

จุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค
(Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Banach spaces)

นายภูวดล ฮ่องคำ
รหัส 620510520

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2565

จุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค
(Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Banach spaces)

ภูวดล ฮ่องคำ

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ:

..... นราดล ภูวดลสิทธิ์ ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.นราดล ภูวดลสิทธิ์)

..... วิชาญชัย กันไว กรรมการ
(อาจารย์ ดร.วิชาญชัย กันไว)

วันที่ 7 เดือน พฤศจิกายน พ.ศ. 2565

จุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค
(Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Banach spaces)

นายภูวดล ช้องคำ
รหัส 620510520

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในกระบวนวิชา 206499 ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษา เรื่อง จุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค

ผู้ค้นคว้าขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. นรวดี ภูตลสิทธิพัฒน์ อาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระที่คอยช่วยเหลือให้คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และให้คำปรึกษาตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องพิจารณาแก้ไข จนทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสิ้นสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่าน ที่ได้อบรม สั่งสอน และให้ความรู้ทั้งในและนอกตำราเรียนให้แก่ผู้ค้นคว้า อันเป็นประโยชน์และสามารถนำมา ประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้ และขอขอบคุณเพื่อนๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ และผู้เกี่ยวข้องที่ช่วยสนับสนุนให้คำปรึกษาและช่วยเหลือขณะที่ผู้ค้นคว้ากำลังศึกษาค้นคว้าอิสระชิ้นนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณบิดา มารดา และครอบครัว รวมทั้งขอขอบคุณไปยังทุกท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับงานค้นคว้าอิสระ ฉบับนี้ซึ่งผู้ค้นคว้าไม่ได้เอ่ยนามมา ณ ที่นี้ด้วย

หากผลงานการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้รับคำชื่นชมหรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ผู้ค้นคว้าขอมอบคำชื่นชม และคุณความดีนั้นแก่ ครู อาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนในทางตรงกันข้ามหากผลงานค้นคว้าอิสระนี้เกิดข้อผิดพลาดประการใดผู้ค้นคว้าต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และขออน้อมรับความผิดพลาดไว้เพียงผู้เดียว

ภูวดล ฆ้องคำ

หัวข้อ (ภาษาไทย)	จุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค
(ภาษาอังกฤษ)	Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Banach spaces
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นายภูวดล ฮ่องคำ รหัสนักศึกษา 620510520
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.นราวดี ภูตลสิทธิ์พัฒน์
ชื่อกรรมการสอบ	อาจารย์ ดร.ขวัญชัย กันไฉ

บทคัดย่อ

ปัญหาจุดตรึงของการส่งหลายค่าเป็นหัวข้อที่มีผู้ศึกษาเป็นจำนวนมาก เนื่องจากสามารถนำมาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาต่างๆ ได้มากมาย ไม่ว่าจะเป็นทฤษฎีการควบคุม, การหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ และ เศรษฐศาสตร์ ในการค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษาขั้นตอนวิธีการประมาณค่าของจุดตรึงแบบหลายค่า จากงานวิจัยของ Khan และ Yildirim [1] เขาใช้แนวคิดจาก Shahzad และ Zegeye ซึ่งตัดเงื่อนไข “strong condition” บนการส่งที่เกี่ยวข้องกับวิธีการทำซ้ำ และศึกษาการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบอ่อนและการลู่เข้าแบบเข้มของการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค นอกจากนี้เราได้หาตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทหลักอีกด้วย

Abstract

The fixed points problem of multivalued mappings is a topic that has been studied very intensively by numerous researchers because it can be applied to solve many problems such as control theory, convex optimization, and economics. In this independent study, we study the approximation fixed points of multivalued mappings from Khan and Yildirim's research [1]. The others used an idea from Shahzad and Zegeye to removes a "strong condition" on the mapping involved in the iteration scheme and to prove the weak convergence theorem and strong convergence theorem of multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces. Moreover, we give an example to support the main theorem.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อ	ii
สารบัญ	iii
1 บทนำ (Introduction)	1
2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	3
3 ผลการศึกษา (Results)	8
3.1 ผลลัพธ์ที่จำเป็น	8
3.2 การลูเข้าแบบออนของลำดับ $\{x_n\}$	13
3.3 การลูเข้าแบบเข้มของลำดับ $\{x_n\}$	15
3.4 การส่งที่สอดคล้องเงื่อนไข (I)	17
3.5 ตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.4	18
4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	20
บรรณานุกรม	21
A โพสต์เตอร์	22

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

ให้ E เป็นปริภูมิบานาค (Banach space) และ K เป็นเซตย่อยของ E จะเรียก K ว่าพรีอกซิมินัล (proximal) ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in E$ จะมีสมาชิก $k \in K$ ที่ซึ่ง

$$d(x, k) = \inf \{ \|x - y\| : y \in K \} = d(x, K)$$

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่าเซตย่อยนูนกระชับแบบอ่อน (weakly compact convex subsets) ของปริภูมิบานาคและเซตย่อยปิดนูน (closed convex subsets) ของปริภูมิบานาคแบบเอกรูปเป็นพรีอกซิมินัล

กำหนดให้ $P(K)$ เป็นคลาสของเซตย่อยพรีอกซิมินัลที่มีขอบเขตของ K และ $CB(K)$ เป็นคลาสของเซตย่อยปิดที่มีขอบเขตของ K

กำหนดให้ H เป็น เมตริกเฮาส์ดอร์ฟที่เกิดจากเมตริก d ของ E นั่นคือ

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

สำหรับทุก $A, B \in CB(E)$

การส่งแบบหลายค่า $T : K \rightarrow P(K)$ จะถูกเรียกว่าหดตัว (contraction) ถ้ามีค่าคงที่ $\ell \in [0, 1)$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x, y \in K$

$$H(Tx, Ty) \leq \ell \|x - y\|$$

และถ้า $\ell = 1$ จะเรียก T ว่าเป็นการส่งแบบไม่ขยาย (Nonexpansive)

$$H(Tx, Ty) \leq \|x - y\|$$

สำหรับทุก $x, y \in K$

จุด $x \in K$ จะเรียกว่าจุดตรึง (fixed point) ของ T ถ้า $x \in Tx$ และ ให้ $F(T)$ แทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของ T

