

สมบัติที่น่าสนใจของฟังก์ชัน $\pi(x)$

(Interesting property of $\pi(x)$)

นายจักริน อ้อปิมปา

รหัส 620510548

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2565

สมบัติที่น่าสนใจของฟังก์ชัน $\pi(x)$

(Interesting property of $\pi(x)$)

จักริน อ๋อพิมปา

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

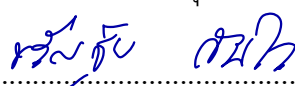
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ :

.....  ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร.สุกัลักษณ์ โพธิ์)

.....  กรรมการ

(อ. ดร.ขวัญชัย กันไว)

สมบัติที่น่าสนใจของฟังก์ชัน $\pi(x)$

(Interesting property of $\pi(x)$)

นายจักริน อ้อปมปา

รหัส 620510548

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้า ประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ ทำการศึกษา เรื่อง สมบัติที่น่าสนใจของฟังก์ชัน $\pi(x)$

ผู้ค้นคว้าขอขอบคุณ ผศ. ดร.ศุภลักษณ์ โพธิ์ ประธานการควบคุมการค้นคว้าอิสระ ที่คอยช่วยให้คำอธิบาย ในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ คอยให้ความรู้และคำแนะนำเพิ่มเติม อีกทั้งยังช่วยชี้แนะ ให้คำปรึกษาตลอดจนช่วย ตรวจสอบความถูกต้องและแก้ไข จนทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสิ้นสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบคุณ ผศ. ดร.ณัฐวัชร สนิธิชัย อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่คอยให้ความรู้ และคำแนะนำเพิ่มเติมนอกตำราเรียนให้แก่ผู้ค้นคว้า

ขอขอบคุณอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่านที่ได้ อบรม สั่งสอน และคอยให้ความรู้ทั้งในและนอกตำราเรียนให้แก่ผู้ค้นคว้า อันเป็นประโยชน์และสามารถนำมา ประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคน และขอขอบคุณผู้ที่เกี่ยวข้องที่คอย สนับสนุน ให้คำปรึกษา ช่วยเหลือ ขณะที่ผู้ค้นคว้าอิสระทำการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้

ท้ายที่สุดนี้ขอขอบคุณบิดา มารดา และครอบครัว รวมทั้งขอขอบคุณไปยังทุกท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับ งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ ซึ่งผู้ค้นคว้าไม่ได้เอ่ยนาม มา ณ ที่นี้ด้วย

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ผู้ค้นคว้าขอมอบ คำชื่นชมและคุณความดีนั้นแต่ บิดา มารดา ครู อาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน ในทางตรงกันข้าม หากผลงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เกิดข้อผิดพลาดประการใด ผู้ค้นคว้าขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย

จักริน อ้อปิมปา

หัวข้อ (ภาษาไทย)	สมบัติที่น่าสนใจของฟังก์ชัน $\pi(x)$
(ภาษาอังกฤษ)	Interesting property of $\pi(x)$
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นายจักริน อ้อปิมปา รหัสนักศึกษา 620510548
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ. ดร.ศุภลักษณ์ โปธิ
ชื่อกรรมการสอบ	อ. ดร.ขวัญชัย กันไฉ

บทคัดย่อ

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาสมบัติบางประการที่น่าสนใจของฟังก์ชัน $\pi(x)$ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนของจำนวนคู่ในรูป $2p$ และจำนวนของจำนวนเต็มบวกในรูปแบบ pq เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ นอกจากนี้เรายังตรวจสอบข้อคาดการณ์ต่อไปนี้อยู่โดยใช้โปรแกรมไพทอนอีกด้วย

- (1) สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$
- (2) สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนกำลังสอง สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$

Abstract

In this work, we study some interesting properties of the function $\pi(x)$ related to the number of numbers of the form $2p$ and the number of numbers of the form pq when p and q are primes. Moreover, we use Python program to examine some conjectures on $\pi(x)$ such as:

- (1) For any integer $n > 1$, $\pi(kn)$ is prime for some $k = 1, 2, 3, \dots$
- (2) For any integer $n > 1$, $\pi(kn)$ is a square number for some $k = 1, 2, 3, \dots$

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2-3
3 ผลการศึกษา (Results)	4-18
4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	19
บรรณานุกรม	20
ภาคผนวก	

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

ฟังก์ชัน $\pi(x)$ เป็นการนับจำนวนของจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ เช่น $\pi(2)=1$ เนื่องจากจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2 มีทั้งหมด 1 จำนวน คือ 2 หรือ $\pi(5)=3$ เนื่องจากจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 มีทั้งหมด 3 จำนวน คือ 2, 3, และ 5 [8] ในปลายคริสต์ศตวรรษที่ 18 มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากได้เริ่มศึกษาสมบัติของฟังก์ชัน $\pi(x)$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหารูปแบบทั่วไป (สูตร) ของฟังก์ชันนี้ แต่จนถึงปัจจุบันก็ยังไม่มีการพบรูปแบบทั่วไปที่ทำได้ มีเพียงการค้นพบรูปแบบเฉพาะบางกรณีและการศึกษาสมบัติที่น่าสนใจของฟังก์ชัน $\pi(x)$ เท่านั้น

ในปลายคริสต์ศตวรรษที่ 18 มีการนำเสนอข้อคาดการณ์ว่า $\pi(x)$ น่าจะมีค่าใกล้เคียงกับ $\frac{x}{\log x}$ โดย Johann Carl Friedrich และโดย Adrien-Marie Legendre [8] พวกเขาคาดว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi(x)}{x / \log x} \right) = 1$ ข้อคาดการณ์นี้รู้จักกันดีในชื่อ ทฤษฎีบทจำนวนเฉพาะ (prime number theorem) ภายหลังข้อคาดการณ์นี้ได้ถูกพิสูจน์โดยนักคณิตศาสตร์หลายท่านด้วยวิธีที่แตกต่างกัน ในวิชาสัมมนา (206390) เราได้ทำการศึกษาบทความเรื่อง Interesting property of $x / \pi(x)$ [9] ซึ่งศึกษาโดย Robert T. Hager และโดย William L. Hightower และถูกตีพิมพ์ในวารสาร Taylor & Francis เราจึงมีความสนใจในการศึกษาสมบัติของฟังก์ชัน $\pi(x)$ เพิ่มเติม

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาสมบัติบางประการของฟังก์ชัน $\pi(x)$ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนของจำนวนคู่ในรูป $2p$ และจำนวนของจำนวนเต็มบวกในรูป pq เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ นอกจากนี้เรายังตรวจสอบข้อคาดการณ์ต่อไปนี้อยู่โดยใช้โปรแกรมไพทอนอีกด้วย

- (1) สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$
- (2) สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนกำลังสอง สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

