ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและตัวคูณของพีชคณิต PSRU
(Homomorphisms and multipliers of PSRU-algebras)

นางสาวกฤษณา นะเมธา
รหัส 620510480

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2565

ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและตัวคูณของพีชคณิต PSRU
(Homomorphisms and multipliers of PSRU-algebras)

กฤษณา นะเมธา

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

ปรียานุช โหนแหยม .... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปรียานุช โหนแหยม)

เป็นหญิง โรจนกุล .... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เป็นหญิง โรจนกุล)

วันที่ 21 เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2565

ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและตัวคูณของพีชคณิต PSRU
(Homomorphisms and multipliers of PSRU-algebras)

นางสาวกฤษณา นะเมธา
รหัส 620510480

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษากระบวนวิชา 206499 (Independent Study) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาสาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้ศึกษาค้นคว้าอิสระในหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่องฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปรียานุช โหนแหยม ประธานกรรมการสอบในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระนี้ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ต่าง ๆ เกี่ยวกับการทำงานค้นคว้าอิสระ ติดตามความก้าวหน้าในการดำเนินการ รวมถึงการนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องของการค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เป็นหญิง โรจนกุล อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำ รวมถึงตรวจสอบความถูกต้อง ในการค้นคว้าอิสระนี้ให้มีความสำเร็จให้ดียิ่งขึ้น

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้ความกรุณาอบรมสั่งสอนและมอบความรู้ทั้งใน และนอกตำราให้แก่ข้าพเจ้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้

และสุดท้ายนี้หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชม หรือเกิดประโยชน์ประการใด ข้าพเจ้าขอมอบคำชื่นชมและความคุณดีนั้นให้แก่ บิดา มารดา อาจารย์ที่ปรึกษา คณจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนข้าพเจ้า หากมีข้อผิดพลาดประการใดที่อาจเกิดขึ้น ข้าพเจ้าขอน้อมรับแต่เพียงผู้เดียวและยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา และต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้

กฤษณา นะเมธา

หัวข้อ (ภาษาไทย) ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและตัวคูณของพีชคณิต PSRU

(ภาษาอังกฤษ) Homomorphisms and multipliers of PSRU-algebras

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวกฤษณา นะเมธา **รหัสนักศึกษา** 620510480

ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปรียานุช โหนแหยม

ชื่อกรรมการสอบ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เป็นหญิง โรจนกุล

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษานิยามและสมบัติบางประการของพีชคณิต $PSRU$ โดยเราได้พิจารณาสมบัติของพีชคณิตย่อย ตัวกรอง พีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว พีชคณิต $PSRU$ ที่มีเอกลักษณ์ซ้าย นอกจากนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดของตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานในพีชคณิต $PSRU$ และศึกษาสมบัติบางประการของตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานในพีชคณิต $PSRU$ และเราได้ศึกษานิยามและสมบัติบางประการของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$

Abstract

In this independent study, we study definitions and some properties of $PSRU$-algebras. We consider properties of subalgebras, filters, self distributive $PSRU$-algebras and left identity $PSRU$-algebras. Moreover, we study the concept of multipliers and homomorphisms on $PSRU$-algebras and some properties of multipliers and homomorphisms of $PSRU$-algebras. We also study definitions and some properties of the kernel and the set of fixed points of multipliers of $PSRU$-algebras.

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

แนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิต BE ได้ริเริ่มคิดโดย Kim และ Kim [2] ในปี 2006 โดยที่เป็นการวางนัยทั่วไปของพีชคณิต BCK และสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้ $x * x = 1, x * 1 = 1, 1 * x = x, x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ พีชคณิต BE เริ่มมีการศึกษากันอย่างกว้างขวางโดยในปี 2008 Ahn และ So [1] ได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับไอดีลในพีชคณิต BE ในปี 2011 Kim [3] ได้ศึกษาเกี่ยวกับตัวคูณในพีชคณิต BE และต่อมาในปี 2012 Rezaei และ Saeid [4] ได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชันสาทิสสัณฐานในพีชคณิต BE

ในปี 2018 Yiarayong และ Wachirawongsakorn [5] ได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับการวางนัยทั่วไปของพีชคณิต BE ซึ่งมีชื่อว่า พีชคณิต $PSRU$ โดยมีนิยามดังนี้ $x * 1 = 1$ และ $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ โดยศึกษาเกี่ยวกับตัวกรอง ไอดีลและตัวกรอง fuzzy ในพีชคณิต $PSRU$

การศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของพีชคณิต $PSRU$ โดยเริ่มต้นจากการศึกษานิยามของพีชคณิต $PSRU$ พร้อมยกตัวอย่างที่เป็นทั้งเซตจำกัดและเซตอนันต์ เราได้ศึกษาสมบัติบางประการของตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$ ได้แก่ สมบัติของพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว พีชคณิต $PSRU$ ที่มีเอกลักษณ์ซ้าย พีชคณิตย่อยและตัวกรองของพีชคณิต $PSRU$ นอกจากนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดของตัวคูณและ
ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานในพีชคณิต $PSRU$ พร้อมทั้งศึกษาสมบัติบางประการของตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานในพีชคณิต $PSRU$ และได้ศึกษาเกี่ยวกับเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน ความสัมพันธ์และสมบัติต่าง ๆ ฟังก์ชันการดำเนินการทวิภาค และพีชคณิต BE

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาเกี่ยวกับนิยามของพีชคณิต $PSRU$ พร้อมยกตัวอย่างพีชคณิต $PSRU$ ทั้งที่เป็นเซตอนันต์และเซตจำกัด และได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิต $PSRU$ ได้แก่ พีชคณิตย่อย การแจกแจงในตัว เอกลักษณ์ซ้าย ตัวกรอง ตัวคูณ และฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน โดยเราแบ่งผลศึกษาเป็น 4 หัวข้อดังต่อไปนี้

- บทนิยามและตัวอย่างของพีชคณิต $PSRU$
- การแจกแจงในตัวและตัวกรองในพีชคณิต $PSRU$
- ตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานในพีชคณิต $PSRU$
- เคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

2.1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relations and functions)

<u>**บทนิยาม 2.1**</u> ให้ A และ B เป็นเซต **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ กำหนดโดย

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

โดยที่ (a, b) แทนคู่อันดับ

<u>**ตัวอย่าง 2.2**</u> ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{1, 2\}$ จะได้ว่า

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

<u>หมายเหตุ:</u> ถ้า A หรือ B เป็นเซตว่าง แล้ว $A \times B$ เป็นเซตว่าง

<u>**บทนิยาม 2.3**</u> ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จะกล่าวว่า r **เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B (relation from A to B)** ก็ต่อเมื่อ $r \subseteq A \times B$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้วสามารถเขียนแทน $(a, b) \in r$ ด้วย $a\ r\ b$
จะเรียกความสัมพันธ์จาก A ไป A ว่า **ความสัมพันธ์บน A (relation on A)**

<u>**ตัวอย่าง 2.4**</u> ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{1, 2\}$

ให้ $r = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และได้ว่า $a\ r\ 1, b\ r\ 1$ และ $c\ r\ 1$

<u>บทนิยาม 2.5</u> ให้ A และ B เป็นเซต และ $r \subseteq A \times B$

1) **โดเมน (domain)** ของ r เขียนแทนด้วย D_r นิยามโดย $D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$

2) **เรนจ์ (range)** ของ r เขียนแทนด้วย R_r นิยามโดย $R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$

จะได้ว่า $D_r \subseteq A$ และ $R_r \subseteq B$

<u>ตัวอย่าง 2.6</u> ให้ $A = \{-1, -2, -3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ และ $r = \{(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3)\}$

จะได้ว่า $D_r = \{-1, -2, -3\}$ และ $R_r = \{1, 2, 3\}$

<u>บทนิยาม 2.7</u> ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

1) r **มีสมบัติสะท้อน (reflexive)** ถ้า $x\ r\ x$

2) r **มีสมบัติสมมาตร (symmetric)** ถ้า $x\ r\ y$ แล้ว $y\ r\ x$

3) r **มีสมบัติถ่ายทอด (transtive)** ถ้า $x\ r\ y$ และ $y\ r\ z$ แล้ว $x\ r\ z$

4) r **มีสมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric)** ถ้า $x\ r\ y$ และ $y\ r\ x$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in A$

<u>บทนิยาม 2.8</u> ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียก r ว่าเป็น**ความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation)** บน A ถ้า r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

<u>บทนิยาม 2.9</u> ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียก r ว่าเป็น**เซตอันดับบางส่วน (partially ordered set)** บน A ถ้า r มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด

<u>บทนิยาม 2.10</u> ให้ A, B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จะได้ว่า

1) f เป็น**ฟังก์ชัน (function)** ถ้า $(a, b) \in f$ และ $(a, c) \in f$ แล้ว $b = c$ สำหรับทุก $a \in A$ และ $b, c \in B$

