เซตโดมิเนติงของกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร

(Dominating sets of P_3 – amalgamations of m copies of C_n)

นาย นำพล พิพัฒน์ศาสตร์

รหัส 580510529

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

เซตโดมิเนติงของกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร

(Dominating sets of P_3 – amalgamations of m copies of C_n)

ได้รับการพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

สายัญ ปันมา ประธานกรรมการ

(รศ. ดร.สายัญ ปันมา)

ปรียานุช โหนแหยม. กรรมการ

(ผศ. ดร.ปรียานุช โหนแหยม)

วันที่ 21 เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2565

เซตโดมิเนติงของกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร

(Dominating sets of P_3 – amalgamations of m copies of C_n)

นายนำพล พิพัฒน์ศาสตร์

รหัส 580510529

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตสาขาคณิตศาสตร์ ของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง เซตโดมิเนติงของกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร c_n m วัฏจักร

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ รศ. ดร.สายัญ ปันมา ประธานกรรมการสอบ ในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระ คอยให้คำปรึกษา อธิบายให้ความรู้ คำแนะนำเกี่ยวกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องของการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จ ตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ ผศ. ดร.ปรียานุช โหนแหยม กรรมการสอบที่ได้ให้คำแนะนำพิจารณาและตรวจสอบความถูกต้อง ในการค้นคว้าอิสระให้มีความสำเร็จลุล่วงเรียบร้อย

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่มิได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ ให้การช่วยเหลือ และเป็นกำลังใจ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

หากงานค้นคว้าอิสระนี้ได้รับการชื่นชมยินดี หรือเป็นคุณประโยชน์ในการใดๆ ขอมอบสิ่งนั้นเป็นเกียรติยศและเป็นกุศล แด่ บิดา มารดา อาจารย์ที่ปรึกษา คณาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน หากมีความผิดพลาดประการใด ผู้ค้นคว้าขอน้อมรับไว้แต่เพียงผู้เดียว

นำพล พิพัฒน์ศาสตร์

หัวข้อ (ไทย) เซตโดมิเนติงของกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร

(English) (Dominating sets of P_3 – amalgamations of m copies of C_n)

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นายนำพล พิพัฒน์ศาสตร์ รหัสนักศึกษา 580510529

ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา รศ. ดร.สายัญ ปันมา

ชื่อกรรมการสอบ ผศ. ดร.ปรียานุช โหนแหยม

บทคัดย่อ

ให้ S เป็นเซตย่อยของเซตของจุดในกราฟ G จะเรียก S ว่า **เซตโดมิเนติง** ของ G ถ้าทุกจุดใน $V(G)-S$ ประชิดกับบางจุดใน S ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาการหาเซตโดมิเนติงของ**กราฟการรวมวิถี** P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร สำหรับ $n,m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \geq 4$

Abstract

A subset S of vertices in a graph G is a dominating set if every vertex in $V(G)-S$ is adjacent to some vertices in S. In this independent study, we discuss the dominating sets of a P_3- amalgamations of m copies of C_n for all $n,m \in \mathbb{N}$ such that $n \geq 4$.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	1
บทคัดย่อ	2
บทที่ 1 บทนำ	4
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน	5
บทที่ 3 ผลการศึกษา	14
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา	38
เอกสารอ้างอิง	41

บทที่ 1

บทนำ

ให้ $G=(V(G),E(G))$ เป็นกราฟ และ $S\subseteq V(G)$ จะเรียกเซต S **ว่าเซตโดมิเนติง (dominating sets)** ของ G ถ้าแต่ละ $v\in V(G)-S$ มี $x\in S$ ซึ่ง $\{x,v\}\in E(G)$ กำหนดให้ **จำนวนโดมิเนชัน (domination number)** ของ G แทนด้วยสัญลักษณ์ $\gamma(G)$ คือ **จำนวนเชิงการ-นับ (cardinal number)** ที่น้อยที่สุดของเซตโดมิเนติงของ G นั่นคือ $\gamma(G)=\min\{|S| \mid S$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G\}$ การศึกษาจำนวนโดมิเนชันเริ่มขึ้นโดย Berge ในปี ค.ศ.1958 แต่ยังไม่เป็นที่แพร่หลายจนใน ปี ค.ศ.1977 Cockayne และ Hedetniemi [2] ได้เสนอบทความเรื่อง Towards a theory of domination in graphs ทำให้จำนวนโดมิเนชันมีการศึกษาอย่างแพร่หลาย หลังจากนั้นใน ปี ค.ศ. 1998 Haynes, Hedetniemi และ Slater [3] ได้แต่งหนังสือชื่อ Fundamentals of Domination in Graphs ทำให้หลัง จากนั้นมีการเสนอบทความเกี่ยวกับจำนวนโดมิเนชันมากกว่า 2,000 บทความ ในการหาจำนวนนวนโดมิเนชันของกราฟ เราจะต้องหาเซตโดมิเนติงที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดของกราฟ ดังนั้นเราจึงสนใจที่จะหาเซตโดมิเนติงของกราฟเชิงเดียวที่เป็นการดำเนินการของกราฟเชิงเดียวที่กำหนด ให้ซึ่งมีนิยามดังนี้

ให้ $n,m\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n\geq 4$ และให้ $C_n^1,C_n^2,C_n^3,\ldots,C_n^m$ เป็นวัฏจักรความยาว n โดยที่

$V\left(C_n^i\right)=\{1_i,2_i,3_i,\ldots,n_i\}$ สำหรับทุก $i=1,2,3,\ldots,m$

$E(C_n^i)=\{\{k_i,(k+1)_i\} \mid k=1,2,3,\ldots,n-1\}\cup\{\{n_i,1_i\}\}$ สำหรับทุก $i=1,2,3,\ldots,m$

$$V(C_n^i)\cap V(C_n^{i+1})=\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i=n_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i=(n-1)_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i=(n-2)_{i+1}\right\}$$

$$E(C_n^i)\cap E(C_n^{i+1})=\left\{\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i,\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i\right\}=\left\{n_{i+1},(n-1)_{i+1}\right\},\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i,\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i\right\}=\left\{(n-1)_{i+1},(n-2)_{i+1}\right\}\right\}$$

สำหรับ $i=1,2,3,\ldots,m-1$

กำหนด **กราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร (**P_3- amalgamations of m copies of C_n) คือกราฟที่มีเซตของจุดเป็น $\bigcup_{i=1}^{m}V(C_n^i)$ และเซตของเส้นคือ $\bigcup_{i=1}^{m}E(C_n^i)$

เขียนแทนด้วย $\bigcup_{i=1}^{m}C_n^i\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i=n_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i=(n-1)_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i=(n-2)_{i+1}\right\}$

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาและหาเซตโดมิเนติงของกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะให้นิยามและตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาการค้นคว้าอิสระนี้