กำหนดสัญลักษณ์ $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ นั่นคือ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

2.1 จำนวนเฉพาะและจำนวนเฉพาะคู่แฝด

บทนิยาม 2.1.1 จำนวนเต็ม $p > 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้าจำนวนเต็มบวกที่หาร p ลงตัว มีเพียง 1 และ p เท่านั้น

บทนิยาม 2.1.2 ถ้า p และ $p+2$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้วเราจะเรียกคู่อันดับ $(p, p+2)$ ว่าจำนวนเฉพาะคู่แฝด

ตัวอย่าง 2.1.3 คู่อันดับต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของจำนวนเฉพาะคู่แฝด (3, 5) (5, 7) (11, 13) (41, 43)

2.2 ลำดับของจำนวนจริงและขอบเขตของเซต

บทนิยาม 2.2.3 ให้ A เป็นเซตไม่ว่างและ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป $\mathbb{R}$ เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ลดบน A ก็ต่อเมื่อ ทุก $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$

บทนิยาม 2.2.4 ให้ $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ และ $u \in \mathbb{R}$ เรากล่าวว่า u เป็นขอบเขตบนของ S ก็ต่อเมื่อ $x \leq u$ ทุก $x \in S$

บทนิยาม 2.2.5 ให้ $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ เรากล่าวว่า a เป็นสมาชิกใหญ่ที่สุดของ S ก็ต่อเมื่อ $a \in S$ และ a เป็นขอบเขตบนของ S เขียนแทนด้วย $a = \max S$

บทนิยาม 2.2.6 ลำดับของจำนวนจริง คือ ฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็มบวก (หรือเซตของจำนวนนับ) $\mathbb{N}$ ไป $\mathbb{R}$

ข้อตกลง

- (1) ให้ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ นั่นคือ f เป็นลำดับของจำนวนจริง สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ เราจะเรียก $f(n)$ ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ f และเขียนแทน $f(n)$ ด้วย x_n นั่นคือ $x_n = f(n)$
- (2) เราจะใช้สัญลักษณ์ $\{x_n\}$ หรือ (x_n) หรือ $x_1, x_2, x_3, \dots$ เขียนแทนลำดับ
- (3) ถ้า $A \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ $x_n \in A$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ เราเรียก $\{x_n\}$ เป็นลำดับของสมาชิกใน A หรือลำดับใน A บางครั้งเราเขียนแทนด้วย $\{x_n\} \subseteq A$

บทนิยาม 2.2.7 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เราจะกล่าวว่า

- (1) $\{x_n\}$ มีขอบเขตล่าง ถ้าเรจน์ของลำดับ $\{x_n\}$ มีขอบเขตล่าง นั่นคือ มี $l \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $l \leq x_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
- (2) $\{x_n\}$ มีขอบเขตบน ถ้าเรจน์ของลำดับ $\{x_n\}$ มีขอบเขตบน นั่นคือ มี $u \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $x_n \leq u$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
- (3) $\{x_n\}$ ไม่มีขอบเขต ถ้าเรจน์ของลำดับ $\{x_n\}$ ไม่มีขอบเขตล่างหรือขอบเขตบน นั่นคือ ทุก $M > 0$ มี $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $|x_k| > M$

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

3.1 สมบัติที่น่าสนใจบางประการของฟังก์ชัน $\pi(x)$

บทนิยาม 3.1.1 สำหรับจำนวนจริงบวก x ใด ๆ กำหนดให้ $\pi(x)$ คือ จำนวนของจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

ตัวอย่าง 3.1.2 ตารางต่อไปนี้แสดงค่า $\pi(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 2 ถึง 21

x	$\pi(x)$	x	$\pi(x)$
2	1	12	5
3	2	13	6
4	2	14	6
5	3	15	6
6	3	16	6
7	4	17	7
8	4	18	7
9	4	19	8
10	4	20	8
11	5	21	8

ตารางที่ 1 ตารางแสดงค่าของ $\pi(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 2 ถึง 21

ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างผลการศึกษาที่เป็นที่รู้จักอย่างกว้างขวางเกี่ยวกับฟังก์ชัน $\pi(x)$

ทฤษฎีบท 3.1.3 (J.Hadamard – C.J.Poussin) [10] ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$

ตัวอย่าง 3.1.4 ตารางต่อไปนี้แสดงค่า $\pi(x)$ และ $\frac{x}{\log x}$ สำหรับบางค่า x

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$\pi(x) - \frac{x}{\log x}$
10	4	4.342	- 0.342
10^2	25	21.715	3.285
10^3	168	144.765	23.235
10^4	1,229	1,085.736	143.264
10^5	9,592	8,685.890	906.110

ตารางที่ 2 ตารางแสดงค่าของ $\pi(x)$ และ $\frac{x}{\log x}$ สำหรับบางค่า x

ในปีการศึกษา 2564 ผู้เขียนได้ทำการศึกษาบทความของ Robert T. Hager และ William L. Hightower [9] ที่กล่าวถึงสมบัติของ $\pi(x)$ ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.5 ให้ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด และ สมมติลำดับ $\left\{ \frac{x}{f(x)} \right\}_{x \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $\frac{x}{f(x)} \leq n$ สำหรับบาง $x \in \mathbb{N}$ แล้วจะมี $y \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $\frac{y}{f(y)} = n$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนนับ สมมติว่ามี $x \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\frac{x}{f(x)} \leq n$

กรณีที่ (1) ถ้า $\frac{x}{f(x)} = n$ ได้ว่าทฤษฎีนี้เป็นจริง

กรณีที่ (2) สมมติ $\frac{x}{f(x)} < n$

เนื่องจาก $\left\{ \frac{x}{f(x)} \right\}_{x \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต จะมี $w \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\frac{w}{f(w)} \geq n$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันไม่ลด และ $\frac{x}{f(x)} < n \leq \frac{w}{f(w)}$

เป็นผลให้ได้ว่า $x < w$

ให้ $A = \{y \in \mathbb{N} \mid x \leq y < w \text{ และ } \frac{y}{f(y)} < n\}$

จะได้ว่า $A \neq \emptyset$ เพราะ $x \in A$ ($\frac{x}{f(x)} < n$ และ $x < w$)

เนื่องจาก $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า A มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดเสมอ

นั่นคือ จะมี $z \in \mathbb{N}$ ที่ $z = \max \{y \in \mathbb{N} \mid x \leq y < w \text{ และ } \frac{y}{f(y)} < n\}$