2) f เป็น**ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A to B)** เขียนแทนด้วย $f : A \to B$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน และสำหรับทุก $a \in A$ จะมี $b \in B$ ซึ่ง $(a, b) \in f$ นั่นคือ $D_f = A$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วจะเขียนแทน $(x, y) \in f$ ด้วย $y = f(x)$

<u>บทนิยาม 2.11</u> ให้ A, B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะได้ว่า

1) f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B (one-to-one function from A to B)** (เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$) ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in A$

2) f เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไป B (function from A onto B)** (เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{onto} B$) ถ้าสำหรับทุก $y = B$ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $f(x) = y$ นั่นคือ $R_f = B$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแและทั่วถึงจาก A ไป B แล้วจะเขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$

<u>บทนิยาม 2.12</u> ให้ X_1, X_2, X_3 เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ $f_1 : X_1 \to X_2$ และ $f_2 : X_2 \to X_3$ จะนิยาม $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ โดย

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$$

สำหรับทุก $x \in X_1$ เรียก $f_2 \circ f_1$ ว่า**ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ของ f_1 และ f_2

<u>บทนิยาม 2.13</u> ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง นิยาม $f : X \to X$ กำหนดโดย $f(a) = a$ สำหรับทุก $a \in X$ จะเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)** บน X เขียนแทนด้วย id_X

<u>บทนิยาม 2.14</u> ให้ X และ Y เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง นิยาม $f : X \to Y$ กำหนดโดย $f(x) = k$ สำหรับทุก $x \in X$ โดยที่ $k \in Y$ นั่นคือ $R_f = \{k\}$ จะเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันค่าคงตัว (constant function)** เขียนแทนด้วย X_k

2.2 การดำเนินการทวิภาค (Binary operations)

<u>บทนิยาม 2.15</u> ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง **การดำเนินการทวิภาค (binary operation)** $*$ บนเซต A คือฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไป A นั่นคือ $* : A \times A \to A$

สำหรับ $a, b \in A$ จะเขียนแทน $*(a, b)$ ด้วย $a * b$ นั่นคือ สำหรับทุกสมาชิก $a, b \in A$ จะต้องหาค่า $a * b$ ได้เสมอและมีเพียงค่าเดียวที่เป็นสมาชิกใน A

<u>บทนิยาม 2.16</u> ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ $\emptyset \neq B \subseteq A$ โดยที่ $* : A \times A \to A$ ถ้า $a * b \in B$ ทุก $a, b \in B$ แล้วจะเรียกว่า B มี **สมบัติปิด (closure property)** ภายใต้ $*$ ในกรณีที่ B มีสมบัติปิดภายใต้ $*$ เราจะได้ว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน B และเรียก $*$ ว่าเป็น **การดำเนินการที่ถูกเหนี่ยวนำ (induced operation)** ของ $*$ บน B

2.3 พีชคณิต BE (BE-algebras)

<u>บทนิยาม 2.17</u> ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างโดยที่ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และ $1 \in X$ จะเรียก $(X;*,1)$ ว่าเป็น **พีชคณิต** BE (BE-algebra) ถ้า

(BE1) $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

(BE2) $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

(BE3) $1 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(BE4) $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ **(สมบัติการแลกเปลี่ยน (exchange))**

<u>บทนิยาม 2.18</u> ให้ X เป็นพีชคณิต BE และ S เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่าเป็น **พีชคณิตย่อย** (**subalgebra**) ของ X ถ้า

$$x * y \in S$$

สำหรับทุก $x, y \in S$

<u>บทตั้ง 2.19</u> ให้ X เป็นพีชคณิต BE และ S เป็นพีชคณิตย่อยของ X จะได้ว่า $1 \in S$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต BE และ S เป็นพีชคณิตย่อยของ X

ได้ว่า $S \neq \emptyset$ ดังนั้นจะมี $x \in S$

จาก (BE1) ได้ว่า $x * x = 1$

เนื่องจาก S มีสมบัติปิด ดังนั้นได้ว่า $1 = x * x \in S$ $\square$

ตัวอย่าง 2.20 ให้ $X=\{1,a,b,c\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

*	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
c	1	1	a	1

จะแสดงว่า X เป็นพีชคณิต BE

1. จากตารางได้ว่า $1*1=1, a*a=1, b*b=1, c*c=1$

นั่นคือ $x*x=1$ สำหรับทุก $x\in X$

ดังนั้น (BE1) เป็นจริง

2. จากตารางได้ว่า $1*1=1, a*1=1, b*1=1, c*1=1$

นั่นคือ $x*1=1$ สำหรับทุก $x\in X$

ดังนั้น (BE2) เป็นจริง

3. จากตารางได้ว่า $1*1=1, 1*a=a, 1*b=b, 1*c=c$

นั่นคือ $1*x=x$ สำหรับทุก $x\in X$

ดังนั้น (BE3) เป็นจริง

4. จะพิสูจน์ (BE4) เป็นจริง นั่นคือจะพิสูจน์ ว่า $x*(y*z)=y*(x*z)$ สำหรับทุก $x,y,z\in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด 4 x 4 x 4 = 64 กรณีย่อย สามารถพิจารณาได้ 4 กรณีใหญ่ ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1:</u> $z=1$ จะได้ว่า

$$x*(y*z)=x*(y*1)=x*1=1=y*1=y*(x*1)=y*(x*z)$$

ซึ่งได้ทั้งหมด 16 กรณีย่อย

<u>กรณี 2:</u> $z=a$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 16 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 2.1:</u> $x = b$ และ $y = c$ จะแสดงว่า $b * (c * a) = c * (b * a)$

จากตารางได้ว่า $b * (c * a) = b * 1 = 1 = c * 1 = c * (b * a)$

ดังนั้น $b * (c * a) = c * (b * a)$

<u>กรณี 2.2:</u> $x = c$ และ $y = 1$ จะแสดงว่า $c * (1 * a) = 1 * (c * a)$

จากตารางได้ว่า $c * (1 * a) = c * a = 1 = 1 * 1 = 1 * (c * a)$

ดังนั้น $c * (1 * a) = 1 * (c * a)$

<u>กรณี 2.3:</u> $x = c$ และ $y = b$ จะแสดงว่า $c * (b * a) = b * (c * a)$

จากตารางได้ว่า $c * (b * a) = c * 1 = 1 = b * 1 = b * (c * a)$

ดังนั้น $c * (b * a) = b * (c * a)$

<u>กรณี 3:</u> $z = b$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 16 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 3.1:</u> $x = 1$ และ $y = a$ จะแสดงว่า $1 * (a * b) = a * (1 * b)$

จากตารางได้ว่า $1 * (a * b) = 1 * a = a = a * b = a * (1 * b)$

ดังนั้น $1 * (a * b) = a * (1 * b)$

<u>กรณี 3.2:</u> $x = a$ และ $y = c$ จะแสดงว่า $a * (c * b) = c * (a * b)$

จากตารางได้ว่า $a * (c * b) = a * a = 1 = c * a = c * (a * b)$

ดังนั้น $a * (c * b) = c * (a * b)$

<u>กรณี 3.3:</u> $x = a$ และ $y = c$ จะแสดงว่า $a * (c * b) = c * (a * b)$

จากตารางได้ว่า $a * (c * b) = a * a = 1 = c * a = c * (a * b)$

ดังนั้น $a * (c * b) = c * (a * b)$

<u>กรณี 4:</u> $z = c$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 16 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 4.1:</u> $x = 1$ และ $y = a$ จะแสดงว่า $1 * (a * c) = a * (1 * c)$

จากตารางได้ว่า $1 * (a * c) = 1 * a = a = a * c = a * (1 * c)$

ดังนั้น $1 * (a * c) = a * (1 * c)$

<u>กรณี 4.2:</u> $x = a$ และ $y = b$ จะแสดงว่า $a * (b * c) = b * (a * c)$

จากตารางได้ว่า $a * (b * c) = a * a = 1 = b * a = b * (a * c)$

ดังนั้น $a * (b * c) = b * (a * c)$

กรณี 4.3: $x = b$ และ $y = 1$ จะแสดงว่า $b * (1 * c) = 1 * (b * c)$

จากตารางได้ว่า $b * (1 * c) = b * c = a = 1 * a = 1 * (b * c)$

ดังนั้น $b * (1 * c) = 1 * (b * c)$

ดังนั้นได้ว่า X เป็นพีชคณิต BE

ให้ $S_1 = \{1, a\}$ และ $S_2 = \{a, b\}$

พิจารณา $S_1 = \{1, a\}$ จากตารางได้ว่า

$$1 * 1 = 1 \in S_1, 1 * a = a \in S_1, a * 1 = 1 \in S_1, a * a = 1 \in S_1$$

จะได้ว่า S_1 เป็นพีชคณิตย่อยของ X เนื่องจาก $x * y \in S_1$ สำหรับทุก $x, y \in S_1$