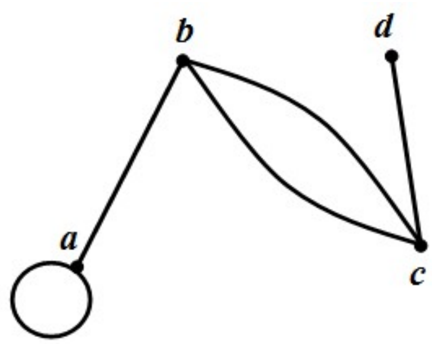
<u>บทนิยาม 2.1</u>: **กราฟ (graph)** ประกอบไปด้วยเซตของจุด $V(G)$ และเซตของเส้น $E(G)$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียกสมาชิกใน $V(G)$ ว่า **จุด (vertex)** และ $E(G)$ เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิกเป็นคู่ไม่อันดับของสมาชิกใน $V(G)$ ซึ่งสมาชิกของ $E(G)$ เรียกว่า **เส้น (edge)**

<u>ตัวอย่าง 2.1:</u> ให้ G เป็นกราฟซึ่งกำหนดโดย

$$V(G)=\{a,b,c,d\}$$

และ $$E(G)=\{\{a,a\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,c\},\{c,d\}\}$$

ดังนั้นกราฟ G ที่กำหนดให้จะแทนด้วยแผนภาพดังรูป



รูปที่ 1

<u>บทนิยาม 2.2</u>: **วงวน (loop)** คือ เส้นที่เชื่อมเพียงจุดเดียว

จากตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่า $\{a,a\}$ เป็นวงวน

<u>บทนิยาม 2.3</u>: **เส้นซ้อน (multiple edge)** คือ เส้นที่มีมากกว่าหนึ่งเส้นซึ่งเชื่อมจุดคู่เดียวกัน

จากตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่า $\{b,c\}$ เป็นเส้นซ้อน

<u>บทนิยาม 2.4</u>: **กราฟเชิงเดียว (simple graph)** คือ กราฟที่ไม่มีเส้นซ้อนและไม่มีวงวน

จากตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่ากราฟ G ไม่เป็นกราฟเชิงเดียว

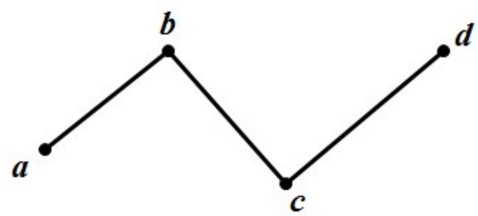
<u>บทนิยาม 2.5</u>: ถ้าจุด a และจุด b ของกราฟมีเส้น $\{a,b\}$ เป็นเส้นเชื่อมแล้วจะเรียก a หรือ b ว่าเป็น **จุดตกกระทบ (incident)** กับเส้น $\{a,b\}$ หรือเส้น $\{a,b\}$ ตกกระทบกับจุด a และจุด b

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทนเส้น $\{a,b\}$ ด้วยสัญลักษณ์ ab

จากตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่า จุด d ตกกระทบกับเส้น cd

<u>บทนิยาม 2.6</u>: จะเรียกจุด a และจุด b ของกราฟว่าเป็น **จุดประชิดกัน (adjacent vertices)** ถ้ามีเส้นเชื่อมระหว่างจุด a กับจุด b และจะเรียกเส้น e_1 และเส้น e_2 ของกราฟว่าเป็น **เส้นประชิดกัน (adjacent edges)** ถ้ามีจุดหนึ่งจุดที่ตกกระทบกับเส้น e_1 และเส้น e_2

<u>ตัวอย่าง 2.2:</u>



รูปที่ 2

จากตัวอย่าง 2.2 จะได้ว่า จุด a และจุด b เป็นจุดประชิดกัน จุด b และจุด c เป็นจุดประชิดกัน จุด c และจุด d เป็นจุดประชิดกัน และจะได้ว่าเส้น ab และเส้น bc เป็นเส้นประชิดกัน เส้น bc และเส้น cd เป็นเส้นประชิดกัน

<u>บทนิยาม 2.7</u>: ให้ G เป็นกราฟ และ a เป็นจุดใน G จะเรียกจำนวนเส้นของกราฟที่ตกกระทบกับจุด a ว่า **ดีกรี (degree)** ของจุด a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $d(a)$ หรือ $d_G(a)$

<u>หมายเหตุ</u>: ถ้าจุด v มีเส้นที่ตกกระทบเป็นวงวนแล้วการหาดีกรีของจุด v จะนับจำนวนเส้นที่เกิดจากวงวนเป็นสองเส้น

จากตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่า $d_G(a)=3, d_G(b)=3, d_G(c)=3, d_G(d)=1$

<u>บทนิยาม 2.8</u>: **แนวเดิน (walk)** คือลำดับจำกัดของจุดสลับกับเส้นที่เริ่มต้นและสิ้นสุดด้วยจุด โดยเส้นแต่ละเส้นตกกระทบกับจุดก่อนหน้าและจุดตามหลังที่อยู่ถัดกัน

รอยเดิน (trail) คือแนวเดินที่เส้นทุกเส้นแตกต่างกัน

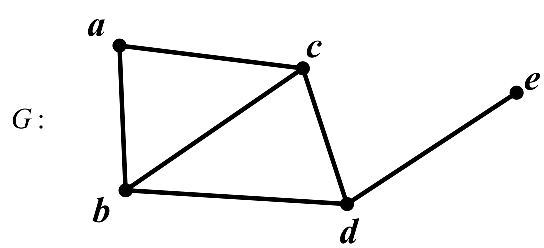
วิถี (path) คือแนวเดินที่จุดทุกจุดแตกต่างกัน กำหนดให้ P_n คือวิถีที่มี n จุด

รอยเดินปิด (closed trail) หรือ **วงจร (circuit)** คือรอยเดินที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

วัฏจักร (cycle) คือวงจรที่ไม่มีจุดใดปรากฏมากกว่า 1 ครั้ง ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด
วัฏจักร C_n (cycle of order n) หรือวัฏจักรความยาว n คือวัฏจักรที่มีเส้น n เส้น (n จุด)
วัฏจักรคู่ (even cycle) คือวัฏจักรที่มีจุดเป็นจำนวนคู่
วัฏจักรคี่ (odd cycle) คือวัฏจักรที่มีจุดเป็นจำนวนคี่

<u>หมายเหตุ</u>: เขียนแทนแนวเดิน $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_n$ ด้วย $v_1v_2v_3\cdots v_n$

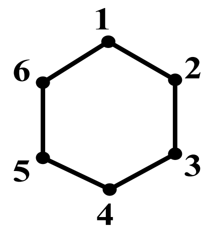
<u>ตัวอย่าง 2.3</u>
ให้ G เป็นกราฟ ดังรูป