จาก $z \in A$ จะได้ $\frac{z}{f(z)} < n$ หรือ

$$z < nf(z) \quad (1)$$

เนื่องจาก $z = \max A$ จะได้ $z+1 \leq w$

แต่ $z+1 \notin A$ เป็นผลให้ $\frac{z+1}{f(z+1)} \geq n$ นั่นคือ

$$nf(z+1) \leq z+1 \quad (2)$$

จากอสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า

$$nf(z+1) \leq z+1 < nf(z)+1 \quad (3)$$

เป็นผลให้

$$f(z+1) - f(z) < \frac{1}{n} < 1 \quad (4)$$

เนื่องจาก $f(z+1)$ และ $f(z)$ เป็นจำนวนนับ ที่ $f(z) \leq f(z+1)$

ดังนั้น $f(z+1) - f(z) = 0$ หรือ $f(z+1) = f(z)$

แทน $f(z+1) = f(z)$ ในอสมการ (3) จะได้ว่า $nf(z) \leq z+1 < nf(z)+1$

เนื่องจาก $z+1$ เป็นจำนวนนับ $nf(z)$ และ $nf(z)+1$ เป็นจำนวนนับที่เรียงติดกัน

ดังนั้น จะได้ว่า $nf(z) = z+1$

เป็นผลให้ $n = \frac{z+1}{f(z)} = \frac{z+1}{f(z+1)}$

□

จาก $\pi(2)=1$ ดังนั้น $\frac{2}{\pi(2)}=2$ เป็นผลให้เราได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.1.6 สำหรับจำนวนนับ $n > 1$ จะมี $x \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\frac{x}{\pi(x)} = n$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

(1) จะแสดงว่า π เป็นฟังก์ชันไม่ลด

ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ ที่ $x < y$ จะเห็นได้ว่าจำนวนของจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $x \leq$ จำนวนของจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ y

นั่นคือ $\pi(x) \leq \pi(y)$

(2) $\left\{ \frac{x}{\pi(x)} \right\}_{x \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต เนื่องจาก Golomb พิสูจน์ไว้ใน [2]

จาก (1), (2) และ สำหรับจำนวนนับ $n > 1$ จะมี 2 เป็นจำนวนนับ ที่ทำให้ $\frac{2}{\pi(2)} = 2 \leq n$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่ามี $x > 1$ เป็นจำนวนนับ ที่ทำให้ $\frac{x}{\pi(x)} = n$ □

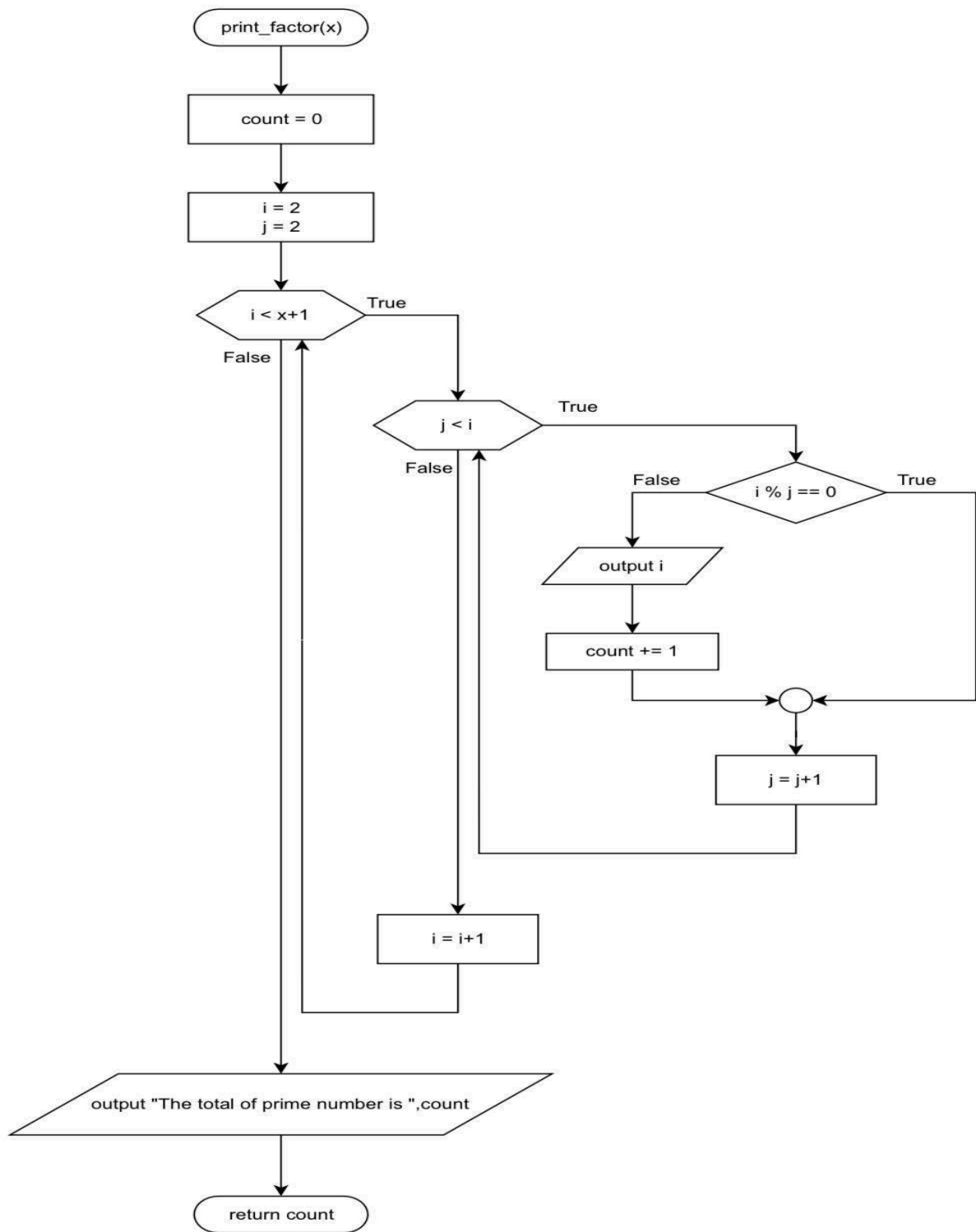
ตัวอย่าง 3.1.7 ตารางต่อไปนี้แสดงค่าของ n และ x บางค่าที่ทำให้ $\frac{x}{\pi(x)} = n$ และจำนวนของ x ทั้งหมดที่

สอดคล้องกับเงื่อนไข ซึ่งได้มาจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์ สำหรับ $2 \leq n \leq 15$