ตัวอย่าง 1.1 ให้ $E = \mathbb{R}$ ภายใต้ปริภูมิบานาค และ $K = [0, 100]$ เป็นเซตย่อยนูนปิด มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และให้ $T : K \rightarrow P(K)$ กำหนดโดย $T(x) = \left[0, \frac{x}{5}\right], \forall x \in K$ ดังนั้น $F(T) = \{0\}$

การศึกษาจุดตรึงสำหรับการส่งหดตัวและการส่งแบบไม่ขยายหลายค่าโดยใช้เมตริกเฮาส์ดอร์ฟ มีการเริ่มต้นคิดค้นโดย Markin [2] ต่อมาทฤษฎีจุดตรึงที่น่าสนใจสำหรับการส่งดังกล่าวได้รับการพัฒนาซึ่งมีการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีการควบคุม (control theory) การหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ (convex optimization) การรวมดิฟเฟอเรนเชียล (differential inclusion) และเศรษฐศาสตร์ (economics) ยิ่งไปกว่านั้นการมีอยู่ของจุดตรึงสำหรับการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาคแบบเอกรูปได้พิสูจน์โดย Lim [4]

ทฤษฎีจุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าที่น่ายกกว่า ทฤษฎีของการส่งไม่ขยายค่าเดียวมีการใช้กระบวนการทำซ้ำที่แตกต่างกันเพื่อประมาณค่าจุดตรึงสำหรับการส่งไม่ขยายหลายค่า

Agarwal และคณะ [5] แนะนำรูปแบบการทำซ้ำต่อไปนี้สำหรับการส่งแบบค่าเดียว

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_nTy_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.1)$$

โดยที่ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\} \in (0, 1)$

ในปี ค.ศ. 2012 Klan และ Yildirim [1] ได้ขยายขั้นตอนวิธีการทำซ้ำ (1.1) ไปยังกรณีที่ T เป็นการส่งแบบหลายค่า ดังนี้

$$\begin{cases} x_1 \in K, \\ x_{n+1} = (1 - \lambda)v_n + \lambda u_n \\ y_n = (1 - \eta)x_n + \eta v_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.2)$$

โดยที่ $v_n \in P_T(x_n), u_n \in P_T(y_n), 0 < \lambda, \eta < 1$

และ $P_T(x) = \{y \in Tx : \|x - y\| = d(x, Tx)\}$

ในการค้นคว้าอิสระนี้ได้ศึกษาการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าโดยใช้ขั้นตอนวิธีการทำซ้ำในปริภูมิบานาค (1.2) นอกจากนี้ยังหาตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทหลักอีกด้วย

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

บทนิยาม 2.1 ให้ A เป็นเซตและ S เป็นเซตย่อยของ A จะเรียก S ว่า **เซตปิด** (closed set) ถ้าทุก ๆ จุดลิมิตของ S อยู่ในเซต A

บทนิยาม 2.2 ให้ C เป็นเซตย่อยของ S แล้วจะเรียก C ว่าเป็น**เซตนูน** (convex set) ถ้าเส้นตรงที่เชื่อม x และ y อยู่ใน C นั่นคือ

$$(1-t)x + ty \in C$$

สำหรับทุก $x, y \in C$ และ $t \in [0, 1]$

บทนิยาม 2.3 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง และให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะเรียก α ว่า

1. ขอบเขตบน (upper bound) ของ S ถ้า $x \leq \alpha$ สำหรับทุก $x \in S$
2. ขอบเขตล่าง (lower bound) ของ S ถ้า $\alpha \leq x$ สำหรับทุก $x \in S$

บทนิยาม 2.4 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) บนฟิลด์ของจำนวนจริง แล้ว **นอร์ม** บน X คือ การส่ง

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับทุกสมาชิก $\alpha \in \mathbb{R}$ และทุกสมาชิก $x, y \in X$ สอดคล้องกับสมบัติดังต่อไปนี้

$$(1) \|x\| \geq 0$$

$$(2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

และจะกล่าวว่า $(X, \|\cdot\|)$ เป็น **ปริภูมินอร์ม** (normed space)

บทนิยาม 2.5 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์ของจำนวนจริง จะเรียกฟังก์ชัน $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

ว่า ผลคูณภายในบน X (inner product on X) ถ้า $\langle \cdot, \cdot \rangle$ สอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ สำหรับแต่ละ $x, y \in X$

(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ สำหรับแต่ละ $x, y, z \in X$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$

(4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ สำหรับแต่ละ $x, y, z \in X$

เราจะเรียก X ว่าเป็น **ปริภูมิผลคูณภายใน** (inner product spaces)

บทนิยาม 2.6 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิผลคูณภายใน X และ $x \in X$

(1) จะเรียกลำดับ $\{x_n\}$ ว่า **ลู่เข้าแบบเข้ม** สู่ x (converges strongly to x) ถ้า $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ เราแทน ด้วย $x_n \rightarrow x$

หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

(2) จะเรียกลำดับ $\{x_n\}$ ว่า **ลู่เข้าแบบอ่อน** สู่ x (converges weakly to x) ถ้า $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ สำหรับทุก $y \in X$

เราแทนด้วย $x_n \rightharpoonup x$

ข้อสังเกต 2.7 ถ้าลำดับลู่เข้าแบบเข้มแล้วจะลู่เข้าแบบอ่อนด้วย

บทนิยาม 2.8 ลำดับ $\{x_n\}$ ใน X จะเรียกว่าเป็น **ลำดับโคซี** (cauchy sequence) ถ้าสำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n, m \geq N$ แล้ว $\|x_n - x_m\| < \epsilon$