รูปที่ 3

จะได้ว่า กราฟ $abcde$ เป็นรอยเดินและวิถี
กราฟ $abcbd$ เป็นแนวเดิน
กราฟ $bcdba$ เป็นรอยเดิน
กราฟ $abca$ เป็นวัฏจักรคี่ความยาว 3

<u>ตัวอย่าง 2.4:</u> รูปต่อไปนี้คือตัวอย่างของวัฏจักร C_6



รูปที่ 4

<u>บทนิยาม 2.9:</u> **ฟังก์ชันพื้น (floor function)** คือฟังก์ชันที่จับคู่จำนวนจริงไปยังจำนวนเต็มที่อยู่ก่อนหน้า นั่นคือ $floor(x)$ เป็นจำนวนเต็มมากที่สุดที่น้อยกว่า x สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$

<u>บทนิยาม 2.10:</u> ให้ $m \in \mathbb{N}$ สำหรับจำนวนเต็ม x และ y เราจะกล่าวว่า

x **คอนกรูเอนซ์**กับ y **มอดุโล** m (x is congruent to y modulo m) เขียนแทนด้วย $x \equiv y \pmod{m}$ ถ้า m หาร $x-y$ ลงตัว และถ้า m หาร $x-y$ ไม่ลงตัว เราจะกล่าวว่า x ไม่คอนกรูเอนซ์กับ y มอดุโล m เขียนแทนด้วย $x \not\equiv y \pmod{m}$

<u>ข้อสังเกต 2.1</u> ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 4$

1. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 0 \pmod{3}$ แล้ว $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ และ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \equiv 2 \pmod{3}$

2. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 1 \pmod{3}$ แล้ว $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ และ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \equiv 1 \pmod{3}$

3. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 2 \pmod{3}$ แล้ว $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ และ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

4. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 0 \pmod{3}$ แล้ว $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ และ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \equiv 1 \pmod{3}$

5. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 1 \pmod{3}$ แล้ว $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ และ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

6. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 2 \pmod{3}$ แล้ว $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ และ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \equiv 2 \pmod{3}$

พิสูจน์ 1. ให้ n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 0 \pmod{3}$

ดังนั้น $n = 2t+1$ และ $n = 3s$ สำหรับบาง $t, s \in \mathbb{N}$

จาก n เป็นจำนวนคี่ และ $n \geq 4$ จะได้ว่า s เป็นจำนวนคี่ และ $s \neq 1$

ดังนั้น $\dfrac{s-1}{2} \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $2t+1 = 3s$ จะได้ว่า

$$t = \frac{3s-1}{2} = \frac{3(s-1)+3-1}{2} = \frac{3(s-1)}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3(s-1)}{2} + 1$$

ดังนั้น $\quad t-1 = 3\left(\dfrac{s-1}{2}\right)$

นั่นคือ $$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2t+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor t + \frac{1}{2} \right\rfloor - 1 = t - 1 = 3\left(\frac{s-1}{2}\right)$$

ดังนั้น $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ และจะได้ว่า $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1 \equiv 2 \pmod{3}$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ข้อ 2. 3. 4. 5. และ 6. เป็นจริง □

<u>บทนิยาม 2.10:</u> ให้ $n, m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \geq 4$ และ ให้ $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^m$ เป็นวัฏจักรความยาว n โดยที่

$V\left(C_n^i\right) = \{1_i, 2_i, 3_i, \ldots, n_i\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

$E(C_n^i) = \{\{k_i, (k+1)_i\} \mid k = 1, 2, 3, \ldots, n-1\} \cup \{\{n_i, 1_i\}\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

$$V(C_n^i) \cap V(C_n^{i+1}) = \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_i = n_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i = (n-1)_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)_i = (n-2)_{i+1} \right\}$$

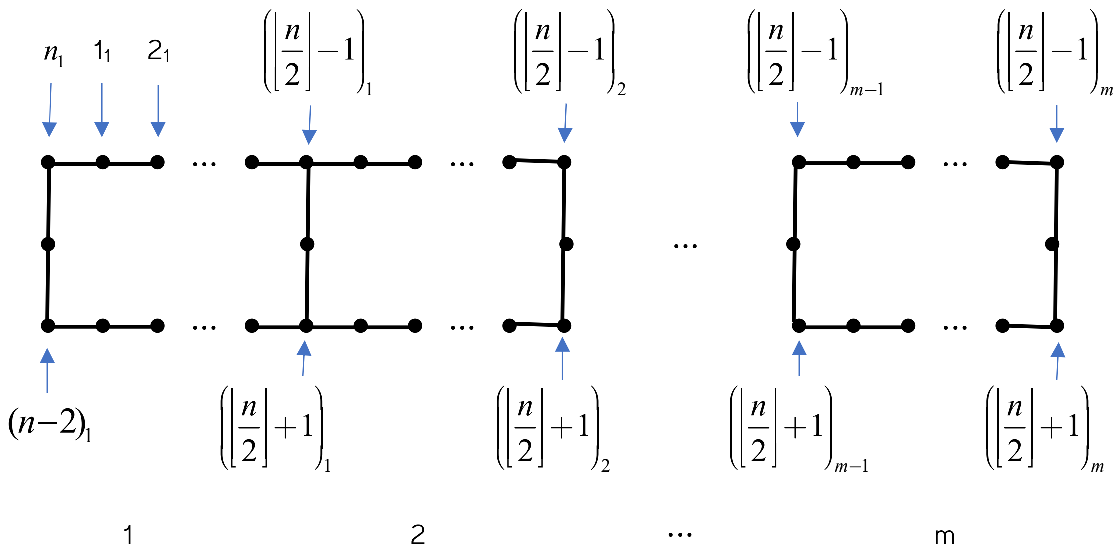
สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$

$$E(C_n^i) \cap E(C_n^{i+1}) = \left\{ \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_i, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i \right\} = \left\{ n_{i+1}, (n-1)_{i+1} \right\}, \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)_i \right\} = \left\{ (n-1)_{i+1}, (n-2)_{i+1} \right\} \right\}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$

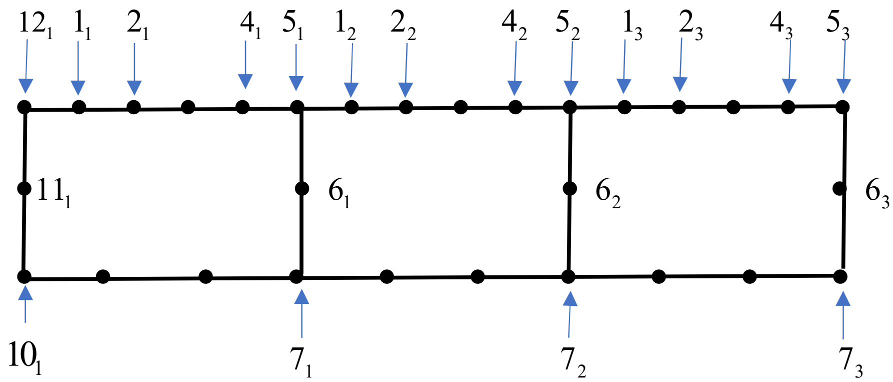
กำหนด **กราฟการรวมวิถี** P_3 **ของวัฏจักร** C_n m **วัฏจักร** คือกราฟที่มีเซตของจุดเป็น $\bigcup_{i=1}^{m} V(C_n^i)$ และเซตของเส้นคือ $\bigcup_{i=1}^{m} E(C_n^i)$