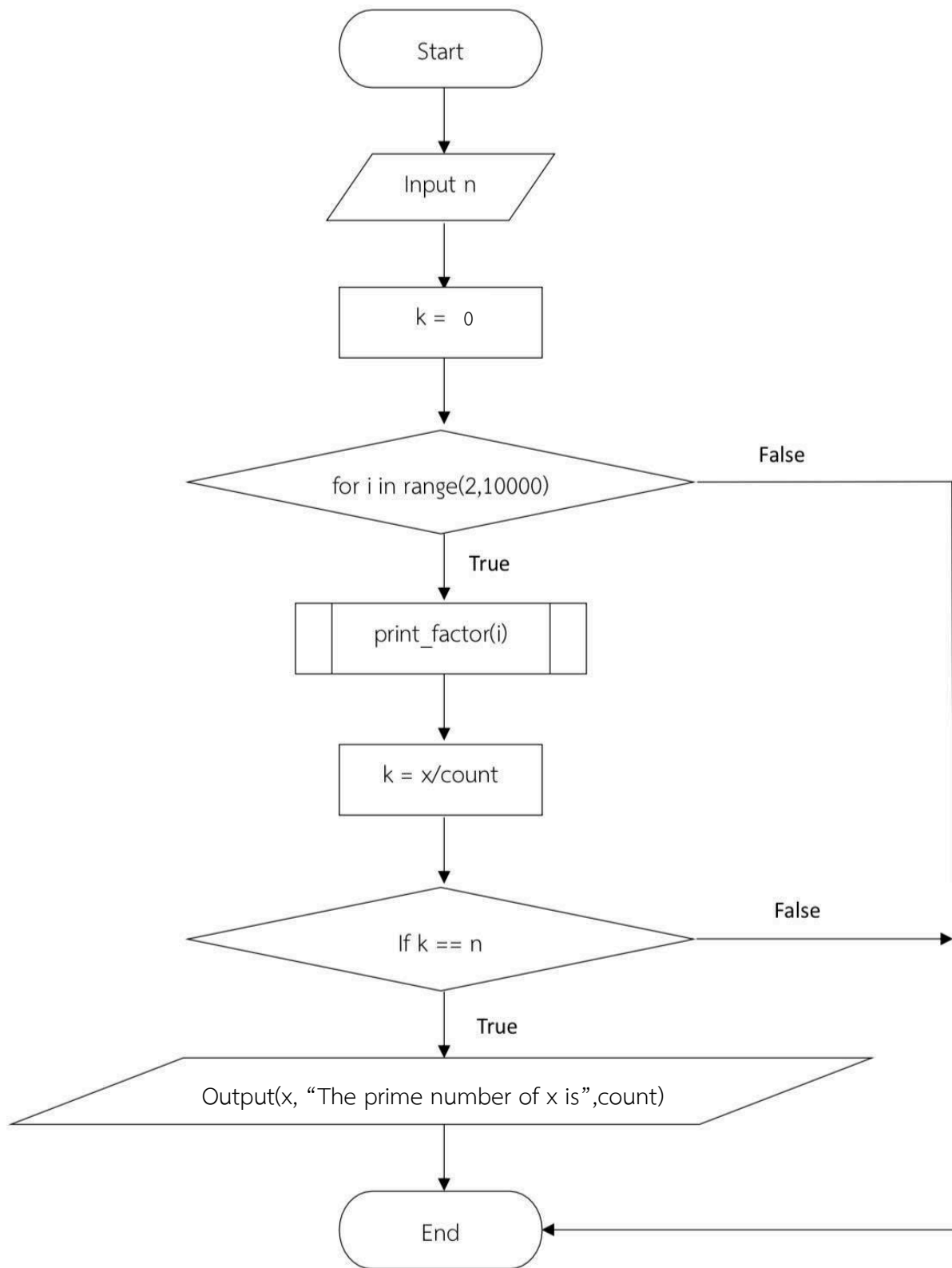
n	x	จำนวนของ x	n	x	จำนวนของ x
2	8	4	9	24300	3
3	33	3	10	64720	9
4	120	3	11	175197	1
5	360	6	12	481452	18
6	1134	7	13	1304719	11
7	3094	6	14	3524654	12
8	8472	6	15	9560100	21

ตารางที่ 3 ตารางแสดงค่าของ n และ x บางค่าที่ทำให้ $\frac{x}{\pi(x)} = n$ และจำนวนของ x ทั้งหมด

เราได้ทำการเขียนโปรแกรมไพทอน เพื่อตรวจสอบข้อมูลตามตารางที่ 3 ดังนี้



ภาพที่ 1 ผังงานแสดงกระบวนการทำงานของฟังก์ชัน `print_factor(x)`



ภาพที่ 2 ผังงานแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบข้อมูลดังตารางที่ 3

จากการตรวจพบว่าข้อมูลในตารางมีการแสดงจำนวนของ n และ x ที่ทำให้ $\frac{x}{\pi(x)} = n$ และแสดงเพียงค่าของ x ที่มากที่สุด เช่น กรณี $n=6$ มี x ทั้งหมด 7 จำนวน ได้แก่ 1008, 1080, 1090, 1116, 1122, 1128, และ 1134 แต่ในตารางแสดงเพียงค่ามากที่สุด คือ $x=1134$

ตัวอย่าง 3.1.8 ตารางต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างบางส่วนจากการเขียนโปรแกรมเพื่อตรวจสอบข้อมูลดังตารางที่ 3

n	x	จำนวนของ x
2	2,4,6,8	4
3	27,30,33	3
4	96,100,120	3
5	330,335,340,350,355,360	6
6	1008,1080,1090,1116,1122,1128,1134	7
7	3059,3066,3073,3080,3087,3094	6

ตารางที่ 4 ตารางแสดงค่าของ n และ x ที่ทำให้ $\frac{x}{\pi(x)} = n$ และจำนวนของ x ทั้งหมด

ในงานค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษาสมบัติของ $\pi(x)$ เพิ่มเติมดังนี้

ประพจน์ 3.1.9 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนของจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $2p$ และมีค่าไม่เกิน n โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะเท่ากับ $\pi\left(\frac{n}{2}\right)$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ A_n แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่อยู่ในรูป $2p$ และมีค่าไม่เกิน n โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ

จะได้ว่า $A_n = \{2p \mid p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ และ } 2p \leq n\}$

ทำให้ได้ว่า $|A_n| = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$

ดังนั้น จำนวนของจำนวนเต็มที่อยู่ในรูป $2p$ ที่มีค่าไม่เกิน n จะเท่ากับจำนวนของจำนวนเฉพาะที่ไม่เกิน

$\frac{n}{2}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\pi\left(\frac{n}{2}\right)$ □

ประพจน์ 3.1.10 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ q เป็นตัวประกอบเฉพาะของ n จำนวนของจำนวนเต็มบวก
ในรูป pq ที่มีค่าไม่เกิน n โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะเท่ากับ $\pi\left(\frac{n}{q}\right)$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ A_n แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่อยู่ในรูป pq และมีค่าไม่เกิน n โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ

จะได้ว่า $A_n = \{pq \mid p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ } q \text{ เป็นตัวประกอบเฉพาะของ } n \text{ และ } pq \leq n\}$