พิจารณา $S_2 = \{a, b\}$ จากตารางได้ว่า

$$a * a = 1 \notin S_2$$

ดังนั้น S_2 ไม่เป็นพีชคณิตย่อยของ X

บทนิยาม 2.21 ให้ X เป็นพีชคณิต BE และให้ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่ใช่เซตว่างจะเรียก F ว่าเป็น **ตัวกรอง (filter)** ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(F1) $1 \in F$

(F2) ถ้า $x * y \in F$ และ $x \in F$ แล้ว $y \in F$ สำหรับทุก $x, y \in X$

(นั่นคือ ถ้า $y \notin F$ แล้ว $x \notin F$ หรือ $x * y \notin F$)

บทนิยาม 2.22 ให้ X เป็นพีชคณิต BE และ $f : X \to X$ จะเรียก f ว่าเป็น **ตัวคูณ (multiplier)** ของ X ถ้า

$$f(x * y) = x * f(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

บทตั้ง 2.23 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต BE ถ้า f เป็นตัวคูณของ X แล้ว $f(1) = 1$

บทนิยาม 2.24 ให้ X เป็นพีชคณิต BE และ f เป็นตัวคูณของ X นิยาม **เคอร์เนล (kernel)** ดังนี้

$$Ker(f) := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

บทตั้ง 2.25 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต BE ถ้า f เป็นตัวคูณของ X แล้ว $Ker(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

บทนิยาม 2.26 ให้ X เป็นพีชคณิต BE และ $f : X \to X$ จะเรียก f ว่าเป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** ถ้า

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 2.27 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต BE ถ้า f เป็นตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X แล้ว $Ker(f)$ เป็นตัวกรองของ X

บทนิยาม 2.28 ให้ X เป็นพีชคณิต BE และ f เป็นตัวคูณของ X นิยาม

$$F_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

จะเรียก F_f ว่าเป็น**เซตของจุดตรึง (set of fixed points)** ของ f

บทตั้ง 2.29 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต BE ถ้า f เป็นตัวคูณของ X แล้ว F_f เป็นพีชคณิตย่อยของ X

บทที่ 3

พีชคณิต $PSRU$ ($PSRU$-algebras)

3.1 บทนิยามและตัวอย่างของพีชคณิต $PSRU$

<u>บทนิยาม 3.1</u> ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างโดยที่ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ $1 \in X$ จะเรียกว่า $(X;*,1)$ ว่าเป็น **พีชคณิต** $PSRU$ ($PSRU$-algebra) ถ้า

(PSRU1) $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

(PSRU2) $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ต่อไปนี้จะให้ X แทนพีชคณิต $PSRU$ (X;$*$,1)

<u>บทตั้ง 3.2</u> ทุกพีชคณิต BE เป็นพีชคณิต $PSRU$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต BE จะได้ว่า (BE1) - (BE4) เป็นจริง
จาก (BE2) ได้ว่า $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ นั่นคือ (PSRU1) เป็นจริง
และจาก (BE4) ได้ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ นั่นคือ (PSRU2) เป็นจริง
ดังนั้น X เป็นพีชคณิต $PSRU$ $\square$

บทกลับของบทตั้ง 3.2 ไม่จริง โดยทั่วไปพีชคณิต $PSRU$ ไม่จำเป็นต้องเป็นพีชคณิต BE ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $X = \{1, b, c, d, e\}$ และกำหนดการดำเนินการ $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	b	c	d	e
1	1	1	1	1	1
b	1	b	b	b	b
c	1	b	d	e	c
d	1	b	c	d	e
e	1	b	e	c	d

จะแสดงว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

1. จากตารางได้ว่า $1 * 1 = 1, b * 1 = 1, c * 1 = 1, d * 1 = 1, e * 1 = 1$

นั่นคือ $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (PSRU1) เป็นจริง

2. จะพิสูจน์ (PSRU2) เป็นจริง

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

สามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด 5 x 5 x 5 = 125 กรณีย่อย สามารถพิจารณาได้ 5 กรณีใหญ่ ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1:</u> $x = 1$ จะได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (y * 1) = x * 1 = 1 = y * 1 = y * (x * 1) = y * (x * z)$$

ซึ่งได้ทั้งหมด 25 กรณีย่อย

<u>กรณี 2:</u> $x = b$ จะได้ว่า

$$x * (y * z) = b * (y * z) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } y = 1 \text{ หรือ } z = 1 \\ b & \text{ถ้า } y \neq 1 \text{ และ } z \neq 1 \end{cases}$$

$$y * (x * z) = y * (b * z) = \begin{cases} y * 1 = 1 & \text{ถ้า } y = 1 \text{ หรือ } z = 1 \\ y * b = b & \text{ถ้า } y \neq 1 \text{ และ } z \neq 1 \end{cases}$$

ดังนั้น $x * (y * z) = y * (x * z)$

จะได้ทั้งหมด 25 กรณีย่อย

<u>กรณี 3:</u> $x = c$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 25 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 3.1:</u> $y = 1$ และ $z = b$ จะแสดงว่า $c * (1 * b) = 1 * (c * b)$

จากตารางได้ว่า $c * (1 * b) = c * 1 = 1 = 1 * b = 1 * (c * b)$

ดังนั้น $c * (1 * b) = 1 * (c * b)$

<u>กรณี 3.2:</u> $y = b$ และ $z = d$ จะแสดงว่า $c * (b * d) = b * (c * d)$

จากตารางได้ว่า $c * (b * d) = c * b = b = b * e = b * (c * d)$

ดังนั้น $c * (b * d) = b * (c * d)$

<u>กรณี 3.3:</u> $y = d$ และ $z = e$ จะแสดงว่า $c * (d * e) = d * (c * e)$

จากตารางได้ว่า $c * (d * e) = c * e = c = d * c = d * (c * e)$

ดังนั้น $c * (d * e) = d * (c * e)$

<u>กรณี 4:</u> $x = d$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 25 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 4.1:</u> $y = c$ และ $z = e$ จะแสดงว่า $d * (c * e) = c * (d * e)$

จากตารางได้ว่า $d * (c * e) = d * c = c = c * e = c * (d * e)$

ดังนั้น $d * (c * e) = c * (d * e)$

<u>กรณี 4.2:</u> $y = 1$ และ $z = c$ จะแสดงว่า $d * (1 * c) = 1 * (d * c)$

จากตารางได้ว่า $d * (1 * c) = d * 1 = 1 = 1 * c = 1 * (d * c)$

ดังนั้น $d * (1 * c) = 1 * (d * c)$

<u>กรณี 4.3:</u> $y = e$ และ $z = b$ จะแสดงว่า $d * (e * b) = e * (d * b)$

จากตารางได้ว่า $d * (e * b) = d * b = b = e * b = e * (d * b)$

ดังนั้น $d * (e * b) = e * (d * b)$

<u>กรณี 5:</u> $x = e$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 25 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 5.1:</u> $y = c$ และ $z = b$ จะแสดงว่า $e * (c * b) = c * (e * b)$

จากตารางได้ว่า $e * (c * b) = e * b = b = c * b = c * (e * b)$

ดังนั้น $e * (c * b) = c * (e * b)$

<u>กรณี 5.2:</u> $y = d$ และ $z = c$ จะแสดงว่า $e * (d * c) = d * (e * c)$

จากตารางได้ว่า $e * (d * c) = e * c = e = d * e = d * (e * c)$

ดังนั้น $e * (d * c) = d * (e * c)$

<u>กรณี 5.3:</u> $y = 1$ และ $z = e$ จะแสดงว่า $e * (1 * e) = 1 * (e * e)$

จากตารางได้ว่า $e * (1 * e) = e * 1 = 1 = 1 * d = 1 * (e * e)$

ดังนั้น $e * (1 * e) = 1 * (e * e)$

ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

จากตารางจะเห็นว่า $c * c = d \neq 1$

นั่นคือ (BE1) ไม่เป็นจริง

ดังนั้น X ไม่เป็นพีชคณิต BE

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> ให้ $X = \mathbb{R}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังนี้

$$x * y = \begin{cases} \dfrac{y}{x} & ; x, y \notin \{0\} \\ 0 & ;\text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

จะแสดงว่า (X; $*$, 0) เป็นพีชคณิต $PSRU$

ให้ $x, y, z \in X$

ได้ว่า $x * 0 = 0$

ดังนั้น (PSRU1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า (PSRU2) เป็นจริง โดยพิจารณาเป็น 2 กรณีใหญ่ ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1:</u> $x, y, z \notin \{0\}$ ได้ว่า

$$x * (y * z) = x * \frac{z}{y} = \frac{\frac{z}{y}}{x} = \frac{z}{xy}$$

และ

$$y * (x * z) = y * \frac{z}{x} = \frac{\frac{z}{x}}{y} = \frac{z}{xy}$$

ได้ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$

<u>กรณี 2:</u> $x = 0$ หรือ $y = 0$ หรือ $z = 0$ จะแสดงว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$