เขียนแทนด้วย $\bigcup_{i=1}^{m} C_n^i \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_i = n_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i = (n-1)_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)_i = (n-2)_{i+1} \right\}$



รูปที่ 5 $\bigcup_{i=1}^{m} C_n^i \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_i = n_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i = (n-1)_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)_i = (n-2)_{i+1} \right\}$

<u>ตัวอย่าง 2.5:</u> $\bigcup_{i=1}^{3} C_{12}^{i}\{5_i = 12_{i+1}, 6_i = 11_{i+1}, 7_i = 10_{i+1}\}$ คือกราฟที่มีเซตของจุดเป็น $\bigcup_{i=1}^{3} V(C_{12}^{i})$ และเซตของเส้นคือ $\bigcup_{i=1}^{3} E(C_{12}^{i})$



รูปที่ 6 $\bigcup_{i=1}^{3} C_{12}^{i}\{5_i = 12_{i+1}, 6_i = 11_{i+1}, 7_i = 10_{i+1}\}$

<u>บทนิยาม 2.11</u>: ให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟ และ $S \subseteq V(G)$ จะเรียกเซต S **ว่าเซตโดมิเนติง (dominating sets)** ของ G ถ้าแต่ละ $v \in V(G) - S$ มี $x \in S$ ซึ่ง $xv \in E(G)$

<u>บทนิยาม 2.12</u>: ให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟ และ $x, y \in V(G)$ และ $S, U \subseteq V(G)$ เราจะกล่าวว่า x **โดมิเนต (dominate)** y ถ้า x ประชิดกับ y หรือ $x = y$ และจะกล่าวว่า S **โดมิเนต (dominate)** U ถ้าแต่ละ $v \in U$ มี $x \in S$ ซึ่ง $xv \in E(G)$

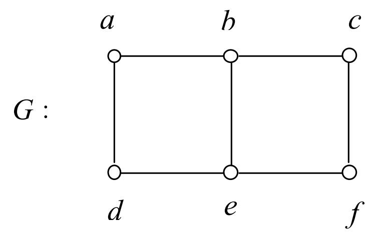
<u>บทนิยาม 2.13</u>: **โดมิเนชัน (domination number)** ของ G แทนด้วยสัญลักษณ์ $\gamma(G)$

คือ **จำนวนเชิงการนับ (cardinal number)** ที่น้อยที่สุดของเซตโดมิเนติงของ G

นั่นคือ $\gamma(G) = \min\{|S| \mid S$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G\}$

เรียกเซตโดมิเนติง S ที่ $|S| = \gamma(G)$ ว่า $(\gamma - set)$ ของ G

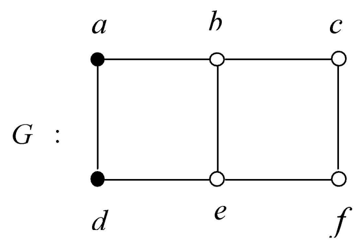
<u>ตัวอย่าง 2.6:</u> ให้ G เป็นกราฟดังรูป



รูปที่ 7

จะได้ว่า $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ และ $E(G)=\{ab,ad,bc,be,cf,de,ef\}$

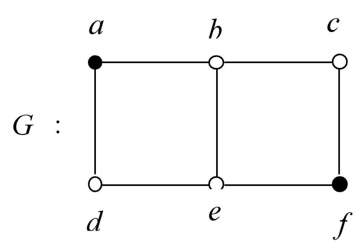
ให้ $S_1=\{a,d\}$ คือเซตของจุดทึบ ดังรูป จะเห็นว่ามี $c,f\in V(G)-S_1$ ซึ่งไม่ถูกโดมิเนตโดยจุดยอดใน S_1



รูปที่ 8

ดังนั้น S_1 ไม่เป็นเซตโดมิเนติง

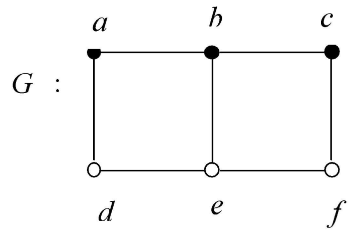
ให้ $S_2=\{a,f\}$ คือเซตของจุดทึบ ดังรูป จะเห็นว่าทุกจุด $b,c,d,e\in V(G)-S_2$ มี a,f ใน S_2 ซึ่ง $ab,ad,cf,ef\in E(G)$



รูปที่ 9

ดังนั้น S_2 เป็นเซตโดมิเนติง

ให้ $S_3 = \{a,b,c\}$ คือเซตของจุดทึบ ดังรูป จะเห็นว่าทุกจุด $d,e,f \in V(G)-S_3$ มี a,b,c ใน S_3 ซึ่ง $ad, be, cf \in E(G)$



รูปที่ 10

ดังนั้น S_3 เป็นเซตโดมิเนติง

เมื่อพิจารณาเซตโดมิเนติงทั้งหมดของ G จะเห็นว่า ไม่มีเซตโดมิเนติงใดเลยที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 1 แต่มีเซตโดมิเนติงที่มีสมาชิกเท่ากับ 2 เช่น เซต S_2 ดังนั้น $\gamma(G) = 2$

บทที่ 3

ผลการศึกษา

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาการหาเซตโดมิเนติงของ **กราฟการรวมวิถี** P_3 (P_3 **– amalgamation)** ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร สำหรับ $n,m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \geq 4$ เพื่อความสะดวก สำหรับทุก $a,b \in \mathbb{N}$ เราจะเขียนแทน $a \equiv b(\text{mod}\,3)$ ด้วย $a \equiv b$

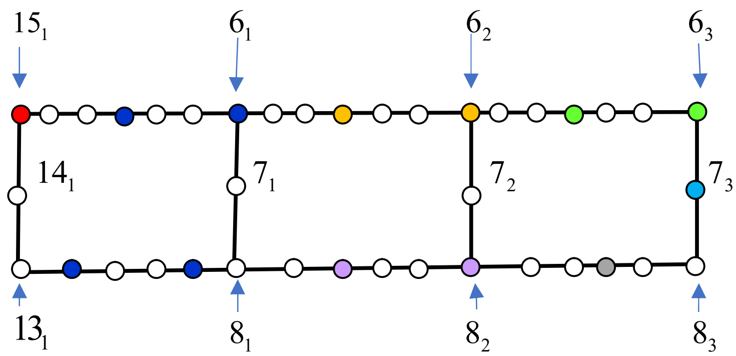
สำหรับผลการศึกษา เราเราจะพิจารณา n ออกเป็น 6 กรณี ดังนี้