ทำให้ได้ว่า $|A_n| = \pi\left(\frac{n}{q}\right)$

ดังนั้น จำนวนของจำนวนเต็มที่อยู่ในรูป pq ที่มีค่าไม่เกิน n จะเท่ากับจำนวนของจำนวนเฉพาะที่
ไม่เกิน $\frac{n}{q}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\pi\left(\frac{n}{q}\right)$ □

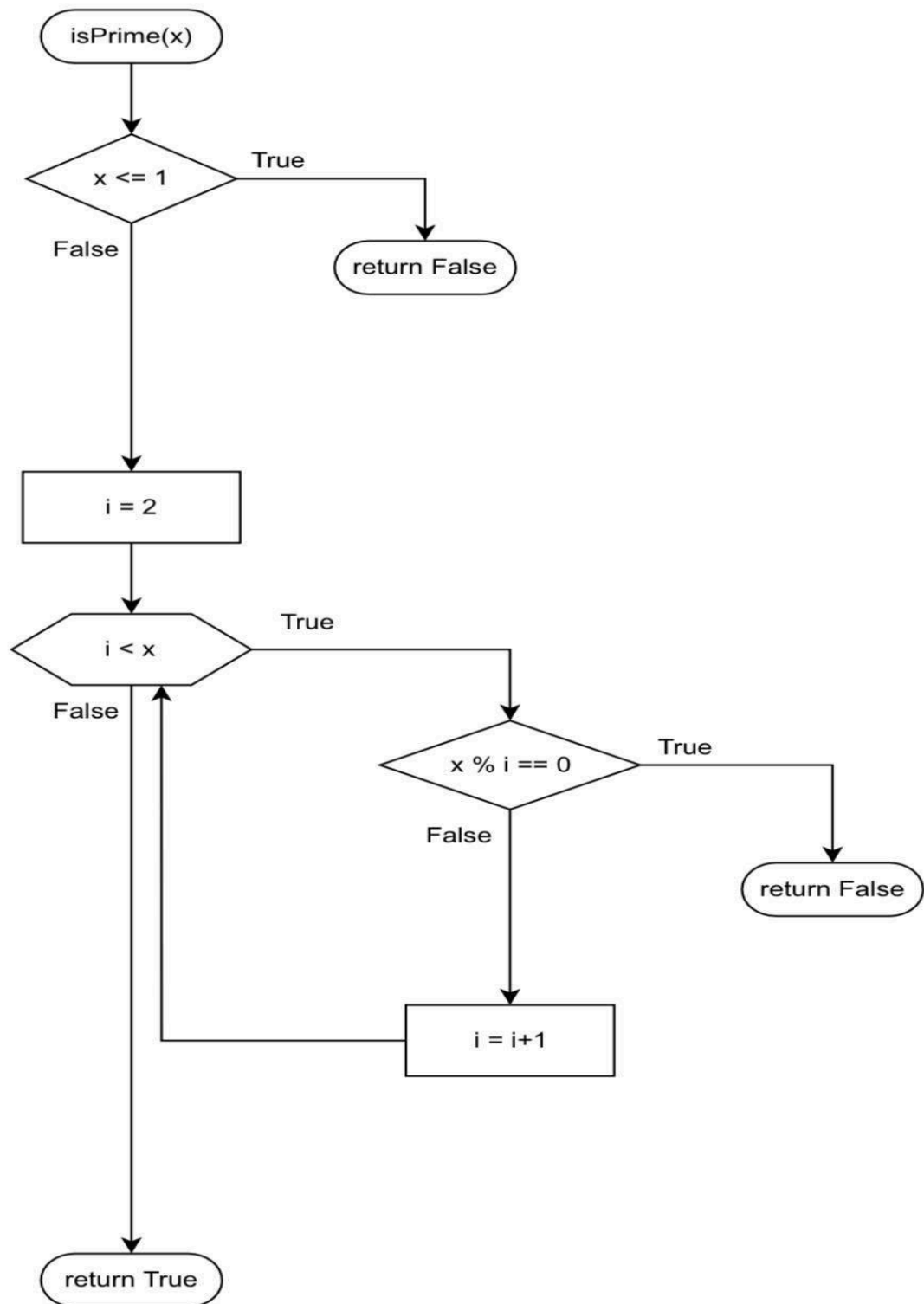
3.2 ข้อคาดการณ์ที่น่าสนใจบางประการของฟังก์ชัน $\pi(x)$ และการตรวจสอบโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

มีข้อคาดการณ์หลายประการที่น่าสนใจเกี่ยวกับฟังก์ชัน $\pi(x)$ ที่ยังไม่สามารถพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้
ในงานค้นคว้าอิสระนี้เราจะแสดงข้อคาดการณ์บางประการที่น่าสนใจ และตรวจสอบข้อคาดการณ์เหล่านั้นโดยใช้
โปรแกรมไพทอน