กรณี 2.1: $x = 0$ ได้ว่า

$$x * (y * z) = 0 * (y * z) = 0 = y * 0 = y * (0 * z) = y * (x * z)$$

กรณี 2.2: $y = 0$ ได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (0 * z) = x * 0 = 0 = 0 * (x * z) = y * (x * z)$$

กรณี 2.3: $z = 0$ ได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (y * 0) = x * 0 = 0 = y * 0 = y * (x * 0) = y * (x * z)$$

ดังนั้น (PSRU2) เป็นจริง

สรุปได้ว่า (X; $*$, 0) เป็นพีชคณิต $PSRU$

บทนิยาม 3.5 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ จะกำหนดความสัมพันธ์ " $\leq$ " โดย

$$x \leq y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x * y = 1$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

ตัวอย่าง 3.6 ให้ $X = \{1, b, c, d, e\}$ และกำหนดการดำเนินการ $*$ ดังตารางต่อไปนี้

*	1	b	c	d	e
1	1	1	1	1	1
b	1	b	b	b	b
c	1	b	d	e	c
d	1	b	c	d	e
e	1	b	e	c	d

จากตัวอย่าง 3.3 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

จากตารางได้ว่า $1 * x = 1$ และ $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $1 \leq x$ และ $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ตัวอย่าง 3.7 ให้ $X = \mathbb{R}$ และกำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังนี้

$$x * y = \begin{cases} \dfrac{y}{x} & ; x, y \notin \{0\} \\ 0 & ; \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 3.4 จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

จาก $x * 0 = 0$ ทุก $x \in X$ ได้ว่า $x \leq 0$ สำหรับทุก $x \in X$

จาก $0 * x = 0$ ทุก $x \in X$ ได้ว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$

บทนิยาม 3.8 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ S เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่าเป็น **พีชคณิตย่อย** (**subalgebra**) ของ X ถ้า $x * y \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

ตัวอย่าง 3.9 ให้ $X = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	1	1

ก่อนอื่นจะแสดงว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

1. จากตารางได้ว่า $1 * 1 = 1, a * 1 = 1, b * 1 = 1$

นั่นคือ $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (PSRU1) เป็นจริง

2. จะพิสูจน์ว่า (PSRU2) เป็นจริง

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด 3 x 3 x 3 = 27 กรณีย่อย สามารถพิจารณาได้ 3 กรณีใหญ่ ดังต่อไปนี้

กรณี 1: $z = 1$ จะได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (y * 1) = x * 1 = 1 = y * 1 = y * (x * 1) = y * (x * z)$$

ซึ่งได้ทั้งหมด 9 กรณีย่อย

กรณี 2: กรณี $z = a$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 9 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

กรณี 2.1: $x = 1$ และ $y = b$ จะแสดงว่า $1 * (b * a) = b * (1 * a)$

จากตารางได้ว่า $1 * (b * a) = 1 * 1 = 1 = b * a = b * (1 * a)$

ดังนั้น $1 * (b * a) = b * (1 * a)$

กรณี 2.2: $x = a$ และ $y = b$ จะแสดงว่า $a * (b * a) = b * (a * a)$

จากตารางได้ว่า $a * (b * a) = a * 1 = 1 = b * 1 = b * (a * a)$

ดังนั้น $a * (b * a) = b * (a * a)$

กรณี 2.3: $x = b$ และ $y = 1$ จะแสดงว่า $b * (1 * a) = 1 * (b * a)$

จากตารางได้ว่า $b * (1 * a) = b * a = 1 = 1 * 1 = 1 * (b * a)$

ดังนั้น $b * (1 * a) = 1 * (b * a)$

กรณี 3: กรณี $z = b$ จะได้กรณีย่อยทั้งหมด 9 กรณี ในที่นี้จะแสดง 3 กรณี ดังนี้

กรณี 3.1: $x = 1$ และ $y = a$ จะแสดงว่า $1 * (a * b) = a * (1 * b)$

จากตารางได้ว่า $1 * (a * b) = 1 * 1 = 1 = a * b = a * (1 * b)$

ดังนั้น $1 * (a * b) = a * (1 * b)$

กรณี 3.2: $x = a$ และ $y = 1$ จะแสดงว่า $a * (1 * b) = 1 * (a * b)$

จากตารางได้ว่า $a * (1 * b) = a * b = 1 = 1 * 1 = 1 * (a * b)$

ดังนั้น $a * (1 * b) = 1 * (a * b)$

กรณี 3.3: $x = b$ และ $y = a$ จะแสดงว่า $b * (a * b) = a * (b * b)$

จากตารางได้ว่า $b * (a * b) = b * 1 = 1 = a * 1 = a * (b * b)$

ดังนั้น $b * (a * b) = a * (b * b)$

สรุปได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

ให้ $S_1 = \{1, a\}$ และ $S_2 = \{a, b\}$

พิจารณา $S_1 = \{1, a\}$ จากตารางได้ว่า

$$1 * 1 = 1 \in S_1,\ 1 * a = a \in S_1,\ a * 1 = 1 \in S_1,\ a * a = 1 \in S_1$$

จะได้ว่า S_1 เป็นพีชคณิตย่อยของ X เนื่องจาก $x * y \in S_1$ สำหรับทุก $x, y \in S_1$

พิจารณา $S_2 = \{a, b\}$ ได้ว่า $a * b = 1 \notin S_2$

ดังนั้น S_2 ไม่เป็นพีชคณิตย่อยของ X

จากบทตั้ง 2.19 ได้ว่าทุกพีชคณิตย่อยของพีชคณิต BE จะมี 1 เป็นสมาชิกเสมอ แต่สำหรับพีชคณิตย่อยของพีชคณิต $PSRU$ ไม่จำเป็นต้องมี 1 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.10 ให้ $X = \{1, b, c, d, e\}$ และกำหนดการดำเนินการ $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	b	c	d	e
1	1	1	1	1	1
b	1	b	b	b	b
c	1	b	d	e	c
d	1	b	c	d	e
e	1	b	e	c	d

จากตัวอย่าง 3.3 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

ให้ $S = \{b, d\}$ จากตารางจะได้ว่า

$$b * b = b \in S,\ b * d = b \in S,\ d * b = b \in S,\ d * d = d \in S$$

จะได้ว่า S เป็นพีชคณิตย่อยของ X แต่ $1 \notin S$

3.2 การแจกแจงในตัวและตัวกรองในพีชคณิต $PSRU$

บทนิยาม 3.11 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ จะเรียก X ว่ามี **การแจกแจงในตัว (self distributive)** ถ้า

$$x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

บทนิยาม 3.12 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ จะเรียกสมาชิก 1 ใน X ว่าเป็น**เอกลักษณ์ซ้าย (left identity)** ถ้า

$$1 * x = x$$

สำหรับทุก $x \in X$

พีชคณิต $PSRU$ ไม่จำเป็นต้องมีสมบัติแจกแจงในตัวหรือมี 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้ายดังตัวอย่าง 3.10 จะเห็นว่า $1 * x = 1 \neq x$ สำหรับทุก $x \in X - \{1\}$ นั่นคือ 1 ไม่เป็นเอกลักษณ์ซ้ายใน X และจาก

$$e * (c * d) = e * e = d \neq e = e * c = (e * c) * (e * d)$$

ได้ว่า X ไม่มีการแจกแจงในตัว

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว

ตัวอย่าง 3.13 ให้ $X = \{1, a\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a
1	1	a
a	1	a

ก่อนอื่นจะแสดงว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

1. จากตารางได้ว่า $1 * 1 = 1, a * 1 = 1$

นั่นคือ $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (PSRU1) เป็นจริง

2. จะพิสูจน์ (PSRU2) เป็นจริง

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด 2 x 2 x 2 = 8 กรณีย่อย สามารถพิจารณาได้ 2 กรณีใหญ่ ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1:</u> $z = 1$ จากตารางได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (y * 1) = x * 1 = 1 = y * 1 = y * (x * 1) = y * (x * z)$$

ซึ่งได้ทั้งหมด 4 กรณีย่อย

<u>กรณี 2:</u> $z = a$ จากตารางได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (y * a) = x * a = a = y * a = y * (x * a) = y * (x * z)$$

ซึ่งได้ทั้งหมด 4 กรณีย่อย

นั่นคือ $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

ต่อไปจะแสดงว่า X มีสมบัติการแจกแจงในตัว

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด 2 x 2 x 2 = 8 กรณีย่อย สามารถพิจารณาได้ 2 กรณีใหญ่ ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1:</u> $z = 1$ จากตารางได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (y * 1) = x * 1 = 1 = (x * y) * 1 = (x * y) * (x * 1) = (x * y) * (x * z)$$