1. n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 0(\text{mod}\,3)$
2. n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 1(\text{mod}\,3)$
3. n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 2(\text{mod}\,3)$
4. n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 0(\text{mod}\,3)$
5. n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 1(\text{mod}\,3)$
6. n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 2(\text{mod}\,3)$

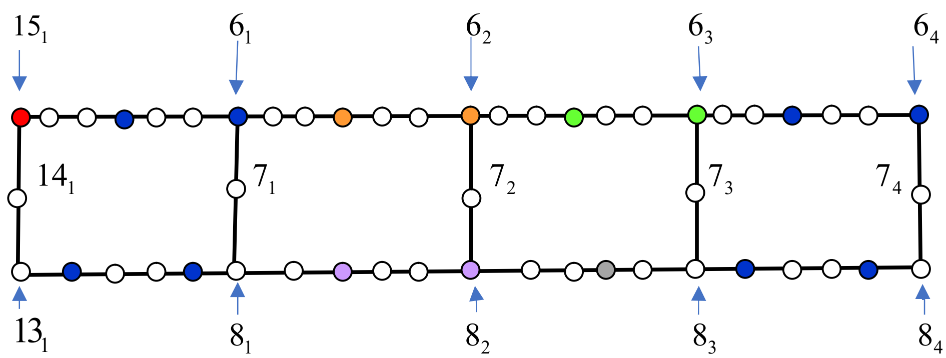
<u>ตัวอย่าง 3.1:</u> ให้ $n=15$ จะได้ว่า n เป็นจำนวนคี่ และ $n\equiv 0(\bmod 3)$

จะได้ กราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_{15} 3 วัฏจักร 4 วัฏจักร และ 5 วัฏจักร ดังรูปต่อไปนี้

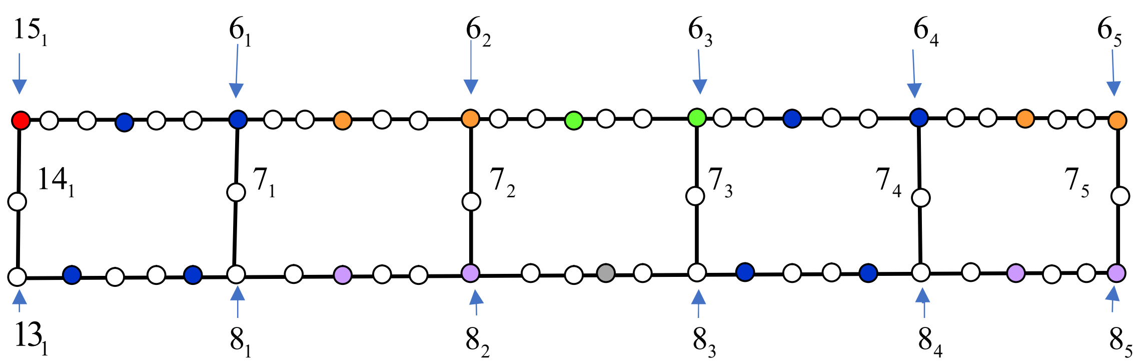
และได้เซตโดมิเนติงของแต่ละกราฟเป็นเซตของจุดที่ระบายด้วยสีต่าง ๆ ในรูป



รูปที่ 11 $\bigcup_{i=1}^{3} C_{15}^{i}\left\{6_i=15_{i+1},7_i=14_{i+1},8_i=13_{i+1}\right\}$



รูปที่ 12 $\bigcup_{i=1}^{4} C_{15}^{i}\left\{6_i=15_{i+1},7_i=14_{i+1},8_i=13_{i+1}\right\}$



รูปที่ 13 $\bigcup_{i=1}^{5} C_{15}^{i}\left\{6_i=15_{i+1},7_i=14_{i+1},8_i=13_{i+1}\right\}$

<u>ทฤษฎีบท 3.1:</u> ให้ $n, m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \geq 4$ และให้

$G = \bigcup_{i=1}^{m} C_n^i \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)_i = n_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)_i = (n-1)_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)_i = (n-2)_{i+1} \right\}$ เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 0$ จะได้ว่า

1. ถ้า $m \equiv 0$ แล้ว

$$S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq t \leq n-4 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \leq t \leq n-5 \right\} \cup \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)_m \right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ถ้า $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ แล้ว

$$S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq t \leq n-4 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \leq t \leq n-5 \right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

<u>พิสูจน์</u>: ให้ G เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคี่ และ

$n \equiv 0$

1. ให้ $m \equiv 0$ และ

$$S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq t \leq n-4 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \leq t \leq n-5 \right\} \cup \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)_m \right\}$$

จะแสดงว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G ให้ $v \in V(G) - S$

1.1 ถ้า $v \in \{1_1, (n-1)_1\}$ จะเห็นว่ามี $n_1 \in S$ ซึ่ง $\{v, n_1\} \in E(G)$

1.2 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 1, 2,\ 2 \leq t \leq n-2\}$ แล้วจะมี $x \in \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.3 ถ้า $v=1_k$ โดยที่ $k\equiv 2$ จะมี $x=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_{k-1}\in\bigcup_{i\equiv 1}\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\le t\le n-3\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 1)

1.4 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 1,2,\ 2\le t\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ จะมี $x\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\le t\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.5 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 0,1,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1\le t\le n-3\right\}$

จะมี $x\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1\le t\le n-4\right\}\subset S$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.6 ถ้า $v=1_k$ โดยที่ $k\equiv 0$ จะมี $x=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_{k-1}\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\le t\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 1)

1.7 ถ้า $v=(n-3)_k$ โดยที่ $k\equiv 0$ จะมี

$$x=(n-2)_k=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_{k-1}\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1\le t\le n-4\right\}\subset S$$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 1)

1.8 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 1,2,\ 2\le t\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}$ จะมี $x\in\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\le t\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.9 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 0,2,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+2\le t\le n-4\right\}$ จะมี

$x\in\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+3\le t\le n-5\right\}$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.10 ถ้า $v=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_m$ จะมี $x=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