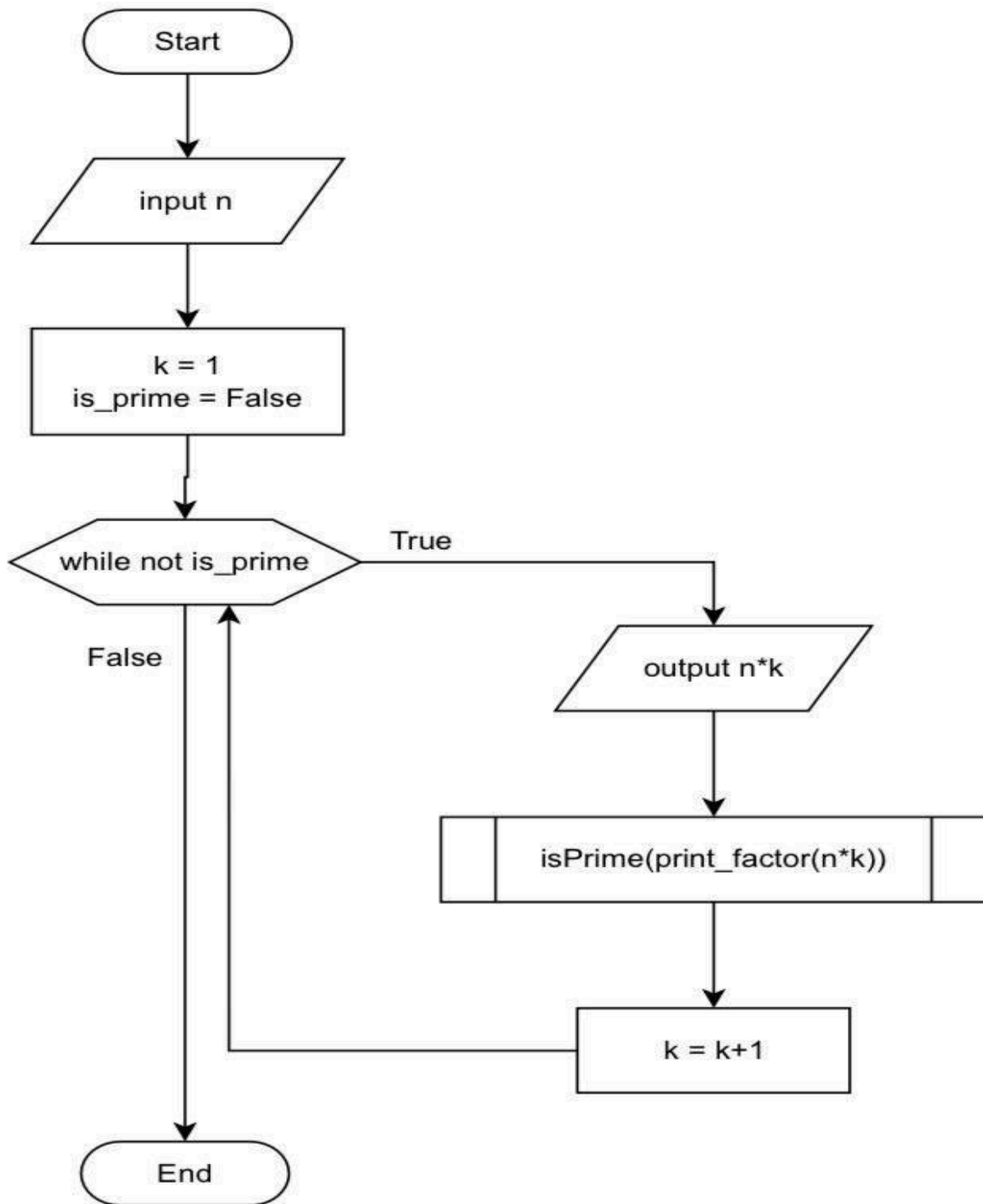
ข้อคาดการณ์ 3.2.1

สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$

เราสามารถเขียนโปรแกรมไพทอนในการตรวจสอบข้อคาดการณ์ ดังผังงานต่อไปนี้



ภาพที่ 3 ผังงานแสดงกระบวนการทำงานของฟังก์ชัน `isPrime(x)`



ภาพที่ 4 ผังงานแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.1

จากการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.1 โดยใช้โปรแกรมไพทอนพบว่า ถ้าเราให้ $n=2$ จะมี $k=2$ ที่ทำให้ $\pi(kn) = 2$ ซึ่ง 2 เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ ถ้าเราให้ $n=20$ จะมี $k=3$ ที่ทำให้ $\pi(kn) = 17$ ซึ่ง 17 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นเราสามารถคาดการณ์ได้ว่า สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$ ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า ข้อคาดการณ์ดังกล่าวเป็นจริง ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างบางส่วนของผลการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.1

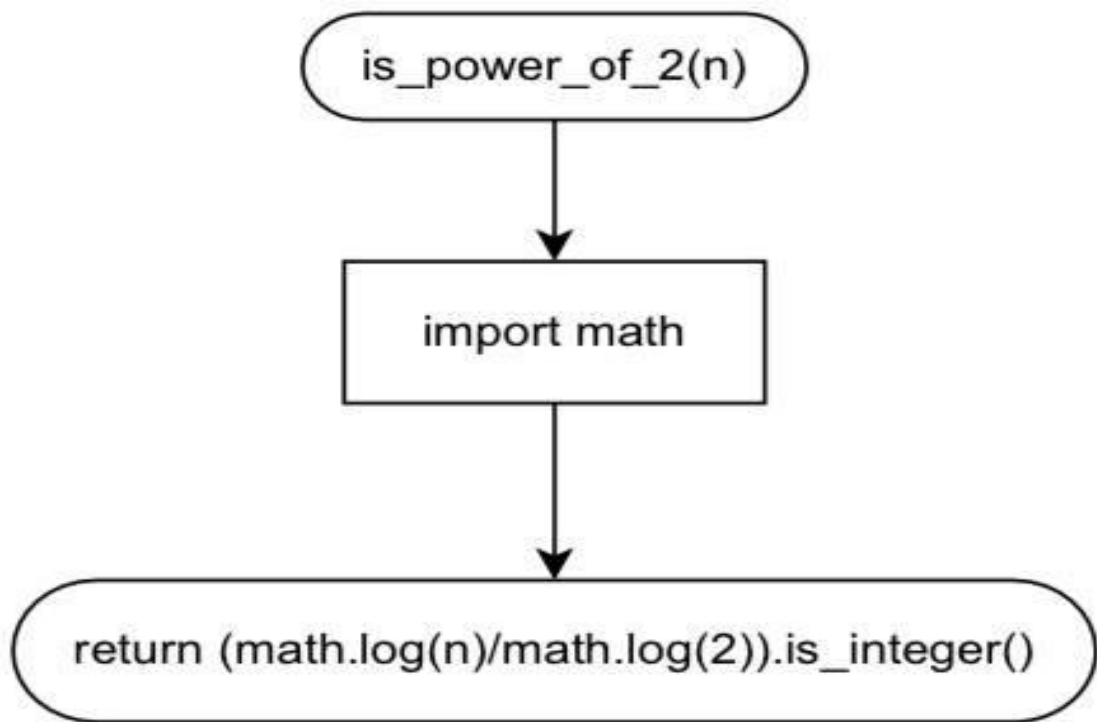
ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก 2 ถึง 39 ตารางต่อไปนี้แสดงค่า k ที่ทำให้ $\pi(kn)$ เป็นจำนวนเฉพาะ

n	k	$\pi(kn)$	n	k	$\pi(kn)$
2	2	2	21	2	13
3	1	2	22	4	23
4	1	2	23	3	19
5	1	3	24	8	43
6	1	3	25	10	53
7	5	11	26	5	31
8	4	11	27	6	37
9	2	7	28	3	23
10	6	17	29	3	23
11	1	5	30	2	17
12	1	5	31	1	11
13	10	31	32	1	11
14	3	13	33	1	11
15	4	17	34	1	11
16	2	11	35	1	11
17	1	7	36	1	11
18	1	7	37	3	29
19	13	53	38	21	139
20	3	17	39	19	131