บทนิยาม 2.9 เราจะเรียก $\{x_n\}$ ว่าลำดับมีขอบเขต (bounded sequence) ถ้ามีจำนวนจริง บวก M

ที่ $|x_n| \leq M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

บทนิยาม 2.10 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า

(1) $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด (nondecreasing sequence) ถ้า $x_n \leq x_{n+1}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

(2) $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม (nonincreasing sequence) ถ้า $x_n \geq x_{n+1}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

(3) $\{x_n\}$ เป็นลำดับทางเดียว (monotone sequence) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด หรือ $\{x_n\}$ ลำดับไม่เพิ่ม

ทฤษฎีบท 2.11 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

(1) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดและมีขอบเขตบนแล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

(2) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มและมีขอบเขตล่างแล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.12 ลำดับลู่เข้าทุกลำดับเป็นลำดับที่มีขอบเขต

บทนิยาม 2.13 ลิมิตซูพีเรียร์ (limit superior) ของ $\{x_n\}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ หรือ $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ นิยามโดย

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} x_n$$

และลิมิตอินฟีเรียร์ (limit inferior) ของ $\{x_n\}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ หรือ $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ นิยามโดย

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{n \geq N} x_n$$

ตัวอย่าง 2.14 พิจารณาลำดับขอบเขตที่ไม่ใช่ลำดับทางเดียว

$$1, -1, 1, -1, \dots \quad \text{หรือ} \quad x_n = (-1)^{n+1}$$

เมื่อกำหนดให้

$$y_n = \sup \{(-1)^{k+1} : k \geq n\} = 1, \quad z_n = \inf \{(-1)^{k+1} : k \geq n\} = -1$$

ดังนั้น

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$$

บทนิยาม 2.15 ลำดับของจำนวนจริง $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x ก็ต่อเมื่อ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ทฤษฎีบท 2.16 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ จะได้ว่า

1. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$

2. ถ้า $x_n \leq y_n$ แล้ว $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$ และ $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$

ทฤษฎีบท 2.17 กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ ถ้า $c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq c$ ทุก

$n \geq N$ และ $c \geq 0$ เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = c$

ทฤษฎีบท 2.18 ทฤษฎีบท โบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano - Weierstrass Theorem)

ทุกลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.19 ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ x

ทฤษฎีบท 2.20 $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ เป็นลำดับโคชี $\{x_n\}$

บทนิยาม 2.21 ปริภูมิบานาค (Banach space) คือ ปริภูมิโนร์มแบบบริบูรณ์ (complete normed space) ภายใต้เมตริกที่ได้จากนอร์ม นั่นคือ $d(x, y) = \|x - y\|$

บทนิยาม 2.22 ปริภูมิโนร์ม $(X, \|\cdot\|)$ จะกล่าวว่าเป็น **ปริภูมิบริบูรณ์** (complete space) ถ้าทุก ๆ ลำดับโคชีใน X ลู่เข้าสู่ X

ทฤษฎีบท 2.23 ให้ E เป็นปริภูมิโนร์มแบบบริบูรณ์ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - p) = 0$

บทนิยาม 2.24 ปริภูมิผลคูณภายใน H จะถูกเรียกว่า **ปริภูมิฮิลเบิร์ต** (Hilbert spaces) ถ้า H เป็นปริภูมิบริบูรณ์ (complete spaces)

บทนิยาม 2.25 ปริภูมิโนร์มแบบเอกรูป (uniformly convex space) คือ ปริภูมิเวกเตอร์โนร์ม ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ ถ้าสำหรับทุก $0 < \epsilon \leq 2$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$ สำหรับทุก $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ และ $\|x - y\| \geq \epsilon$

บทนิยาม 2.26 จะกล่าวว่า E เป็นปริภูมิที่สอดคล้องเงื่อนไขโอเพียล (Opial's condition) ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ ใน E ลู่เข้าสู่แบบอ่อนสู่ x แล้ว

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

สำหรับทุก $y \in E$ ที่ $y \neq x$

บทนิยาม 2.27 การส่งแบบหลายค่า $T : K \rightarrow P(K)$ จะเรียกว่า เดมิโคลส (Demiclosed) ที่ $y \in K$ ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ ใน K ลู่เข้าสู่แบบอ่อนสู่ x และลำดับ $\{y_n\}$ ใน Tx_n ลู่เข้าสู่แบบเข้มสู่ y แล้ว $y \in Tx$

บทนิยาม 2.28 การส่งแบบไม่ขยายหลายค่า $T : K \rightarrow CB(K)$ โดยที่ K เป็นเซตย่อยของ E จะกล่าวว่าเป็นไปตามเงื่อนไข (I) ถ้ามีฟังก์ชันไม่ลด $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ โดยที่ $f(0) = 0, f(r) > 0$ สำหรับทุก $r \in (0, \infty)$ แล้ว $d(x, Tx) \geq f(d(x, F(T)))$ สำหรับทุก $x \in K$

ทฤษฎีบท 2.29 [1] ให้ $T : K \rightarrow P(K)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า และ $P_T(x) = \{y \in Tx : \|x - y\| = d(x, Tx)\}$ แล้วข้อต่อไปนี้สมมูลกัน

$$(1) x \in F(T);$$

$$(2) P_T(x) = \{x\};$$

$$(3) x \in F(P_T)$$

นอกจากนี้ $F(T) = F(P_T)$

ทฤษฎีบท 2.30 ให้ E เป็นปริภูมิบานาคแบบเอกรูป และ $0 < p \leq t_n \leq q < 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับของ E โดยที่ $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq r, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq r$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n x_n + (1 - t_n) y_n\| = r$ สำหรับบาง $r \geq 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$

ทฤษฎีบท 2.31 ถ้า P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยายแล้ว $F(P_T)$ จะเป็นเซตปิด

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Results)