จาก 1.1 ถึง 1.10 จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ให้ $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ และ

$$S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le n-3\}$$

$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-4\right\}$$

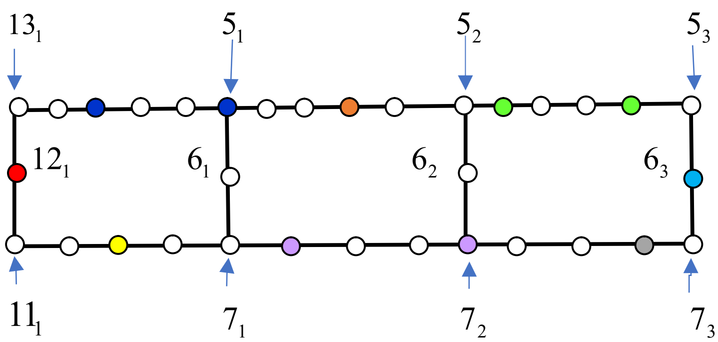
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n-5\right\}$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ ข้อ 1. จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G $\square$

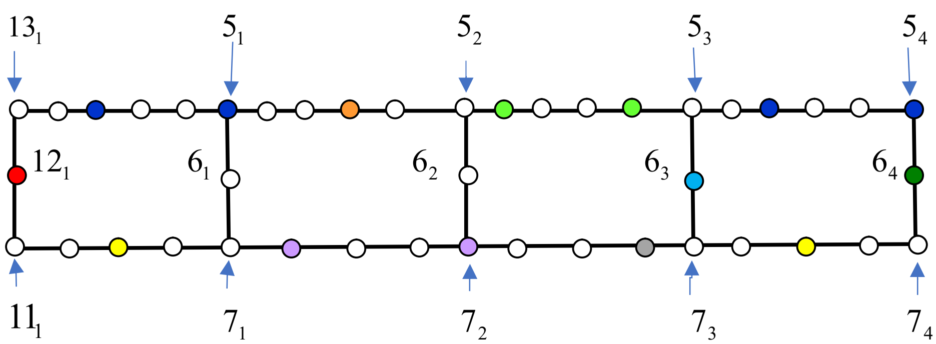
<u>ตัวอย่าง 3.2:</u> ให้ $n=13$ จะได้ว่า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$

จะได้ กราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_{13} 3 วัฏจักร 4 วัฏจักร และ 5 วัฏจักร ดังรูปต่อไปนี้

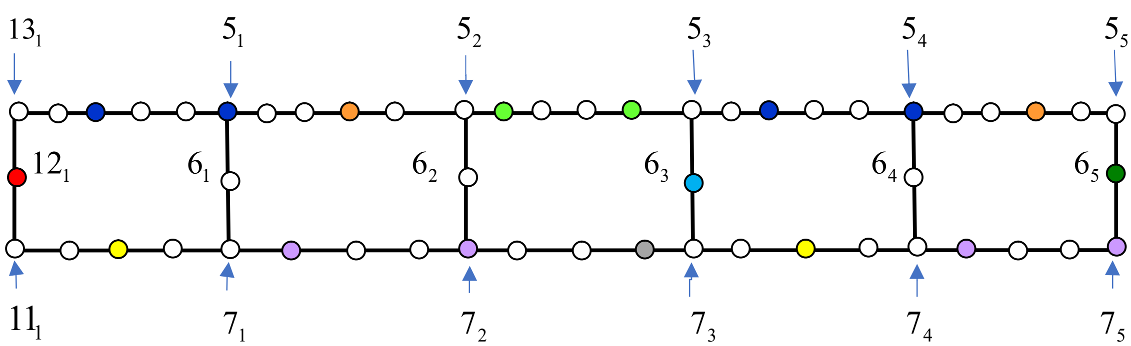
และได้เซตโดมิเนติงของแต่ละกราฟเป็นเซตของจุดที่ระบายด้วยสีต่าง ๆ ในรูป



รูปที่ 14 $\bigcup_{i=1}^{3} C_{13}^{i} \{5_i = 13_{i+1}, 6_i = 12_{i+1}, 7_i = 11_{i+1}\}$



รูปที่ 15 $\bigcup_{i=1}^{4} C_{13}^{i} \{5_i = 13_{i+1}, 6_i = 12_{i+1}, 7_i = 11_{i+1}\}$



รูปที่ 16 $\bigcup_{i=1}^{5} C_{13}^{i} \{5_i = 13_{i+1}, 6_i = 12_{i+1}, 7_i = 11_{i+1}\}$

<u>ทฤษฎีบท 3.2</u>: ให้ $n,m\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n\geq 4$ และให้
$G=\bigcup_{i=1}^{m}C_n^i\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i=n_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i=(n-1)_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i=(n-2)_{i+1}\right\}$ เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคี่ และ $n\equiv 1$ จะได้ว่า

1. ถ้า $m\equiv 0$ แล้ว

$$S=\{(n-1)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-4\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-5\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ถ้า $m\equiv 1$ หรือ $m\equiv 2$ แล้ว

$$S=\{(n-1)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-4\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-5\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i\right\}$$
$$\cup\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

<u>พิสูจน์</u>: ให้ G เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคี่ และ

$n\equiv 1$

1. ให้ $m\equiv 0$ และ

$$S=\{(n-1)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-4\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-5\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i\right\}$$

จะแสดงว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G ให้ $v\in V(G)-S$

1.1 ถ้า $v \in \{n_1, (n-2)_1\}$ จะเห็นว่ามี $(n-1)_1 \in S$ ซึ่ง $\{v, (n-1)_1\} \in E(G)$

1.2 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$ แล้วจะมี $x \in \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.3 ถ้า $v = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)_k$ โดยที่ $k \equiv 1$ จะมี

$$x = (n-3)_{k+1} \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-3 \right\} \subset S \text{ ซึ่ง } \{v, x\} \in E(G)$$

1.4 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-3 \right\}$ จะมี

$$x \in \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n-4 \right\} \subset S \text{ ซึ่ง } \{v, x\} \in E(G)$$

1.5 ถ้า $v = 1_k$ โดยที่ $k \equiv 2$ จะมี

$$x = n_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)_{k-1} \in \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \subset S$$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 2)

1.6 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.7 ถ้า $v = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)_k$ โดยที่ $k \equiv 2$ จะมี $x = (1)_{k+1} \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.8 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le t \le n-3 \right\}$ จะมี

$$x \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-3 \right\} \subset S \text{ ซึ่ง } \{v, x\} \in E(G)$$

1.9 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,2,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -1\right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -2\right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

1.10 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +1 \le t \le n-4\right\}$ จะมี

$x \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +2 \le t \le n-5\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

1.11 ถ้า $v = (n-3)_k$ โดยที่ $k \equiv 0$ จะมี

$$x = (n-2)_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +1 \le t \le n-3\right\} \subset S$$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 2)

จาก 1.1 ถึง 1.11 จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ให้ $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ และ