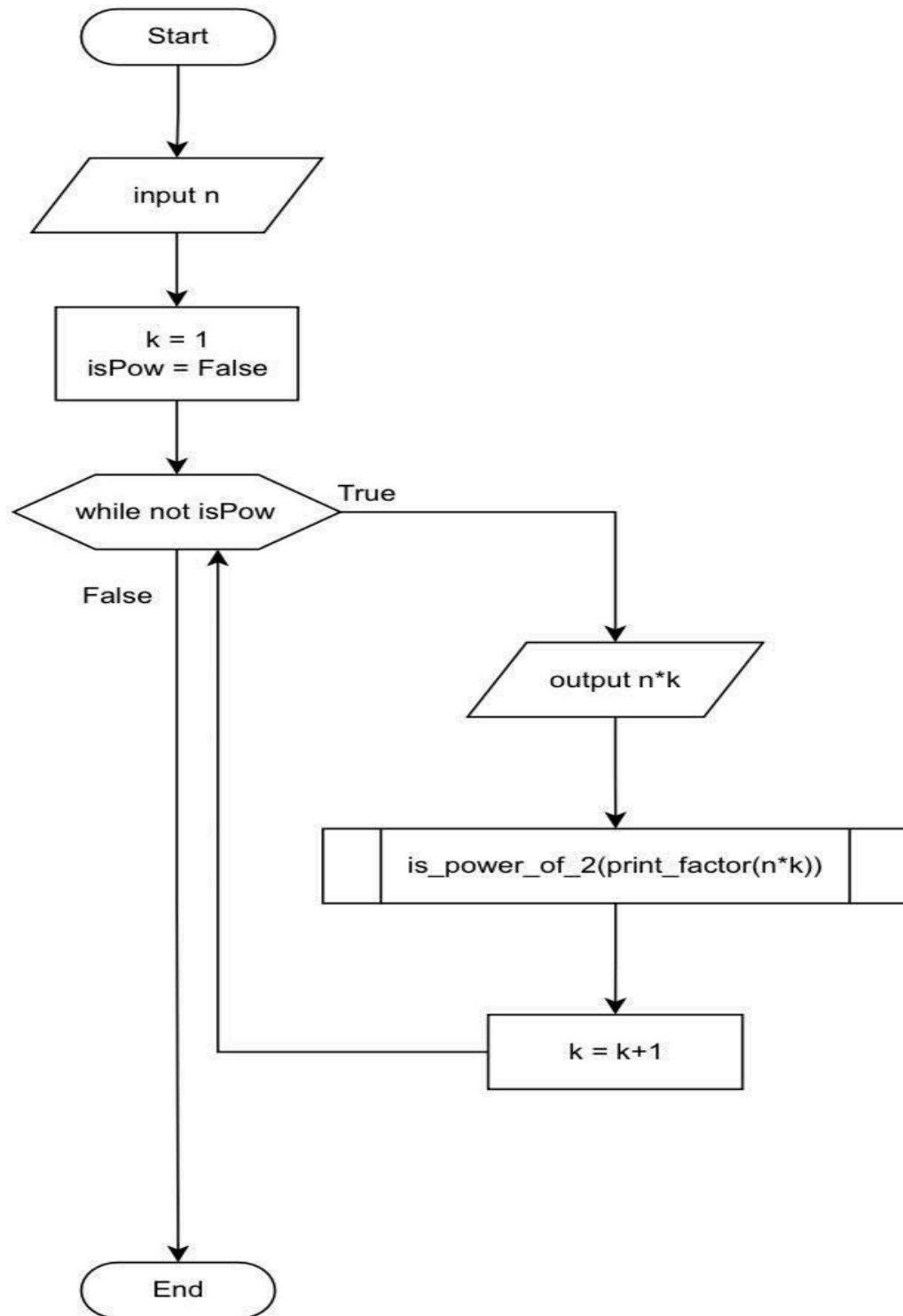
ตารางที่ 5 ตารางแสดงตัวอย่างผลลัพธ์จากการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.1

ข้อคาดการณ์ 3.2.3

สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนกำลังสอง สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$ เราสามารถเขียนโปรแกรมไพทอนในการตรวจสอบข้อคาดการณ์ ดังผังงานต่อไปนี้



ภาพที่ 5 ผังงานแสดงกระบวนการทำงานของฟังก์ชัน `is_power_of_2(n)`



ภาพที่ 6 ผังงานแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.3

จากการตรวจข้อคาดการณ์ 3.2.3 โดยใช้โปรแกรมไพทอนพบว่ามีกรณีที่แตกต่างกัน 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $n \leq k$ เช่น กรณี $n=2$ จะมี $k=1$ ที่ทำให้ $\pi(kn)=1$ ซึ่ง 1 เป็นจำนวนกำลังสอง

กรณี $n=20$ จะมี $k=5$ ที่ทำให้ $\pi(kn)=25$ ซึ่ง 25 เป็นจำนวนกำลังสอง

กรณีที่ 2 $n > k$ เช่น กรณี $n=15$ จะมี $k=28$ ที่ทำให้ $\pi(kn)=81$ ซึ่ง 81 เป็นจำนวนกำลังสอง

กรณี $n=16$ จะมี $k=34$ ที่ทำให้ $\pi(kn)=100$ ซึ่ง 100 เป็นจำนวนกำลังสอง

จากการตรวจสอบพบว่าทั้ง 2 กรณี ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนั้นเราสามารถคาดการณ์ได้ว่า สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนกำลังสอง สำหรับบาง $k=1,2,3,\dots$ ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า ข้อคาดการณ์ดังกล่าวเป็นจริง ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างบางส่วนของผลการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.3

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก 2 ถึง 29 ตารางต่อไปนี้แสดงค่า k ที่ทำให้ $\pi(kn)$ เป็นจำนวนกำลังสอง

n	k	$\pi(kn)$	n	k	$\pi(kn)$
2	1	1	16	34	100
3	3	4	17	9	36
4	2	4	18	3	16
5	2	4	19	3	16
6	4	9	20	5	25
7	1	4	21	20	81
8	1	4	22	7	36
9	1	4	23	1	9
10	1	4	24	1	9
11	5	16	25	1	9
12	2	9	26	1	9
13	2	9	27	1	9
14	2	9	28	1	9
15	28	81	29	2	16

ตารางที่ 5 แสดงตัวอย่างผลลัพธ์จากการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.3

นอกเหนือจากการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.1 และ 3.2.3 แล้วเรายังสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของจำนวนเฉพาะคู่แฝดที่เกิดขึ้นในขั้นตอนต่าง ๆ เช่น กรณี $n=2$ จะมี $k=10$ ที่ทำให้จำนวนเฉพาะคู่แฝดเท่ากับ 4 ซึ่งมีค่าไม่เกิน kn เป็นจำนวนกำลังสอง หรือ กรณี $n=10$ จะมี $k=2$ ที่ทำให้จำนวนเฉพาะคู่แฝดเท่ากับ 4 ซึ่งมีค่าไม่เกิน kn เป็นจำนวนกำลังสอง ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างบางส่วนของความสัมพันธ์ดังกล่าว

ตัวอย่าง 3.2.5 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม 2 ถึง 10 ตารางต่อไปนี้แสดงค่า k ที่ทำให้จำนวนเฉพาะคู่แฝดที่มีค่าไม่เกิน kn

n	k	จำนวนเฉพาะคู่แฝดที่ไม่เกิน kn
2	10	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
3	7	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
4	5	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
5	4	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
6	4	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
7	3	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
8	3	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
9	3	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)
10	2	(3,5) (5,7) (11,13) และ (17,19)