ในบทที่ 3 จะแบ่งออกเป็น 5 หัวข้อย่อยดังนี้ 3.1 ผลลัพธ์ที่จำเป็นในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบอ่อนและการลู่เข้าแบบเข้มของจุดตรึง 3.2 การลู่เข้าแบบอ่อนของลำดับ $\{x_n\}$ 3.3 การลู่เข้าแบบเข้มของลำดับ $\{x_n\}$ และเมื่อการส่งสอดคล้องเงื่อนไข (I) จะอธิบายในหัวข้อ 3.4 และตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทหลักจะให้ไว้ในหัวข้อ 3.5

3.1 ผลลัพธ์ที่จำเป็น

ในหัวข้อนี้จะพิสูจน์ผลลัพธ์ที่จำเป็นในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบอ่อนและการลู่เข้าแบบเข้มของจุดตรึง

บทตั้ง 3.1 [1] ให้ E เป็นปริภูมิโนอร์ม และ K เป็นเซตย่อยนูนปิดที่มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และให้ $T : K \rightarrow P(K)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า โดยที่ $F(T) \neq \emptyset$ และ P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่นิยามใน (1.2) แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ หาค่าได้ สำหรับทุก $p \in F(T)$

พิสูจน์. ให้ $p \in F(T)$ จากบทตั้ง 2.29 จะได้ว่า $p \in P_T(p) = \{p\}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad \|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \lambda) v_n + \lambda u_n - p\| \\ &= \|(1 - \lambda) v_n + \lambda p - p + \lambda u_n - \lambda p\| \\ &= \|(1 - \lambda) v_n - p(1 - \lambda) + \lambda(u_n - p)\| \\ &= \|(1 - \lambda)(v_n - p) + \lambda(u_n - p)\| \\ &\leq \|(1 - \lambda)(v_n - p)\| + \|\lambda(u_n - p)\| \\ &\leq (1 - \lambda) \|v_n - p\| + \lambda \|u_n - p\| \\ &\leq (1 - \lambda) H(P_T(x_n), P_T(p)) + \lambda H(P_T(y_n), P_T(p)) \\ &\leq (1 - \lambda) \|x_n - p\| + \lambda \|y_n - p\| \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

แต่

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|(1 - \eta)x_n + \eta v_n - p\| \\
&= \|(1 - \eta)x_n + \eta p - p + \eta v_n - \eta p\| \\
&= \|(1 - \eta)x_n - (1 - \eta)p + \eta(v_n - p)\| \\
&= \|(1 - \eta)(x_n - p) + \eta(v_n - p)\| \\
&\leq \|(1 - \eta)(x_n - p)\| + \|\eta(v_n - p)\| \\
&\leq (1 - \eta)\|x_n - p\| + \eta\|v_n - p\| \\
&\leq (1 - \eta)\|x_n - p\| + \eta H(P_T(x_n), P_T(p)) \\
&\leq (1 - \eta)\|x_n - p\| + \eta\|x_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

จาก (3.1.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \lambda)\|x_n - p\| + \lambda\|y_n - p\| \\
&\leq (1 - \lambda)\|x_n - p\| + \lambda\|x_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{\|x_n - p\|\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มและมีขอบเขตล่างคือ 0 โดย **ทฤษฎีบท 2.11 ข้อ 2**

จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ หาค่าได้ สำหรับทุก $p \in F(T)$

□

บทตั้ง 3.2 [1] ให้ E เป็นปริภูมิบานาคแบบเอกรูป และ K เป็นเซตย่อยนูนปิดที่มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และ ให้ $T : K \rightarrow P(K)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า โดยที่ $F(T) \neq \emptyset$ และ P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยให้ $\{x_n\}$ เป็น ลำดับที่นิยามใน (1.2) แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$

พิสูจน์. ให้ $p \in F(T)$ จาก **บทตั้ง 3.1** ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ หาค่าได้ กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$ สำหรับบาง $c \geq 0$

เนื่องจาก

$$\|v_n - p\| \leq H(P_T(x_n), P_T(p)) \leq \|x_n - p\|$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} H(P_T(x_n), P_T(p)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$$

ฉะนั้น

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| \leq c \quad (3.2.1)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\|u_n - p\| \leq H(P_T(y_n), P_T(p)) \leq \|y_n - p\| \leq \|x_n - p\|$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} H(P_T(y_n), P_T(p)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$$

ฉะนั้น

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| \leq c \quad (3.2.2)$$

จาก (1.2) จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda(u_n - p) + (1 - \lambda)(v_n - p)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = c \quad (3.2.3)$$

จากอสมการ (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) และ ทฤษฎีบท 2.30 จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u_n\| = 0 \quad (3.2.4)$$

จากอสมการ (3.1.2) หาค่าลิมิตซูพีเรียร์ของอสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| &\leq c\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| = c$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \lambda)v_n + \lambda u_n - p\| \\ &= \|(v_n - p) + \lambda(u_n - v_n)\| \\ &\leq \|v_n - p\| + \lambda\|u_n - v_n\| \\ &\leq \|v_n - p\| + \|v_n - u_n\|\end{aligned}$$

จากอสมการ (3.2.4) จะได้

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| + \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u_n\| \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| + 0 \\ c = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| \\ c &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\|\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

จากอสมการ (3.2.1), (3.2.6) และ **ทฤษฎีบท 2.17** จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| = c$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = c$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\|v_n - p\| &\leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - p\| \\ &\leq \|v_n - u_n\| + H(P_T(y_n), P_T(p)) \\ &\leq \|v_n - u_n\| + \|y_n - p\| \\ c &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u_n\| + \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \\ &= 0 + \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\|\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \quad (3.2.7)$$

จากอสมการ (3.2.5), (3.2.7) และ **ทฤษฎีบท 2.17** จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = c$$

จาก

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \leq c, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| \leq c$$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta(v_n - p) + (1 - \eta)(x_n - p)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = c$$