ซึ่งได้ทั้งหมด 4 กรณีย่อย

<u>กรณี 2:</u> $z = a$ จากตารางได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (y * a) = x * a = a = (x * y) * a = (x * y) * (x * a) = (x * y) * (x * z)$$

ซึ่งได้ทั้งหมด 4 กรณีย่อย

สรุปได้ว่า X มีสมบัติการแจกแจงในตัว

นอกจากนี้จะเห็นว่า 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้าย เนื่องจาก $1 * 1 = 1$ และ $1 * a = a$

<u>**บทตั้ง 3.14**</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $z * x \leq z * y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
2. ถ้า $z \leq x$ แล้ว $y * z \leq (z * x) * (y * x)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว

1. ให้ $x, y, z \in X$ โดยที่ $x \leq y$ ได้ว่า $x * y = 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (z * x) * (z * y) &= z * (x * y) && \text{(จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว)} \\ &= z * 1 && \text{(จาก } x * y = 1\text{)} \\ &= 1 && \text{(จาก PSRU1)} \end{aligned}$$

จากบทนิยาม 3.5 ได้ว่า $z * x \leq z * y$

2. ให้ $x, y, z \in X$ ที่ $z \leq x$ ได้ว่า $z * x = 1$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(y*x)*[(z*x)*(y*x)] &= (z*x)*[(y*z)*(y*x)] && \text{(จาก PSRU2)} \\
&= (z*x)*[y*(z*x)] && \text{(จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว)} \\
&= (z*x)*(y*1) && \text{(จาก } z*x=1\text{)} \\
&= (z*x)*1 && \text{(จาก PSRU1)} \\
&= 1 && \text{(จาก PSRU1)}
\end{aligned}
$$

จากบทนิยาม 3.5 ได้ว่า $(y*z) \leq (z*x)*(y*x)$ □

บทตั้ง 3.15 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x*x=1$ สำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $x*(y*x)=1$ นั่นคือ $x \leq y*x$ สำหรับทุก $x,y \in X$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x*x=1$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $x,y \in X$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
x*(y*x) &= y*(x*x) && \text{(จาก PSRU2)} \\
&= y*1 && \text{(จากสมบัติ } x*x=1\text{)} \\
&= 1 && \text{(จาก PSRU1)}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $x*(y*x)=1$

นั่นคือ $x \leq y*x$ สำหรับทุก $x,y \in X$ □

บทนิยาม 3.16 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และให้ F เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่างจะเรียก F ว่าเป็น **ตัวกรอง (filter)** ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(F1) $1 \in F$

(F2) ถ้า $x*y \in F$ และ $x \in F$ แล้ว $y \in F$ สำหรับทุก $x,y \in X$

(นั่นคือ ถ้า $y \notin F$ แล้ว $x \notin F$ หรือ $x*y \notin F$)

__ตัวอย่าง 3.17__ ให้ $X = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	1	1

จากตัวอย่าง 3.9 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

ให้ $F_1 = \{1\}$ และ $F_2 = \{1, a\}$

จะแสดงว่า F_1 เป็นตัวกรองของ X แต่ F_2 ไม่เป็นตัวกรองของ X

1. จะแสดงว่า F_1 เป็นตัวกรองของ X

จาก $F_1 = \{1\}$ ได้ว่า $1 \in F_1$

นั่นคือ (F1) เป็นจริง

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า (F2) เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่าถ้า $x * y \in F_1$ และ $x \in F_1$ แล้ว $y \in F_1$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x * y \in F_1$ และ $x \in F_1$

ได้ว่า $x * y = 1$ และ $x = 1$

นั่นคือ $1 * y = 1$

จากตารางได้ว่า $y = 1 \in F_1$

ดังนั้นถ้า $x * y \in F_1$ และ $x \in F_1$ แล้ว $y \in F_1$ ทำให้ได้ว่า (F2) เป็นจริง

สรุปได้ว่า F_1 เป็นตัวกรองของ X

2. จะแสดงว่า F_2 ไม่เป็นตัวกรองของ X

จาก $F_2 = \{1, a\}$ ได้ว่า $1 \in F_2$

นั่นคือ (F1) เป็นจริง

จาก $a * b = 1 \in F_2$ และ $a \in F_2$ แต่ $b \notin F_2$ ทำให้ได้ว่า (F2) ไม่เป็นจริง

สรุปได้ว่า F_2 ไม่เป็นตัวกรองของ X

__หมายเหตุ__ : พีชคณิตย่อยไม่จำเป็นต้องเป็นตัวกรอง ดังตัวอย่าง 3.17 ได้ว่า F_2 เป็นพีชคณิตย่อย เนื่องจากมีสมบัติปิด แต่ F_2 ไม่เป็นตัวกรอง

<u>บทตั้ง 3.18</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้ายและมีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว F เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้ายและมีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ F เป็นตัวกรองของ X จะแสดงว่า F เป็นพีชคณิตย่อยของ X

ให้ $x, y \in F$ จะแสดงว่า $x * y \in F$

จากบทตั้ง 3.15 ได้ว่า $y * (x * y) = 1$

จาก (F1) ได้ว่า $1 \in F$ ดังนั้น $y * (x * y) \in F$

จาก $y * (x * y) \in F$ และ $y \in F$ โดย (F2) ได้ว่า $x * y \in F$

ดังนั้น F เป็นพีชคณิตย่อยของ X $\square$

3.3 ตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานในพีชคณิต $PSRU$

<u>บทนิยาม 3.19</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ $f : X \to X$ จะเรียก f ว่าเป็น **ตัวคูณ (multiplier)** ของ X ถ้า

$$f(x * y) = x * f(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

<u>บทนิยาม 3.20</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ $f : X \to X$ จะเรียก f ว่าเป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphisms)** ถ้า

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

<u>ตัวอย่าง 3.21</u> ให้ $X = \{1, a, b, c\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

*	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
c	1	1	a	1

จากตัวอย่าง 2.20 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต BE จึงทำให้ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

กำหนดฟังก์ชัน $f : X \to X$ และ $g : X \to X$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1, a, c \\ a & \text{ถ้า } x = b \end{cases} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1, a, c \\ b & \text{ถ้า } x = b \end{cases}$$

จะแสดงว่า f เป็นตัวคูณของ X

นั่นคือจะแสดงว่า $f(x * y) = x * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด 4 x 4 = 16 กรณี ในที่นี้จะแสดง 6 กรณี ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1:</u> $x = 1$ และ $y = a$ จะแสดงว่า $f(1 * a) = 1 * f(a)$

จากตารางได้ว่า $f(1 * a) = f(a) = 1$

และ $1 * f(a) = 1 * 1 = 1$

จะได้ว่า $f(1 * a) = 1 * f(a)$

<u>กรณี 2:</u> $x = a$ และ $y = b$ จะแสดงว่า $f(a * b) = a * f(b)$

จากตารางได้ว่า $f(a * b) = f(a) = 1$

และ $a * f(b) = a * a = 1$

จะได้ว่า $f(a * b) = a * f(b)$

<u>กรณี 3:</u> $x = b$ และ $y = c$ จะแสดงว่า $f(b * c) = b * f(c)$

จากตารางได้ว่า $f(b * c) = f(a) = 1$

และ $b * f(c) = b * 1 = 1$

จะได้ว่า $f(b * c) = b * f(c)$

กรณี 4: $x = 1$ และ $y = b$ จะแสดงว่า $f(1 * b) = 1 * f(b)$

จากตารางได้ว่า $f(1 * b) = f(b) = a$

และ $1 * f(b) = 1 * a = a$

จะได้ว่า $f(1 * b) = 1 * f(b)$

กรณี 5: $x = a$ และ $y = c$ จะแสดงว่า $f(a * c) = a * f(c)$

จากตารางได้ว่า $f(a * c) = f(a) = 1$

และ $a * f(c) = a * 1 = 1$

จะได้ว่า $f(a * c) = a * f(c)$

กรณี 6: $x = 1$ และ $y = c$ จะแสดงว่า $f(1 * c) = 1 * f(c)$

จากตารางได้ว่า $f(1 * c) = f(c) = 1$

และ $1 * f(c) = 1 * 1 = 1$

จะได้ว่า $f(1 * c) = 1 * f(c)$

สำหรับกรณีที่เหลือสามารถพิสูจน์ได้เช่นกันว่า $f(x * y) = x * f(y)$

ดังนั้น f เป็นตัวคูณของ X

ต่อไปจะพิจารณาฟังก์ชัน g

จาก $g(a * b) = g(a) = 1$ แต่ $a * g(b) = a * b = a$

นั่นคือ $g(a * b) \neq a * g(b)$

ได้ว่า g ไม่เป็นตัวคูณของ X

ต่อไปจะพิจารณาว่า f, g เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานหรือไม่