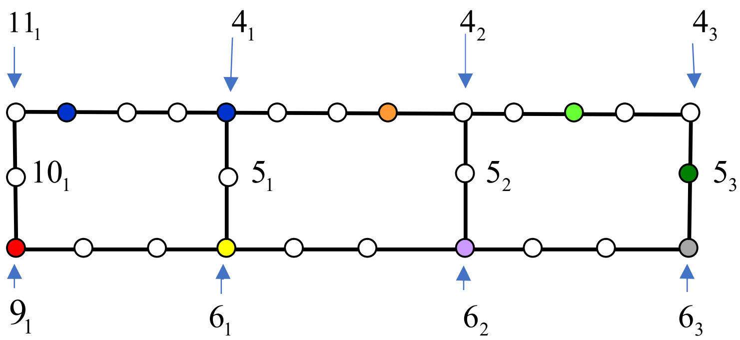
$$S = \{(n-1)_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +3 \le t \le n-4\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -3\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +1 \le t \le n-3\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -2\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +2 \le t \le n-5\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i\right\}$$
$$\cup \left\{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_m\right\}$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ ข้อ 1. จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G $\square$

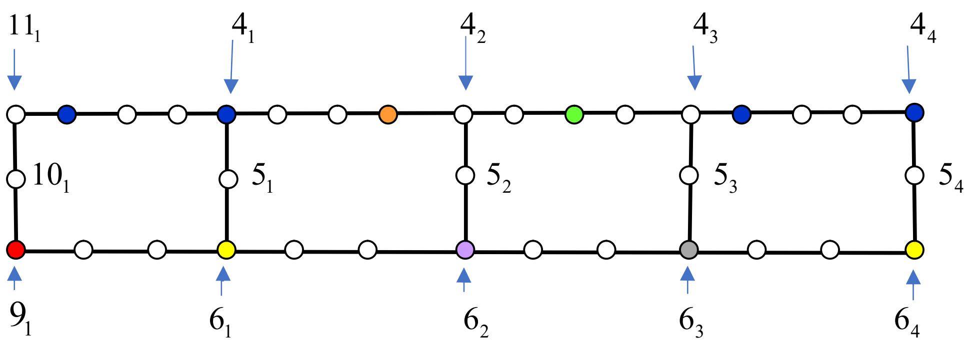
ตัวอย่าง 3.3: ให้ $n = 11$ จะได้ว่า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 2 (\bmod 3)$

จะได้ กราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_{11} 3 วัฏจักร 4 วัฏจักร และ 5 วัฏจักร ดังรูปต่อไปนี้

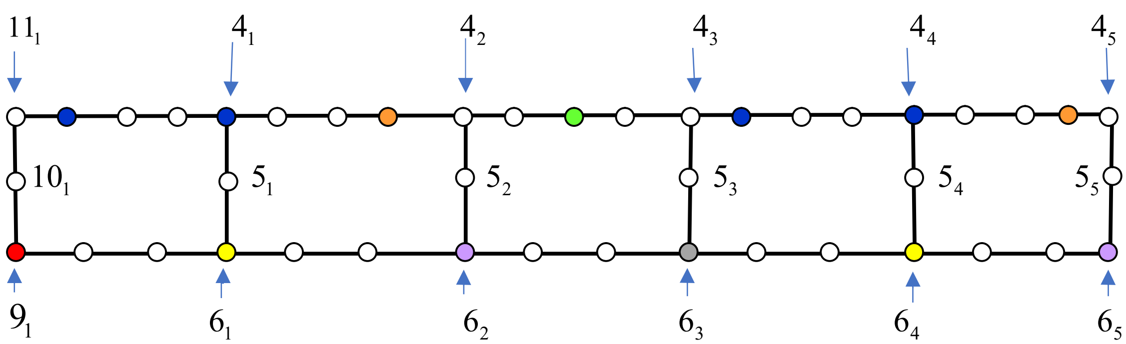
และได้เซตโดมิเนติงของแต่ละกราฟเป็นเซตของจุดที่ระบายด้วยสีต่าง ๆ ในรูป



รูปที่ 17 $\bigcup_{i=1}^{3} C_{11}^{i} \{4_i = 11_{i+1}, 5_i = 10_{i+1}, 6_i = 9_{i+1}\}$



รูปที่ 18 $\bigcup_{i=1}^{4} C_{11}^{i} \{4_i = 11_{i+1}, 5_i = 10_{i+1}, 6_i = 9_{i+1}\}$



รูปที่ 19 $\bigcup_{i=1}^{5} C_{11}^{i} \{4_i = 11_{i+1}, 5_i = 10_{i+1}, 6_i = 9_{i+1}\}$

<u>ทฤษฎีบท 3.3</u>: ให้ $n,m\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n\geq 4$ และให้

$$G=\bigcup_{i=1}^{m}C_n^i\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i=n_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i=\left(n-1\right)_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i=\left(n-2\right)_{i+1}\right\}$$ เป็นกราฟการรวมวิถี P_3

ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคี่ และ $n\equiv 2$ จะได้ว่า

1. ถ้า $m\equiv 0$ แล้ว

$$S=\{(n-2)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}\cup\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ถ้า $m\equiv 1$ หรือ $m\equiv 2$ แล้ว

$$S=\{(n-2)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

<u>พิสูจน์</u>: ให้ G เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคี่ และ $n\equiv 2$

1. ให้ $m\equiv 0$ และ

$$S=\{(n-2)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-5\right\}\cup\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m\right\}$$

จะแสดงว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G ให้ $v\in V(G)-S$

1.1 ถ้า $v\in\{(n-1)_1,(n-3)_1\}$ จะเห็นว่ามี $\left(n-2\right)_1\in S$ ซึ่ง $\{v,\left(n-2\right)_1\}\in E(G)$

1.2 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0, 2,\ \mathrm{n} \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ หรือ $v = (n)_1$ แล้วจะมี

$x \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.3 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 1, 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le t \le n-4\right\}$ จะมี

$x \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.4 ถ้า $v = (1)_k$ โดยที่ $k \equiv 2$ จะมี

$x = n_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 3)

1.5 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1, 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.6 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1, 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le t \le n-4\right\}$ จะมี

$x \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.7 ถ้า $v = (n-3)_k$ โดยที่ $k \equiv 2$ จะมี

$x = (n-2)_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5\right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 3)

1.8 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right\}$ จะมี

$x \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.9 ถ้า $v=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor -1\right)_k$ โดยที่ $k\equiv 0$ และ $k<m$ จะมี

$$x=(1)_{k+1}\in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{ t_i \mid t\equiv 1,\ 1\le t\le \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor -1\right\} \subset S$$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.10 ถ้า $v\in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{ t_i \mid t\equiv 1,2,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \le t\le n-4\right\}$ จะมี

$$x\in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{ t_i \mid t\equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor +1\le t\le n-5\right\} \subset S$$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.11 ถ้า $v=(n-3)_k$ โดยที่ $k\equiv 0$ จะมี

$$x=(n-2)_k=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor +1\right)_{k-1}\in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{ t_i \mid t\equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor +1\le t\le n-5\right\} \subset S$$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 3)