โดยทฤษฎีบท 2.30 จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - v_n\| = 0 \quad (3.2.8)$$

เนื่องจาก $d(x_n, Tx_n) = \inf \{\|x_n - z\| : z \in Tx_n\}$ และ $v_n \in Tx_n$

จะได้ว่า $d(x_n, Tx_n) \leq \|x_n - v_n\|$

หาค่าลิมิตทั้งสองข้างของอสมการ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - v_n\| = 0$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) \leq 0 \quad (\text{จาก 3.2.8})$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

□

3.2 การลู่เข้าแบบอ่อนของลำดับ $\{x_n\}$

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ E เป็นปริภูมิบานาคแบบเอกรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขโอเพียล (Opial's condition) และ K เป็นเซตย่อยนูนปิดที่มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และให้ $T : K \rightarrow P(K)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า โดยที่ $F(T) \neq \emptyset$ และ P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่นิยามใน (1.2) ถ้า $I - P_T$ เป็นเดมิโคลส (Demiclosed) ที่จุด $x = 0$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงของ T

พิสูจน์. ให้ $p \in F(T)$ โดยทฤษฎีบท 2.29 จะได้ว่า $p \in F(P_T)$ จากบทตั้ง 3.1 ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ หาค่าได้

ต่อมาจะต้องการพิสูจน์ว่า ลำดับย่อยลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $F(T)$ เพียงจุดเดียว

ให้ z_1 และ z_2 เป็นลิมิตของลำดับย่อย $\{x_{n_i}\}$ และ $\{x_{n_j}\}$ ของ $\{x_n\}$ ตามลำดับ

จาก (3.2.8) มี $v_n \in Tx_n$ ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - v_n\| = 0$

จาก $I - P_T$ เป็นเดมิโคลส ที่จุด 0 จะได้ว่า

$$0 \in (I - P_T)z_1$$

$$0 \in Iz_1 - P_Tz_1$$

$$0 = z_1 - y, \exists y \in P_Tz_1$$

$$z_1 = y, \exists y \in P_Tz_1$$

$$z_1 \in P_Tz_1$$

ดังนั้น $z_1 \in P_Tz_1$ และทำให้ได้ว่า $z_1 \in F(P_T) = F(T)$

ในทำนองเดียวกันจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $z_2 \in F(T)$

ต่อมาจะพิสูจน์การมีเพียงจุดเดียว ให้ $z_1 \neq z_2$ โดยเงื่อนไขโอเพียล

จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\| &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_1\| \\ &< \lim_{n_i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_2\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_2\| \end{aligned}$$

$$= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_2\|$$

$$< \lim_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_1\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\|$$

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $z_1 = z_2$ ดังนั้นทุกลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $z_1 \in F(T)$ โดยทฤษฎีบท 2.19

ลำดับ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $z_1 \in F(T)$ ด้วย ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $F(T)$ □

3.3 การลู่เข้าแบบเข้มของลำดับ $\{x_n\}$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ E เป็นปริภูมิบานาค และ K เป็นเซตย่อยนูนปิดที่มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และให้ $T : K \rightarrow P(K)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า โดยที่ $F(T) \neq \emptyset$ และ P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่

นิยามใน (1.2) ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดใน $F(T)$ ก็ต่อเมื่อ $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$

พิสูจน์. $(\rightarrow)$ ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดใน $F(T)$ แล้ว $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$

ให้ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ $p \in F(T)$ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$

จาก

$$d(x_n, F(T)) \leq \|x_n - p\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$$

ดังนั้น

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$$

$(\leftarrow)$ ถ้า $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ แล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดใน $F(T)$

ให้ $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ จากบทตั้ง 3.1 ได้ว่า

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\| \quad , p \in F(T)$$

$$\inf_{p \in F(T)} \|x_{n+1} - p\| \leq \inf_{p \in F(T)} \|x_n - p\|$$

$$d(x_{n+1}, F(T)) \leq d(x_n, F(T))$$

ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T))$ หาค่าได้ และ $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$

จึงได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$

ต่อมาจะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคซีใน K

ให้ $\epsilon > 0$ จาก $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ มี $n_0 \in \mathbb{N}$ สำหรับทุก $n \geq n_0$

ซึ่ง $d(x_n, F(T)) < \frac{\epsilon}{4}$

ได้ว่า $\inf \{ \|x_{n_0} - p\| : p \in F(T) \} < \frac{\epsilon}{4}$ แสดงว่ามี $p^* \in F(T)$ โดย $\|x_{n_0} - p^*\| < \frac{\epsilon}{2}$

ต้องการพิสูจน์ $\|x_m - x_n\| < \epsilon$

จาก $m, n \geq n_0$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|x_m - p^* + p^* - x_n\| \\ &\leq \|x_m - p^*\| + \|x_n - p^*\| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\ &= \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคซี ในเซตย่อยปิด K ของปริภูมิบานาค E จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ $q \in K$

ต่อมาจะแสดงว่า $q \in F(T)$

$$\|q - a\| \leq \|q - x_n\| + \|x_n - y\| + \|y - a\|, \forall a \in P_T(q), \forall y \in P_T(x_n)$$

$$\inf_{y \in P_T x_n} \|q - a\| \leq \inf_{y \in P_T x_n} \|q - x_n\| + \inf_{y \in P_T x_n} \|x_n - y\| + \inf_{y \in P_T x_n} \|y - a\|$$

$$\|q - a\| \leq \|q - x_n\| + d(x_n, P_T x_n) + d(a, P_T x_n)$$

$$\inf_{a \in P_T q} \|q - a\| \leq \|q - x_n\| + d(x_n, P_T x_n) + \inf_{a \in P_T q} d(a, P_T x_n)$$

$$d(q, P_T q) \leq \|q - x_n\| + d(x_n, P_T x_n) + \sup_{a \in P_T q} d(a, P_T x_n)$$

$$d(q, P_T q) \leq \|x_n - q\| + d(x_n, P_T x_n) + H(P_T x_n, P_T q)$$

$$\leq \|x_n - q\| + \|x_n - v_n\| + \|x_n - q\|$$

ให้ $n \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $d(q, P_T q) = 0$ แต่ว่า P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย แล้ว $F(P_T)$ เป็นเซตปิด