พิจารณาฟังก์ชัน f

จาก $f(a * b) = f(a) = 1$

และ $f(a) * f(b) = 1 * a = a$

ดังนั้นจะได้ว่า $f(a * b) \neq f(a) * f(b)$

นั่นคือ f ไม่เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

พิจารณาฟังก์ชัน g

จาก $g(a * b) = g(a) = 1$

และ $g(a) * g(b) = 1 * b = b$

นั่นคือ $g(a * b) \neq g(a) * g(b)$

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

ตัวอย่าง 3.22 ให้ $X = \{1, a\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

*	1	a
1	1	a
a	1	a

จากตัวอย่าง 3.13 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

กำหนดฟังก์ชัน $f : X \to X$ โดย $f(x) = a$ สำหรับทุก $x \in X$

จะแสดงว่า f เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

นั่นคือจะแสดงว่า $f(x * y) = x * f(y)$ และ $f(x * y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ให้ $x, y \in X$ ได้ว่า

$$f(x * y) = a = x * a = x * f(y)$$

และ

$$f(x * y) = a = a * a = f(x) * f(y)$$

ดังนั้น f เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

บทตั้ง 3.23 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ จะได้ว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์บน X และฟังก์ชันค่าคงตัวที่มีเรนจ์เป็น {1} เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$

ให้ $x, y \in X$ ได้ว่า

$$id_X(x * y) = x * y = x * id_X(y)$$

และ

$$id_X(x * y) = x * y = id_X(x) * id_X(y)$$

ได้ว่า id_X เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} X_1(x * y) &= 1 \\ &= x * 1 && \text{(จาก PSRU1)} \\ &= x * X_1(y) && (\text{จาก } X_1(y) = 1) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} X_1(x * y) &= 1 \\ &= 1 * 1 && \text{(จาก PSRU1)} \\ &= X_1(x) * X_1(y) && (\text{จาก } X_1(x) = 1, X_1(y) = 1) \end{aligned}$$

ได้ว่า X_1 เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X □

บทตั้ง 3.24 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัวและให้ $p \in X$ กำหนด $\alpha_p : X \to X$ โดย $\alpha_p(x) = p * x$ สำหรับทุก $x \in X$ ได้ว่า α_p เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว

ให้ $p \in X$ กำหนด $\alpha_p : X \to X$ โดย $\alpha_p(x) = p * x$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $x, y \in X$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\alpha_p(x * y) &= p * (x * y) && \\
&= x * (p * y) && \text{(จาก PSRU2)} \\
&= x * \alpha_p(y) && \text{(จาก } \alpha_p(y) = p * y\text{)}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\alpha_p(x * y) &= p * (x * y) && \\
&= (p * x) * (p * y) && \text{(จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว)} \\
&= \alpha_p(x) * \alpha_p(y) && \text{(จาก } \alpha_p(x) = p * x, \alpha_p(y) = p * y\text{)}
\end{aligned}$$

ได้ว่า α_p เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X □

ทฤษฎีบท 3.25 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ถ้า f และ g เป็นตัวคูณของ X แล้ว $f \circ g$ เป็นตัวคูณของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f, g เป็นตัวคูณของ X

ให้ $a, b \in X$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(a * b) &= f(g(a * b)) && \text{(จากบทนิยาม 2.12)} \\
&= f(a * g(b)) && \text{(จาก } g \text{ เป็นตัวคูณ)} \\
&= a * f(g(b)) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\
&= a * (f \circ g)(b) && \text{(จากบทนิยาม 2.12)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g$ เป็นตัวคูณของ X □

ทฤษฎีบท 3.26 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X แล้ว $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f, g เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

ให้ $a, b \in X$ ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(a * b) &= f(g(a * b)) && \text{(จากบทนิยาม 2.12)} \\
&= f(g(a) * g(b)) && \text{(จาก } g \text{ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน)} \\
&= f(g(a)) * f(g(b)) && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน)} \\
&= (f \circ g)(a) * (f \circ g)(b) && \text{(จากบทนิยาม 2.12)}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X □

บทนิยาม 3.27 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ $x, y \in X$ นิยาม

$$x \cup y = (y * x) * x$$

บทนิยาม 3.28 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ $f_1 : X \to X$ และ $f_2 : X \to X$ จะนิยาม $f_1 \cup f_2 : X \to X$ โดย

$$(f_1 \cup f_2)(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$$

สำหรับทุก $x \in X$

ตัวอย่าง 3.29 ให้ $X = \{1, a, b, c\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

*	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
c	1	1	a	1

จากตัวอย่าง 2.20 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต BE จึงทำให้ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

ให้ $x \in X$ จากตารางได้ว่า

$$1 \cup x = (x * 1) * 1 = 1 * 1 = 1,$$

$$x \cup x = (x * x) * x = 1 * x = x,$$

$$x \cup 1 = (1 * x) * x = x * x = 1$$

นอกจากนี้จะได้ว่า

$$a \cup b = (b * a) * a = 1 * a = a,$$

$$b \cup a = (a * b) * b = a * b = a,$$

$$a \cup c = (c * a) * a = 1 * a = a,$$

$$c \cup a = (a * c) * c = a * c = a,$$

$$b \cup c = (c * b) * b = a * b = a,$$

$$c \cup b = (b * c) * c = a * c = a$$

กำหนดฟังก์ชัน $f : X \to X$ และ $g : X \to X$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1, a, c \\ a & \text{ถ้า } x = b \end{cases} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = X_1(x) = 1 \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X$$

จากตัวอย่าง 3.21 ได้ว่า f เป็นตัวคูณของ X

และจากบทตั้ง 3.23 ได้ว่า g เป็นตัวคูณของ X

ให้ $x \in X$ ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(f \cup g)(x) &= f(x) \cup g(x) \\
&= (g(x) * f(x)) * f(x) \\
&= \begin{cases} (1 * 1) * 1 & \text{ถ้า } x = 1, a, c \\ (1 * a) * a & \text{ถ้า } x = b \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1, a, c \\ a * a & \text{ถ้า } x = b \end{cases} \\
&= 1 \\
&= g(x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f \cup g = g$

ทฤษฎีบท 3.30 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว ถ้า f และ g เป็นตัวคูณของ X แล้ว $f \cup g$ เป็นตัวคูณของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัวและ f, g เป็นตัวคูณของ X

ให้ $a, b \in X$ ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(f \cup g)(a * b) &= f(a * b) \cup g(a * b) && \text{(จากบทนิยาม 3.28)} \\
&= (a * f(b)) \cup (a * g(b)) && \text{(จาก } f, g \text{ เป็นตัวคูณ)} \\
&= [(a * g(b)) * (a * f(b))] * (a * f(b)) && \text{(จากบทนิยาม 3.27)} \\
&= [a * (g(b) * f(b))] * (a * f(b)) && \text{(จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว)} \\
&= a * [(g(b) * f(b)) * f(b)] && \text{(จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว)} \\
&= a * [f(b) \cup g(b)] && \text{(จากบทนิยาม 3.27)} \\
&= a * (f \cup g)(b) && \text{(จากบทนิยาม 3.28)}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f \cup g$ เป็นตัวคูณของ X $\square$

จากบทตั้ง 2.23 ได้ว่า ถ้า f เป็นตัวคูณในพีชคณิต BE แล้ว $f(1) = 1$ แต่ในพีชคณิต $PSRU$ ไม่จำเป็นที่ $f(1) = 1$ ดังตัวอย่าง 3.22 จะเห็นว่า f เป็นตัวคูณของพีชคณิต $PSRU$ ที่ $f(1) = a \neq 1$

<u>บทตั้ง 3.31</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า f เป็นตัวคูณของ X แล้ว $f(1) = 1$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ และให้ f เป็นตัวคูณของ X

จาก $1 \in X$ และ f เป็นตัวคูณของ X ได้ว่า $f(1) \in X$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f(1) &= f(f(1) * 1) && \text{(จาก PSRU1)} \\ &= f(1) * f(1) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\ &= 1 && \text{(จากสมบัติ } x * x = 1\text{)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(1) = 1$ $\square$

<u>บทตั้ง 3.32</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ และ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ และให้ f เป็นตัวคูณของ X

1. ให้ $x \in X$ จะแสดงว่า $x \leq f(x)$ นั่นคือจะแสดงว่า $x * f(x) = 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned} x * f(x) &= f(x * x) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\ &= f(1) && \text{(จากสมบัติ } x * x = 1 \text{)} \\ &= 1 && \text{(จากบทตั้ง 3.31)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \leq f(x)$

2. ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \leq y$ จะได้ว่า $x * y = 1$