ตารางที่ 6 แสดงตัวอย่างจำนวนเฉพาะคู่แฝดที่มีค่าไม่เกิน kn

จากตัวอย่าง 3.2.5 เราจึงคาดว่าข้อคาดการณ์ต่อไปนี้จะเป็นจริง

ข้อคาดการณ์ 3.2.6

กำหนดให้จำนวนเต็มบวก $n > 1$ ใด ๆ จะมี $k = 1, 2, 3, \dots$ ที่ทำให้จำนวนของจำนวนเฉพาะคู่แฝด ที่มีค่าไม่เกิน kn เป็นจำนวนกำลังสอง

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในงานค้นคว้าอิสระนี้เราได้พิสูจน์สมบัติของฟังก์ชัน $\pi(x)$ เพิ่มเติมดังนี้

(1) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จำนวนของจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $2p$ และมีค่าไม่เกิน n โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะเท่ากับ $\pi\left(\frac{n}{2}\right)$

(2) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ q เป็นตัวประกอบเฉพาะของ n จำนวนของจำนวนเต็มบวกในรูป pq ที่มีค่าไม่เกิน n โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะเท่ากับ $\pi\left(\frac{n}{q}\right)$

นอกจากนี้เรายังได้ใช้โปรแกรมไพทอนตรวจสอบข้อคาดการณ์ต่อไปนี้

(1) สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$

(2) สำหรับจำนวนจริง $n > 1$ ใด ๆ $\pi(kn)$ จะเป็นจำนวนกำลังสอง สำหรับบาง $k = 1, 2, 3, \dots$

ท้ายที่สุดนี้เราได้สังเกตจากตัวอย่างและข้อคาดการณ์เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะคู่แฝด ดังนี้

กำหนดให้จำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะมี $k = 1, 2, 3, \dots$ ที่ทำให้จำนวนของจำนวนเฉพาะคู่แฝดที่มีค่าไม่เกิน kn เป็นจำนวนกำลังสอง

บรรณานุกรม

- [1] D. Burton, *Elementary Number Theory*, 5th ed., McGraw-Hill, 2002.
- [2] S. Golomb, On the ratio of $\pi(N)$ to $\pi(N)$, *Amer. Math. Monthly* 69 (1962) 36-37.
- [3] รองศาสตราจารย์ ดร.ภักดี เจริญสวรรค์, การวิเคราะห์เชิงจริง 1, 2562.
- [4] รองศาสตราจารย์ ดร.ธีระพงษ์ สุขสำราญ, ทฤษฎีจำนวน 1, 2562.
- [5] <https://primes.utm.edu/howmany.html> (วันที่ 25 เดือนพฤศจิกายน พ.ศ.2564)
- [6] <https://math.stackexchange.com/questions/548806/a-finite-set-always-has-a-maximum-and-a-minimum> (เมื่อวันที่ 17 เดือนธันวาคม พ.ศ.2564)
- [7] <https://th.wikipedia.org/wiki/ข้อความคาดการณ์จำนวนเฉพาะคู่แฝด> (เมื่อวันที่ 25 เดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2566)
- [8] <https://www.britannica.com/science/prime-number-theorem> (เมื่อวันที่ 25 เดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2566)
- [9] Robert T. Hager และ William L. Hightower, An Interesting Property of $x / \pi(x)$, *The College Mathematics Journal* (2009) 213-214.
- [10] <https://math.stackexchange.com/questions/765627/asymptotic-behavior-of-pi-x-fracx-log-x> (เมื่อวันที่ 25 เดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ.2566)

ภาคผนวก

```
1  def print_factors(x):
2      print("The factors of", x, "are:")
3      count = 0
4      for i in range(1, x + 1):
5          if i == 1:
6              print(i, "is not a prime number")
7          elif x % i == 0:
8              for j in range(2,i):
9                  if i % j == 0:
10                     print(i, "is not a prime number")
11                     break
12             else:
13                 print(i, "is a prime number")
14                 count += 1
15
16     print("The total of prime number is ", count, "\n")
17
18     for i in range(88, 90):
19         print_factors(i)
```

ภาพที่ 7 โปรแกรมแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบตัวประกอบเฉพาะ

```

1  n = int(input("Enter your n:"))
2  k = int(input("Enter your k:"))
3  def print_factor(x):
4      count = 0
5      for i in range(2, x+1):
6          for j in range(2, i):
7              if i % j == 0:
8                  break
9              else:
10                 print(i)
11                 count += 1
12     print("The total of prime number is ", count, "\n")
13
14  for i in range(1, k+1):
15     print("pi("n="n"*"k="i") =pi("n*i") is :")
16     print_factor(n*i)

```

ภาพที่ 8 โปรแกรมแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบ $\pi(kn)$

```

1      n = int(input("Enter your n:"))
2      k = 0
3
4      def print_factor(x):
5          count = 0
6          for i in range(2, x + 1):
7              for j in range(2, i):
8                  if i % j == 0:
9                      break
10                 else:
11
12                     count += 1
13
14             k = x / count
15             if k == n:
16                 print("\n", x, "The prime number of x is ", count, "\n")
17
18         return count
19
20     for i in range(2, 10000):
21         print_factor(i)

```

ภาพที่ 9 โปรแกรมแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบข้อมูลดังตารางที่ 3

```

1  n = int(input("Enter your n:"))
2  k = 1
3  def print_factor(x):
4      count = 0
5      for i in range(2, x+1):
6          for j in range(2, i):
7              if i % j == 0:
8                  break
9              else:
10                 print(i)
11                 count += 1
12         print("The total of prime number is ", count, "\n")
13     return count
14  def isPrime(x):
15      if x <= 1:
16          return False
17      for i in range(2, x):
18          if x % i == 0:
19              return False
20      return True
21  is_prime = False
22  while not is_prime:
23      print(n*k)
24      is_prime = isPrime(print_factor(n*k))
25      k += 1

```

ภาพที่ 10 โปรแกรมแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.1

```

1  import math
2
3  n = int(input("Enter your n:"))
4  k = 1
5  def print_factor(x):
6      count = 0
7      for i in range(2, x+1):
8          for j in range(2, i):
9              if i % j == 0:
10                 break
11             else:
12                 print(i)
13                 count += 1
14         print("The total of prime number is ", count, "\n")
15     return count
16
17 def is_power_of_2(n):
18     return (math.log(n)/math.log(2)).is_integer()
19
20 isPow = False
21
22 while not isPow:
23     print(n*k)
24     isPow = is_power_of_2(print_factor(n*k))
25     k += 1

```

ภาพที่ 11 โปรแกรมแสดงกระบวนการทำงานการตรวจสอบข้อคาดการณ์ 3.2.3