ดังนั้น $q \in F(P_T) = F(T)$

□

3.4 การส่งที่สอดคล้องเงื่อนไข (I)

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ E เป็นปริภูมิบานาคแบบเอกรูป และ K เป็นเซตย่อยนูนปิด มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และ ให้ $T : K \rightarrow P(K)$ เป็นการส่งแบบหลายค่าที่สอดคล้องเงื่อนไข (I) โดยที่ $F(T) \neq \emptyset$ และ P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่นิยามใน (1.2) แล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดใน $F(T)$

พิสูจน์. สมมติให้ $p \in F(T)$ จาก บทตั้ง 3.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ หาค่าได้ ให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$ สำหรับบาง $c \geq 0$

กรณีที่ 1 ถ้า $c = 0$ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 2.23 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - p) = 0$

จึงได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$$

กรณีที่ 2 ถ้า $c > 0$ ซึ่ง

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$$

$$\inf_{p \in F(T)} \|x_{n+1} - p\| \leq \inf_{p \in F(T)} \|x_n - p\|$$

จึงได้ว่า

$$d(x_{n+1}, F(T)) \leq d(x_n, F(T)) \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) \text{ หาค่าได้}$$

จากเงื่อนไข (I) และ บทตั้ง 3.2 จะได้

$$f(d(x_n, F(T))) \leq d(x_n, Tx_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F(T))) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F(T))) = 0$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันไม่ลด และ $f(0) = 0$ จึงได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$

ดังนั้นจาก ทฤษฎีบท 3.4 ได้ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดใน $F(T)$ □

3.5 ตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.4

ให้ $E = \mathbb{R}$ ภายใต้ปริภูมิบานาค และ $K = [0, 100]$ เป็นเซตย่อยนูนปิด มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และให้ $T : K \rightarrow P(K)$ กำหนดโดย

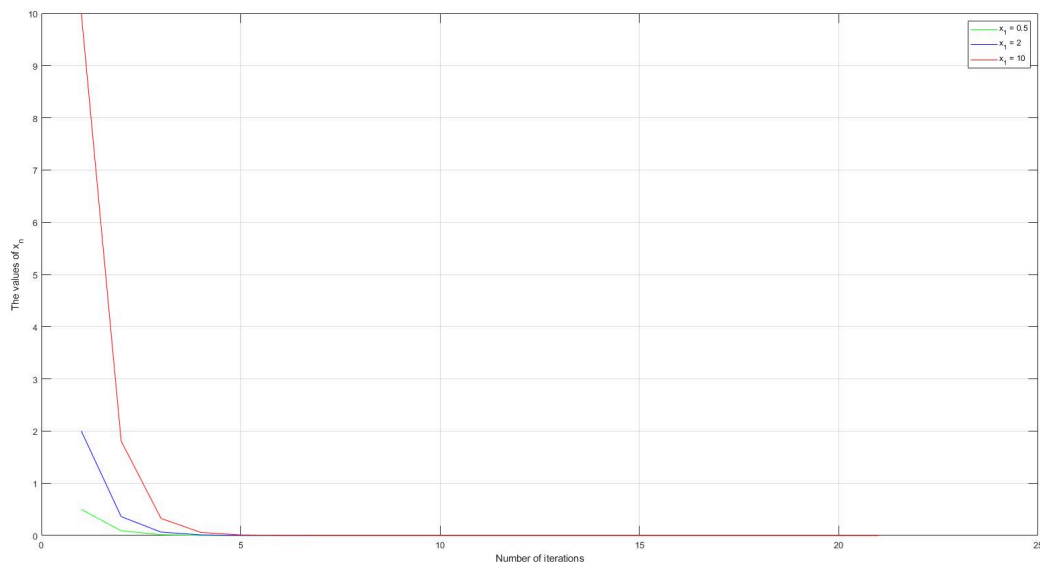
$$T(x) = \left[0, \frac{x}{5}\right], \forall x \in K$$

จะได้ $F(T) = \{0\} \neq \emptyset$, กำหนดให้ $P_T(x) = \{y \in Tx : \|x - y\| = d(x, Tx)\} = \frac{x}{5}$ และ $x, y \in K$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \|P_T(x) - P_T(y)\| &= \left\| \frac{x}{5} - \frac{y}{5} \right\| \\ &= \left\| \frac{x - y}{5} \right\| \\ &= \frac{1}{5} \|x - y\| \end{aligned}$$

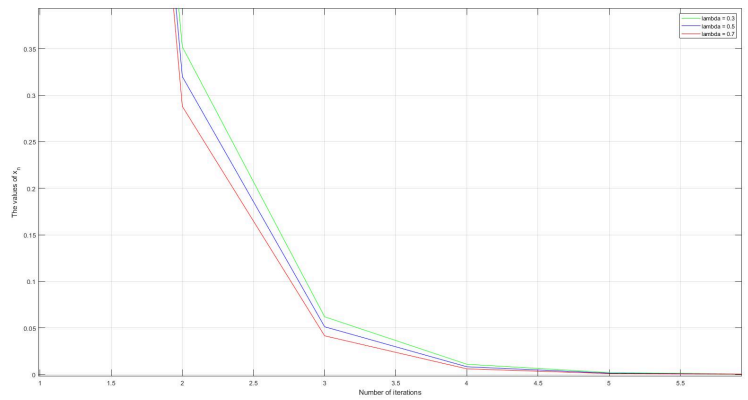
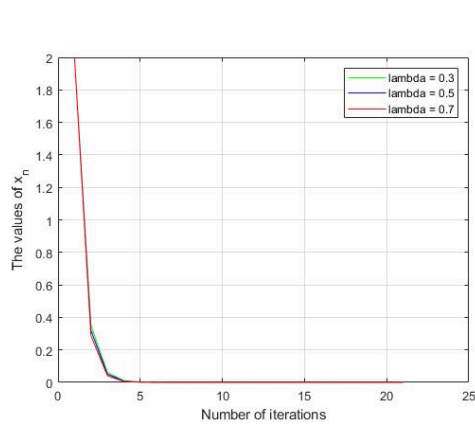
จะได้ว่า $\|P_T(x) - P_T(y)\| \leq \|x - y\|$ นั่นคือ P_T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขในทฤษฎีบท 3.4 เราได้นำเสนอการทดสอบลู่อู่เข้าในเชิงตัวเลข ในการทดสอบแรก กำหนดให้ $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_1 = 10$ โดยวิธีทำซ้ำ ลำดับที่นิยามใน (1.2) โดย $\lambda = 0.3$, $\eta = 0.4$ เพื่อสังเกตการลู่อู่เข้าของลำดับที่นิยามใน (1.2) ผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1:

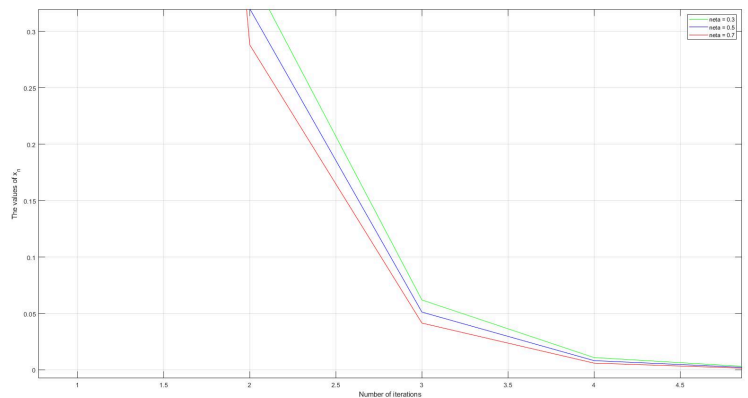
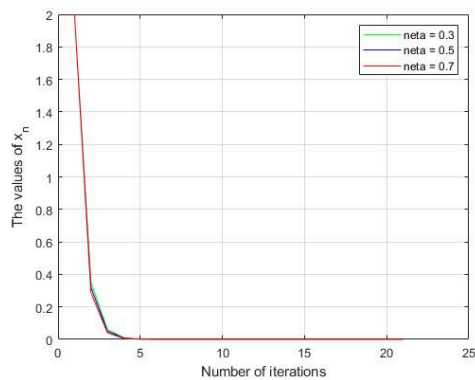
จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าที่ $x_1 = \frac{1}{2}$ จะลู่อู่เข้าสู่จุดตรึงเร็วที่สุด

ในการทดสอบครั้งที่ 2 เลือก $x_1 = 2$ โดย $\lambda = 0.3, \lambda = 0.5, \lambda = 0.7$ และ $\eta = 0.5$ ผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 3.2 ในการทดสอบครั้งที่ 3 เลือก $x_1 = 2$ โดย $\lambda = 0.5$ และ $\eta = 0.3, \eta = 0.5, \eta = 0.7$ ผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.2:

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าที่ $\lambda = 0.7$ ลำดับจะเข้าสู่จุดตรึงเร็วที่สุด



รูปที่ 3.3:

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่าที่ $\eta = 0.7$ ลำดับจะเข้าสู่จุดตรึงเร็วที่สุด เห็นได้ชัดว่า ลำดับที่นิยามใน (1.2) เข้าสู่ 0 และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาจุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค ได้แสดงให้เห็นว่า การประมาณค่าจุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่าที่นิยามบนเซตนูนปิดที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่างในปริภูมิบานาค โดยใช้วิธีการทำซ้ำในปริภูมิบานาค (1.2) ถ้าเพิ่มเงื่อนไขโอเพียลและเดมิโคลส แล้วลำดับ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึง (ทฤษฎีบท 3.3) และเมื่อ เพิ่มเงื่อนไข (I) (ทฤษฎีบท 3.5) แล้วลำดับ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึง นอกจากนี้เรายังยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีหลักอีกด้วย

บรรณานุกรม

- [1] Khan, SH; Yildirim, I : Fixed Point Theory and Applications 2012, 2012:73
- [2] Markin, JT: Continuous dependence of fixed point sets. Proc Am Math Soc. 38, 545–547 (1973)
- [3] Gorniewicz, L: Topological fixed point theory of multivalued mappings. Kluwer Academic Pub., Dordrecht, Netherlands
- [4] Lim, TC: A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach spaces. Bull Am Math Soc. 80, 1123–1126 (1974)
- [5] Agarwal, RP, O'Regan, D, Sahu, DR: Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. J Nonlinear Convex Anal. 8(1):61-79 (2007)

ภาคผนวก A

โปสเตอร์

Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Banach spaces

Mr. Phuwadon Kongkam
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Narawadee Phudolsitthiphat
Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



Abstract

The fixed points problem of multivalued mappings is a topic that has been studied very intensively by numerous researchers because it can be applied to solve many problems such as control theory, convex optimization, and economics. In this independent study, we study the approximation fixed points of multivalued mappings from Khan and Yildirim's research [1]. The authors used an idea from Shahzad and Zegeye to remove a "strong condition" on the mapping involved in the iteration scheme and to prove the weak convergence theorem and strong convergence theorem of multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces. Moreover, we give an example to support the main theorem.

Introduction

Let E be a real Banach space. A subset K is called proximal if for each $x \in E$, there exists an element $k \in K$ such that

$$d(x, k) = \inf\{\|x - y\| : y \in K\} = d(x, K).$$

Let $P(K)$ be nonempty bounded proximal subsets of K and $CB(K)$ be the class of all nonempty bounded and closed subsets of K .