จะแสดงว่า $x \leq f(y)$ นั่นคือจะแสดงว่า $x * f(y) = 1$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
x * f(y) &= f(x * y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\
&= f(1) && \text{(จาก } x * y = 1 \text{)} \\
&= 1 && \text{(จากบทตั้ง 3.31)}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x \leq f(y)$ $\square$

<u>ข้อสังเกต</u> จากบทตั้ง 3.32 ถ้าขาดสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ จะทำให้บทตั้ง 3.32 (1) ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.33</u> ให้ $X = \{1, a\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

*	1	a
1	1	a
a	1	a

จากตัวอย่าง 3.13 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่ไม่มีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

กำหนดฟังก์ชัน $f : X \to X$ โดย $f(x) = a$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตัวอย่าง 3.22 ได้ว่า f เป็นตัวคูณและเป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

จากตารางได้ว่า

$$a * f(a) = a * a = a \neq 1$$

ดังนั้น $a \not\leq f(a)$

นั่นคือ บทตั้ง 3.32 (1) ไม่เป็นจริง

3.4 เคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$

<u>บทนิยาม 3.34</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X นิยาม **เคอร์เนล (kernel)** ดังนี้

$$Ker(f) := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

บทนิยาม 3.35 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X นิยาม

$$F_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

จะเรียก F_f ว่าเป็น**เซตของจุดตรึง (set of fixed points)** ของ f

ตัวอย่าง 3.36 ให้ $X = \{1, a, b, c\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
c	1	1	a	1

จากตัวอย่าง 2.20 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต BE นั่นคือจะเป็นพีชคณิต $PSRU$

กำหนดฟังก์ชัน $f : X \to X$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1, a, c \\ a & \text{ถ้า } x = b \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 3.21 ได้ว่า f เป็นตัวคูณของ X

จาก $f(1) = 1, f(a) = 1, f(c) = 1$

จะได้ว่า $Ker(f) = \{1, a, c\}$ และ $F_f = \{1\}$

จากบทตั้ง 2.25 และ 2.29 ได้ว่า ถ้า f เป็นตัวคูณของพีชคณิต BE แล้ว $Ker(f)$ และ F_f เป็นพีชคณิตย่อย นั่นคือ $Ker(f) \neq \emptyset$ และ $F_f \neq \emptyset$ แต่สำหรับตัวคูณ f ของพีชคณิต $PSRU$ เซต $Ker(f)$ หรือ F_f อาจจะเป็นเซตว่างได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.37 ให้ $X = \{1, a\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a
1	1	a
a	1	a

จากตัวอย่าง 3.13 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต $PSRU$

กำหนดฟังก์ชัน $f : X \to X$ โดย $f(x) = a$ สำหรับทุก $x \in X$

จากตัวอย่าง 3.22 ได้ว่า f เป็นตัวคูณของ X และ $f(1) = a, f(a) = a$

จะได้ว่า $Ker(f) = \emptyset$ และ $F_f = \{a\}$

ทฤษฎีบท 3.38 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $Ker(f) \neq \emptyset$ แล้ว $Ker(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X
2. ถ้า $F_f \neq \emptyset$ แล้ว F_f เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X

1. สมมติให้ $Ker(f) \neq \emptyset$ ให้ $x, y \in Ker(f)$ จะได้ว่า $f(x) = 1$ และ $f(y) = 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x * y) &= x * f(y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\ &= x * 1 && \text{(จาก } f(y) = 1) \\ &= 1 && \text{(จาก PSRU1)} \end{aligned}$$

ได้ว่า $x * y \in Ker(f)$

ดังนั้น $Ker(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

2. สมมติให้ $F_f \neq \emptyset$ ให้ $x, y \in F_f$ ได้ว่า $f(x) = x$ และ $f(y) = y$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x * y) &= x * f(y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\ &= x * y && \text{(จาก } f(y) = y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x * y \in F_f$

สรุปได้ว่า F_f เป็นพีชคณิตย่อยของ X □

ทฤษฎีบท 3.39 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้ายและมีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า f เป็นตัวคูณที่เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X แล้ว $Ker(f)$ เป็นตัวกรองของ X

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้ายและมีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

สมมติให้ f เป็นตัวคูณที่เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

จากบทตั้ง 3.31 ได้ว่า $f(1) = 1$ นั่นคือ $1 \in Ker(f)$

ดังนั้น (F1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า (F2) เป็นจริง

นั่นคือจะแสดงว่า ถ้า $x * y \in Ker(f)$ และ $x \in Ker(f)$ แล้ว $y \in Ker(f)$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $x * y \in Ker(f)$ และ $x \in Ker(f)$ จะได้ว่า $f(x * y) = 1$ และ $f(x) = 1$

จะแสดงว่า $y \in Ker(f)$ นั่นคือจะแสดงว่า $f(y) = 1$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(y) &= f(1 * y) && \text{(จาก 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้าย)} \\
&= 1 * f(y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\
&= f(x) * f(y) && \text{(จาก } f(x) = 1) \\
&= f(x * y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน)} \\
&= 1 && \text{(จาก } f(x * y) = 1)
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า (F2) เป็นจริง

ดังนั้น $Ker(f)$ เป็นตัวกรองของ X □

บทตั้งและทฤษฎีบทต่าง ๆ ต่อไปนี้จะแสดงสมบัติบางประการของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$

บทตั้ง 3.40 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X ถ้ามี $x, y \in X$ ที่ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in Ker(f)$ แล้ว $f(1) = 1$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X

สมมติว่ามี $x, y \in X$ ที่ $x \leq y$ และ $y \in Ker(f)$ จะได้ว่า $x * y = 1$ และ $f(y) = 1$ จะแสดงว่า $f(1) = 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f(1) &= f(x * y) && \text{(จาก } x * y = 1\text{)} \\ &= x * f(y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\ &= x * 1 && \text{(จาก } f(y) = 1\text{)} \\ &= 1 && \text{(จาก PSRU1)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(1) = 1$ □

ทฤษฎีบท 3.41 ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $x \leq y$ และ $y \in F_f$ แล้ว $x * y \in Ker(f)$
2. ถ้า $y \in Ker(f)$ แล้ว $x * y \in Ker(f)$
3. ถ้า $y \in F_f$ แล้ว $x * y \in F_f$

สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X

ให้ $x, y \in X$

1. สมมติให้ $x \leq y$ และ $y \in F_f$ ได้ว่า $x * y = 1$ และ $f(y) = y$

จะแสดงว่า $x * y \in Ker(f)$ นั่นคือจะแสดงว่า $f(x * y) = 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x * y) &= x * f(y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\ &= x * y && \text{(จาก } f(y) = y\text{)} \\ &= 1 && \text{(จาก } x * y = 1\text{)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x * y \in Ker(f)$

2. สมมติให้ $y \in Ker(f)$ ได้ว่า $f(y) = 1$

จะแสดงว่า $x * y \in Ker(f)$ นั่นคือจะแสดงว่า $f(x * y) = 1$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x*y) &= x*f(y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\
&= x*1 && \text{(จาก } f(y)=1\text{)} \\
&= 1 && \text{(จาก PSRU1)}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x*y \in Ker(f)$

3. สมมติให้ $y \in F_f$ ได้ว่า $f(y) = y$

จะแสดงว่า $x*y \in F_f$ นั่นคือจะแสดงว่า $f(x*y) = x*y$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x*y) &= x*f(y) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\
&= x*y && \text{(จาก } f(y)=y\text{)}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x*y \in F_f$ $\square$

<u>บทตั้ง 3.42</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x*x=1$ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x*y \in Ker(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x*x=1$ สำหรับทุก $x \in X$

สมมติให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \leq y$ จะได้ว่า $x*y=1$

จะแสดงว่า $x*y \in Ker(f)$ นั่นคือจะแสดงว่า $f(x*y)=1$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x*y) &= f(1) && \text{(จาก } x*y=1\text{)} \\
&= 1 && \text{(จากบทตั้ง 3.31)}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $x*y \in Ker(f)$ $\square$

<u>บทตั้ง 3.43</u> ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X ถ้า $x \in F_f$ แล้ว $x \cup y \in F_f$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X

ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $x \in F_f$ ได้ว่า $f(x) = x$

จะแสดงว่า $x \cup y \in F_f$ นั่นคือจะแสดงว่า $f(x \cup y) = x \cup y$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x \cup y) &= f((y * x) * x) && \text{(จากบทนิยาม 3.27)} \\ &= (y * x) * f(x) && \text{(จาก } f \text{ เป็นตัวคูณ)} \\ &= (y * x) * x && \text{(จาก } f(x) = x\text{)} \\ &= x \cup y && \text{(จากบทนิยาม 3.27)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \cup y \in F_f$ $\square$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จากการศึกษานิยามและสมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิต $PSRU$ ที่มีนิยามดังนี้ $x * 1 = 1$ และ $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ เราได้พิจารณาสมบัติของพีชคณิตย่อย ตัวกรอง การแจกแจงในตัว เอกลักษณ์ซ้าย ตัวคูณ และฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน ทำให้ได้ผลการศึกษา ดังนี้

ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัว และ $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

1. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $z * x \leq z * y$

2. ถ้า $x \leq z$ แล้ว $y * z \leq (z * x) * (y * x)$

นอกจากนี้เมื่อศึกษาพีชคณิต $PSRU$ ที่มีการแจกแจงในตัวและมีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $x, y, z \in X$ แล้วทำให้ได้ว่า

1. $x \leq (y * x)$

2. ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว F เป็นพีชคณิตย่อยของ X เมื่อ X มี 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้าย

นอกจากนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับตัวคูณและฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของพีชคณิต $PSRU$ ฟังก์ชันประกอบ และการยูเนียนของฟังก์ชัน ได้ผลการศึกษาดังนี้

1. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f, g เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่า
   - $f \circ g$ เป็นตัวคูณของ X
   - $f \cup g$ เป็นตัวคูณของ X เมื่อ X มีการแจกแจงในตัว

2. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X จะได้ว่า $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X

3. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x * x = 1$ และ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่า
   - $f(1) = 1$
   - $x \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
   - ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

สุดท้ายเราได้ศึกษาเกี่ยวกับเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณในพีชคณิต $PSRU$ และได้ผลดังนี้

1. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X ได้ว่า

   - ถ้า $Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \neq \emptyset$ แล้ว $Ker(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X
   - ถ้า $F_f = \{x \in X \mid f(x) = x\} \neq \emptyset$ แล้ว F_f เป็นพีชคณิตย่อยของ X
   - ถ้า $x \leq y$ และ $y \in F_f$ แล้ว $x * y \in Ker(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
   - ถ้า $y \in Ker(f)$ แล้ว $x * y \in Ker(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
   - ถ้า $y \in F_f$ แล้ว $x * y \in F_f$ สำหรับทุก $x, y \in X$
   - ถ้า $x \in F_f$ แล้ว $x \cup y \in F_f$ สำหรับทุก $x, y \in X$

2. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ซ้ายและมีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า f เป็นตัวคูณที่เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของ X จะได้ว่า $Ker(f)$ เป็นตัวกรองของ X

3. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ และ f เป็นตัวคูณของ X ถ้ามี $x, y \in X$ ที่ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in Ker(f)$ แล้ว $f(1) = 1$

4. ให้ X เป็นพีชคณิต $PSRU$ ที่มีสมบัติ $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x * y \in Ker(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บรรณานุกรม

[1] S. S. Ahn, K. S. So, $On\ ideals\ and\ upper\ sets\ in\ BE-algebras,$ Sci. Math. Jpn. 68(2) (2008) 279-285.

[2] H. S. Kim and Y. H. Kim, $On\ BE-algebras,$ Sci. Math. Online, e-2006, 1299-1302.

[3] K. H. Kim, $Multipliers\ in\ BE-algebras,$ Int. Math. Forum, Vol. 6, 2011, no0 17, 815-820.

[4] A. Rezaei and A. B. Saeid., $Some\ Results\ in\ BE-algebras,$ Fasc. Mat., Tom XIX (2012), Issue No. 1, 33-34.

[5] P. Yiarayong, P. Wachirawongsakorn, $A\ new\ generalization\ of\ BE-algebras.,$ Heliyon 4 (2018) e00863.

[6] ปรารถนา ใจผ่อง. แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์. หน่วยพิมพ์เอกสาร คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[7] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปรียานุช โหนแหยม. เอกสารประกอบการเรียนกระบวนวิชาพีชคณิตนามธรรม. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ภาคผนวก

ภาควิชาคณิตศาสตร์
Department of Mathematics

Homomorphisms and Multipliers of PSRU-algebras

Kritsana Nametha ID: 620510480

Asst. Prof. Dr. Preeyanuch Honyam

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

Abstract

In this independent study, we study definitions and some properties of $PSRU$-algebras. We also study the concept of multipliers and homomorphisms on $PSRU$-algebras their properties. Moreover, we study definitions and some properties of the kernel and the set of fixed points of multipliers of $PSRU$-algebras.

Definition 1

Let X be a nonempty set with a binary operation $*$ and $1 \in X$. Then $X = (X; *, 1)$ is a $PSRU$**-algebra** if it satisfies the following identities:
(PSRU1) $x * 1 = 1$
(PSRU2) $x * (y * z) = y * (x * z)$
for all $x, y, z \in X$.

We define a relation $\leq$ on $PSRU$-algebras X by
$$x \leq y \Leftrightarrow x * y = 1$$
for all $x, y \in X$.

Example 1

Let $X = \mathbb{R}$ with the binary operation $*$ defined by
$$x * y = \begin{cases} \frac{y}{x} & ; x, y \notin \{0\} \\ 0 & ; otherwise. \end{cases}$$
Then X is a $PSRU$-algebra.

Definition 2

Let X be a $PSRU$-algebra and S be a nonempty subset of X. Then S is said to be a **subalgebra** of X if $x * y \in S$ for all $x, y \in S$.

Definition 3

Let X be a $PSRU$-algebra. Then X is said to be **self distributive** if
$$x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$$
for all $x, y, z \in X$.

Definition 4

Let X be a $PSRU$-algebra and $f : X \to X$. Then f is called a **multiplier** of X if $f(x * y) = x * f(y)$ for all $x, y \in X$.

Definition 5

Let X be a $PSRU$-algebra and $f : X \to X$. Then f is called a **homomorphisms** of X if $f(x * y) = f(x) * f(y)$ for all $x, y \in X$.

Definition 6

Let X be a $PSRU$-algebra and f be a multiplier on X. Define the **kernel** of f as follow:
$$Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}.$$

Definition 7

Let X be a $PSRU$-algebra and f be a multiplier on X. Define the **set of fixed points** of f as follow:
$$F_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}.$$

Theorem 1

Let X be a $PSRU$-algebra and f, g be multipliers on X. Then $f \circ g$ is a multiplier on X.

Theorem 2

Let X be a $PSRU$-algebra and f, g be homomorphisms on X. Then $f \circ g$ is a homomorphism on X.

Example 2

Let $X = \{1, a, b, c\}$ be a set with the following table:

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
c	1	1	a	1

Then X is a $PSRU$-algebra.
Define map $f : X \to X$ by
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 1, a, c \\ a & \text{if } x = b. \end{cases}$$
It is easy to check that f is a multiplier of X but, f is not a homomorphisms of X.
We see that $Ker(f) = \{1, a, c\}$ and $F_f = \{1\}$.

Theorem 3

Let X be a $PSRU$-algebra and f be a multiplier on X. Then the following statements hold.
1. If $Ker(f) \neq \emptyset$, then $Ker(f)$ is a subalgebra of X.
2. If $F_f \neq \emptyset$, then F_f is a subalgebra of X.

Theorem 4

Let X be a $PSRU$-algebra and f be a multiplier on X. Then the following statements hold.
1. If $x \leq y$ and $y \in F_f$, then $x * y \in Ker(f)$.
2. If $y \in Ker(f)$, then $x * y \in Ker(f)$.
3. If $y \in F_f$, then $x * y \in F_f$.

Definition 8

Let X be a $PSRU$-algebra and $f_1 : X \to X$ and $f_2 : X \to X$. Define $f_1 \cup f_2 : X \to X$ by
$$(f_1 \cup f_2)(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$$
for all $x \in X$ when $f_1(x) \cup f_2(x) = (f_2(x) * f_1(x)) * f_1(x)$.

Theorem 5

Let X be a self distributive $PSRU$-algebra and f, g be two multipliers of X. Then $f \cup g$ is a multiplier of X.
Note that X is a self distributive if $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ for all $x, y, z \in X$.

Lemma 1

Let X be a $PSRU$-algebra and f be a multiplier of X. If $x \in F_f$, then $x \cup y \in F_f$ for all $x, y \in X$.

References

[1] S. S. Ahn, K. S. So, *On ideals and upper sets in $BE-algebras$*, Sci. Math. Jpn. 68(2) (2008) 279-285.
[2] H. S. Kim and Y. H. Kim, *On $BE-algebras$*, Sci. Math. Online, e-2006, 1299-1302.
[3] K. H. Kim, *Multipliers in $BE-algebras$*, Int. Math. Forum, Vol. 6, 2011, no0 17, 815-820.
[4] A. Rezaei and A. B. Saeid., *Some Results in $BE-algebras$*, Fasc. Mat., Tom XIX (2012), Issue No. 1, 33-34.
[5] P. Yiarayong, P. Wachirawongsakorn, *A new generalization of $BE-algebras$.*, Heliyon 4 (2018) e00863.

รูปที่ 5.1: โปสเตอร์งานค้นคว้าอิสระ