป็นในการใช้งาน และตั้งค่าการแสดงผลของรูปภาพ

```
import csv
from scipy.spatial import Delaunay
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from statistics import *
import pandas as pd
plt.rcParams['figure.figsize'] = [16, 9]
```

2. นำเข้าจุดก่อกำเนิดที่ต้องการใช้ในการหาระยะทางเฉลี่ย และนับจำนวนจุดก่อกำเนิดทั้งหมดที่นำเข้า

```
points = np.array([[98.9801855, 18.80344364],
[98.98772639, 18.80129279],
[98.98530211, 18.79839442],
[98.99890641, 18.77772347],
[98.98254077, 18.77832937],
[98.96911472, 18.78851767],
[98.97655431, 18.7857918],
[98.9809243, 18.78575451],
[98.98555004, 18.78525457],
[98.98786708, 18.78567762],
[98.98886514, 18.78558507],
[99.00062173, 18.78231052],
[98.98977953, 18.79663686],
[99.00297189, 18.7960619],
[98.98939011, 18.79215321],
[98.97975388, 18.79168332],
[99.00232006, 18.79221156],
[98.99400967, 18.78916881]])
len(points)
```

3. คำนวณสามเหลี่ยมเดอลาเน่จากจุดทั้งหมดโดยใช้ชุดคำสั่งที่นำเข้าก่อนหน้า และแสดงผลเป็นรูปภาพ

```
tri = Delaunay(points)
fig, ax = plt.subplots()
plt.grid(True)
for t in tri.simplices:
    p1, p2, p3 = points[t]
    ax.plot([p1[0], p2[0]], [p1[1], p2[1]], 'b-')
    ax.plot([p1[0], p3[0]], [p1[1], p3[1]], 'b-')
    ax.plot([p2[0], p3[0]], [p2[1], p3[1]], 'b-')
for i, p in enumerate(points):
    ax.text(p[0], p[1], str(i))
plt.show()
```

4. วิเคราะห์ข้อมูลระยะทางระหว่างจุดแต่ละคู่บนสามเหลี่ยมเดอลาเน่ เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณระยะทางเฉลี่ยของรัศมีพื้นที่ให้บริการ โดยจะได้ระยะทางออกมาในหน่วยขององศา และนับจำนวนคู่ของจุดทั้งหมด

```
distances = []
for t in tri.simplices:
    p1, p2, p3 = points[t]
    d1 = np.linalg.norm(p1 - p2)
    d2 = np.linalg.norm(p1 - p3)
    d3 = np.linalg.norm(p2 - p3)
    distances.append(d1)
    distances.append(d2)
    distances.append(d3)
distances_deg = np.array(distances)
len(distances_deg)
```

5. เปลี่ยนแปลงระยะทางที่คำนวณได้จากหน่วยองศาเป็นหน่วยเมตร

```
deg_to_meter = 111139
real_distances = distances_deg*deg_to_meter
```

6. นำข้อมูลระยะทางที่ได้มาวิเคราะห์ด้วยแผนภาพกล่อง เพื่อแสดงผลของค่าเฉลี่ย และค่าผิดปกติของระยะทาง ซึ่งตัวอย่างด้านล่างเป็นการคำนวณบนหน่วยองศา แต่สามารถเปลี่ยนค่าของตัวแปรเพื่อคำนวณและแสดงผลบนหน่วยเมตรได้

```
min_deg = min(distances_deg)
mean_deg = mean(distances_deg)
median_deg = median(distances_deg)
max_deg = max(distances_deg)
print(f'Min: {min_deg}')
print(f'Mean: {mean_deg}')
print(f'Median: {median_deg}')
print(f'Max: {max_deg}')

sorted_deg = sorted(distances_deg)
length = len(sorted_deg)

first_quartile_deg = sorted_deg[length // 4]
third_quartile_deg = sorted_deg[length * 3 // 4]
print(f'First quartile: {first_quartile_deg}')
print(f'Third quartile: {third_quartile_deg}')

bp_deg = plt.boxplot(distances_deg)
plt.grid(True)
outliers_deg = bp_deg['fliers'][0]
lower_whisker_deg = bp_deg['whiskers'][0]
upper_whisker_deg = bp_deg['whiskers'][1]
print(f'\nUpper of Degree: {upper_whisker_deg.get_ydata()}')
print(f'Lower of Degree: {lower_whisker_deg.get_ydata()}\n')
print(f'\nOutliers of Degree:\n {outliers_deg.get_ydata()}\n')
```

เราได้เขียนโปรแกรมและบันทึกข้อมูลไว้ในแหล่งข้อมูลต่อไปนี้

<https://colab.research.google.com/drive/1bjxpxToJrt7Mrzk484ZxUytJ6PAJ5SEe?usp=sharing>