In 2012, Khan and Yildirim [1], they defined iteration scheme as follows:

$$\begin{cases} x_n \in K, \\ x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda u_n, \\ y_n = (1-\eta)x_n + \eta v_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.2)$$

where $v_n \in P(x_n)$, $u_n \in P(y_n)$ and $0 < \lambda, \eta < 1$ and $P(x) = \{y \in Tx : \|x - y\| = d(x, Tx)\}$.

A point $x \in K$ is called a fixed point of T if $x = Tx$ and $F(T)$ is set of all the fixed points of T .

We study is interested in approximation of the fixed point of nonexpansive mappings in Banach spaces. Moreover, we give an example to support the main theorem.

Definition 1: Opial's condition

A Banach space E is said to satisfy Opial's condition if for any sequence $\{x_n\}$ in E , $x_n \rightharpoonup x$ implies that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

for all $y \in E$ with $y \neq x$.

Definition 2: Demiclosed

A multivalued mapping $T: K \rightarrow P(E)$ is called demiclosed at $y \in K$ if for any sequence $\{x_n\}$ in K weakly convergent to an element x and $y_n \in Tx_n$, strongly convergent to y , we have $y \in Tx$.

Definition 3: condition (I)

A multivalued nonexpansive mapping $T: K \rightarrow CB(K)$ where K a subset of E , is said to satisfy condition (I) if there exists a nondecreasing function $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ with $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ for all $r \in (0, \infty)$ such that $d(x, Tx) \geq f(d(x, F(T)))$ for all $x \in K$.

Results

Lemma 1: [1] Main Results

Let E be a normed space and K a nonempty closed convex subset of E . Let $T: K \rightarrow P(K)$ be a multivalued mapping such that $F(T) \neq \emptyset$ and P is a nonexpansive mapping. Let $\{x_n\}$ be the sequence as defined in (1.2). Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ exists for all $p \in F(T)$.

Lemma 2: [1] Main Results

Let E be a uniformly convex Banach space and K be a nonempty closed convex subset of E . Let $T: K \rightarrow P(K)$ be a multivalued mapping such that $F(T) \neq \emptyset$ and P is a nonexpansive mapping. Let $\{x_n\}$ be the sequence as defined in (1.2). Then $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

Theorem 1: $\{x_n\}$ converges weakly

Let E be a uniformly convex Banach space satisfying Opial's condition and K a nonempty closed convex subset of E . Let $T: K \rightarrow P(K)$ be a multivalued mapping such that $F(T) \neq \emptyset$ and P is a nonexpansive mapping. Let $\{x_n\}$ be the sequence as defined in (1.2). Let $I - P$ be demiclosed with respect to zero, then $\{x_n\}$ converges weakly to a fixed point of T .

Theorem 2: $\{x_n\}$ converges strongly

Let E be a real Banach space and K a nonempty closed convex subset of E . Let $T: K \rightarrow P(K)$ be a multivalued mapping such that $F(T) \neq \emptyset$ and P is a nonexpansive mapping. Let $\{x_n\}$ be the sequence as defined in (1.2), then $\{x_n\}$ converges strongly to a point of $F(T)$ if and only if $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$.

Theorem 3: multivalued mapping satisfying condition (I)

Let E be a uniformly convex Banach space and K a nonempty closed convex subset of E . Let $T: K \rightarrow P(K)$ be a multivalued mapping satisfying condition (I) such that $F(T) \neq \emptyset$ and P is a nonexpansive mapping. Let $\{x_n\}$ be the sequence as defined in (1.2), then $\{x_n\}$ converges strongly to a point of $F(T)$.

Example satisfy theorem 2

Let $E = (R, \|\cdot\|)$ and $K = [0, 100]$. Then, K is nonempty closed convex subset of E . Let $T(x) = [0, \frac{x}{2}]$ for all $x \in K$. It can be seen that $F(T) = \{0\}$, $P(x) = [0, \frac{x}{2}]$ and $x, y \in K$ and P is a nonexpansive mapping.

Frist, let $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, $\lambda = 0.3$, $\eta = 0.4$ by iteration scheme $\{x_n\}$ as defined in (1.2), the result is shown in Figure 1.



Figure 1

Second, let $x_0 = 2$, $\lambda = 0.3$, $\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.7$, $\eta = 0.5$, the result is shown in Figure 2. Third, let $x_0 = 2$, $\lambda = 0.5$, $\eta = 0.3$, $\eta = 0.5$, $\eta = 0.7$, the result is shown in Figure 3.

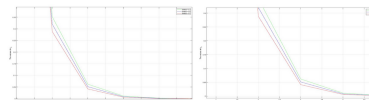


Figure 2

Figure 3

From Figure 1, it can be seen that at $x_2 = 10$, the sequence converges faster than other points. From Figure 2, it can be seen that at $\lambda = 0.7$, the sequence converges faster than other points. From Figure 3, it can be seen that at $\eta = 0.7$, the sequence converges faster than other points. Then $\{x_n\}$ converges to a point of $F(T)$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$.

Conclusion

We study the proof of the weak convergence theorem with Opial's condition and demiclosed (Theorem 1), a strong convergence theorem with condition (I) (Theorem 3) of multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces. Moreover, we give an example to support the main theorem.

Reference

- [1] Khan, Sh, Yildirim, I : Fixed Point Theory and Applications 2012, 2012:73
- [2] Meiri, IT: Continuous dependence of fixed point sets. Proc Am Math Soc. 38, 545-547 (1973)
- [3] Gorniewicz, L: Topological fixed point theory of multivalued mappings. Kluwer Academic Pub., Dordrecht, Netherlands
- [4] Lim, TC: A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach spaces. Bull Am Math Soc. 80, 1123-1126 (1974)
- [5] Agarwal, RP, O'Regan, D, Sahu, DR: Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. J Nonlinear Convex Anal. 8(116): 79 (2007)