ภาคผนวก ข

โปรแกรมในการคำนวณพื้นที่ทับซ้อนเฉลี่ยของวงกลมแต่ละคู่

โปรแกรมในการคำนวณพื้นที่ที่ทับซ้อนเฉลี่ยของวงกลมแต่ละคู่บน Python ผ่านทาง Google Colaboratory

1. นำเข้าจุดก่อกำเนิดที่ต้องการใช้ในการหาระยะทางเฉลี่ย และนับจำนวนจุดก่อกำเนิดทั้งหมดที่นำเข้า

```
points = [(98.9801855, 18.80344364),
(98.98772639, 18.80129279),
(98.98530211, 18.79839442),
(98.99890641, 18.77772347),
(98.98254077, 18.77832937),
(98.96911472, 18.78851767),
(98.97655431, 18.7857918),
(98.9809243, 18.78575451),
(98.98555004, 18.78525457),
(98.98786708, 18.78567762),
(98.98886514, 18.78558507),
(99.00062173, 18.78231052),
(98.98977953, 18.79663686),
(99.00297189, 18.7960619),
(98.98939011, 18.79215321),
(98.97975388, 18.79168332),
(99.00232006, 18.79221156),
(98.99400967, 18.78916881)]
len(points)
```

2. นำเข้าชุดคำสั่งที่จำเป็นในการใช้งาน

```
from math import *
from typing import List, Tuple
import pandas as pd
```

3. สร้างฟังก์ชันแยกแยะการทับซ้อนของวงกลมด้วยรัศมี โดยกำหนดให้ระยะห่างระหว่างจุดแทนด้วย d และรัศมีแทนด้วย r

3.1 ถ้าระยะห่างระหว่างจุดก่อกำเนิดมากกว่าสองเท่าของรัศมีแล้วพื้นที่ที่ทับซ้อนคือ 0 ตารางหน่วย

3.2 ถ้าระยะห่างระหว่างจุดก่อกำเนิดน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 แล้วพื้นที่ที่ทับซ้อนคือ πr^2 ตารางหน่วย

3.3 สำหรับระยะห่างอื่น หาขนาดของมุม a ที่เกิดจากการทับซ้อนระหว่างวงกลม มีค่าเป็น $2\arccos(\frac{d}{2r})$ จากนั้นนำไปคำนวณพื้นที่ที่ทับซ้อนได้เป็น $r^2(a - \sin(a))$ ตารางหน่วย

```
r = 0.0080979479810921
def intersection_area(c1, c2, r):
    d = sqrt((c2[0] - c1[0])**2 + (c2[1] - c1[1])**2)
    if d > 2*r:
        return 0
    elif d <= 0:
        return pi * r**2
    else:
        a = acos((d/2)/r)*2
        return (r**2)*(a-sin(a))
```

4. สร้างฟังก์ชันสำหรับการหาพื้นที่ที่ทับซ้อนของวงกลมแต่ละคู่ในรูปแบบของตารางองศา ตารางเมตร และเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ ด้วยฟังก์ชันแยกแยะการทับซ้อนของพื้นที่วงกลมด้วยรัศมี

```
def intersection_area_data(points:List[Tuple[int,int]],r:int):
    areas = []
    n = len(points)
    for i in range(n):
        for j in range(i+1,n):
            area_deg = intersection_area(points[i],points[j],r)
            center1 = i+1
            center2 = j+1
            area_real = area_deg*(111139**2)
            pct = area_deg/((pi)*r**2)*100
            areas.append((center1, center2, area_deg, area_real, pct))
    return areas
```

5. นำฟังก์ชันสำหรับการหาพื้นที่ทับซ้อนของวงกลมแต่ละคู่ที่ได้มา ใช้ทำข้อมูลจุดก่อกำเนิดและรัศมีที่กำหนด

```
data = intersection_area_data(points,r)
df = pd.DataFrame(data)
df.columns = ['Circle 1', 'Circle 2', 'Area Degree', 'Area
Real', 'Percentage']
df.to_csv('Area Intersection.csv', index=False)
```

6. คำนวณค่าเฉลี่ยของพื้นที่ในตารางองศา ตารางเมตร และเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ พร้อมทั้งแสดงผล

```
mean_deg = df['Area Degree'].mean()
mean_real = df['Area Real'].mean()
mean_pct = df['Percentage'].mean()
print(f'Mean of all intersection Area are')
print(f'Area (Degree): {mean_deg}')
print(f'Area (Real): {mean_real}')
print(f'Percentage: {mean_pct}%')
```

โดยได้เขียนโปรแกรมและบันทึกข้อมูลไว้ในแหล่งข้อมูลต่อไปนี้

https://drive.google.com/file/d/1LqRGZR_0dzpoAROWRaws0lanIM6zXabS/view?usp=sharing