1.12 ถ้า $v=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor -1\right)_m$ จะมี $x=\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m \in S$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

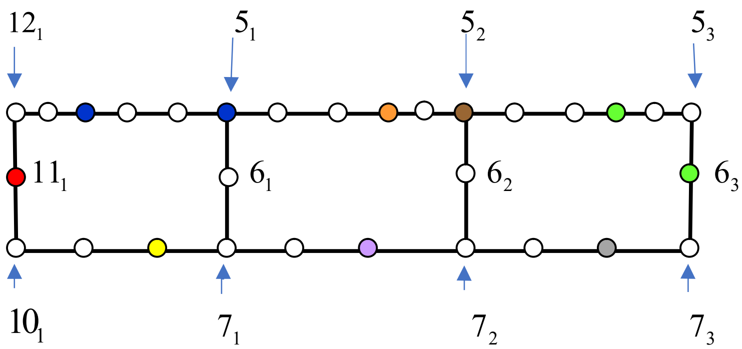
จาก 1.1 ถึง 1.12 จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ให้ $m\equiv 1$ หรือ $m\equiv 2$ และ

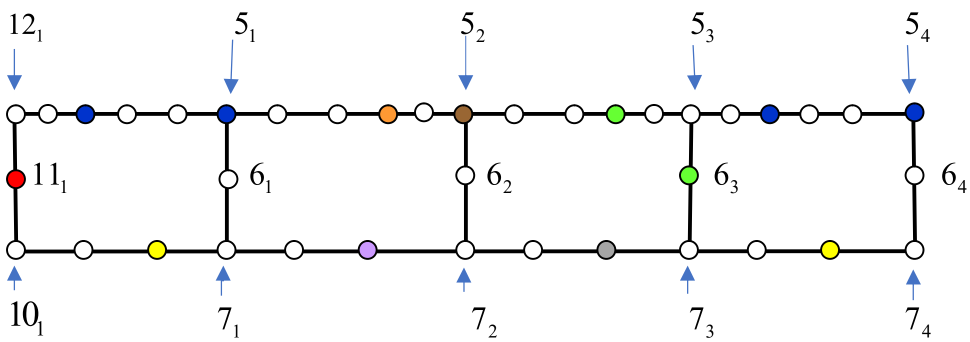
$$\begin{aligned} S=\{(n-2)_1\} &\cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{ t_i \mid t\equiv 1,\ 1\le t\le \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor -1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{ t_i \mid t\equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor +1\le t\le n-5\right\} \\ &\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{ t_i \mid t\equiv 0,\ 3\le t\le \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor -2\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{ t_i \mid t\equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor +1\le t\le n-5\right\} \\ &\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{ t_i \mid t\equiv 2,\ 2\le t\le \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor -3\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{ t_i \mid t\equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor +1\le t\le n-5\right\} \end{aligned}$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ ข้อ 1. จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G $\square$

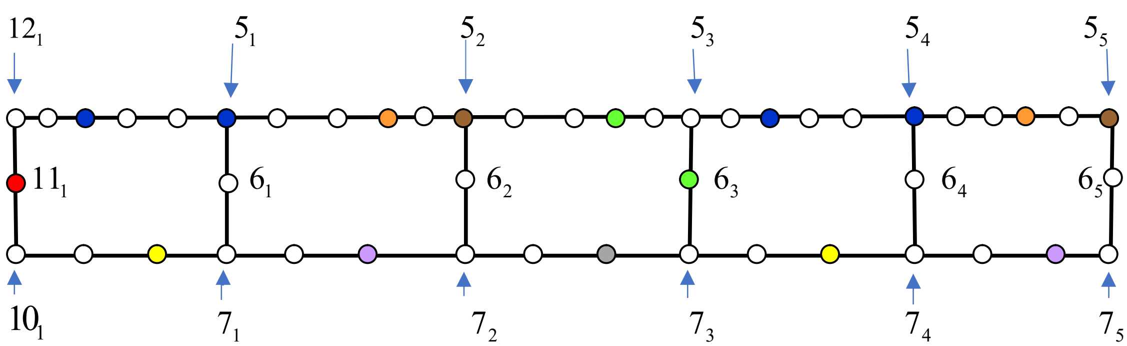
<u>ตัวอย่าง 3.4:</u> ให้ $n=12$ จะได้ว่า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 0(\bmod 3)$ จะได้ กราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_{12} 3 วัฏจักร 4 วัฏจักร และ 5 วัฏจักร ดังรูปต่อไปนี้ และได้เซตโดมิเนติงของแต่ละกราฟเป็นเซตของจุดที่ระบายด้วยสีต่าง ๆ ในรูป



รูปที่ 20 $\bigcup_{i=1}^{3} C_{12}^{i}\{5_i = 12_{i+1}, 6_i = 11_{i+1}, 7_i = 10_{i+1}\}$



รูปที่ 21 $\bigcup_{i=1}^{4} C_{12}^{i}\{5_i = 12_{i+1}, 6_i = 11_{i+1}, 7_i = 10_{i+1}\}$



รูปที่ 22 $\bigcup_{i=1}^{5} C_{12}^{i}\{5_i = 12_{i+1}, 6_i = 11_{i+1}, 7_i = 10_{i+1}\}$

<u>ทฤษฎีบท 3.4</u>: ให้ $n,m\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n\geq 4$ และให้

$G=\bigcup_{i=1}^{m}C_n^i\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i=n_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i=(n-1)_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i=(n-2)_{i+1}\right\}$ เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคู่ และ $n\equiv 0$ จะได้ว่า

$$S=\{(n-1)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-4\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-4\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-4\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

<u>พิสูจน์</u>: ให้ G เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคู่ และ

$n\equiv 0$ และให้

$$S=\{(n-1)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-4\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-4\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-4\right\}$$

จะแสดงว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G ให้ $v\in V(G)-S$

1 ถ้า $v\in\{(n)_1,(n-2)_1\}$ จะเห็นว่ามี $(n-1)_1\in S$ ซึ่ง $\{v,(n-1)_1\}\in E(G)$

2 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 0,1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ แล้วจะมี $x\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ 2\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

3 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 0,1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-3\right\}$ จะมี

$x\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-4\right\}\subset S$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

4 ถ้า $v=(1)_k$ โดยที่ $k\equiv 2$ จะมี

$$x = n_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \subset S$$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 4)

5 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

6 ถ้า $v = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_k$ โดยที่ $k \equiv 2$ แล้วจะมี

$x \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_i \right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

7 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n - 3 \right\}$

จะมี $x \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n - 4 \right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

8 ถ้า $v = (1)_k$ โดยที่ $k \equiv 0$ แล้วจะมี

$x = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_i \right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

9 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

10 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n - 3 \right\}$ จะมี

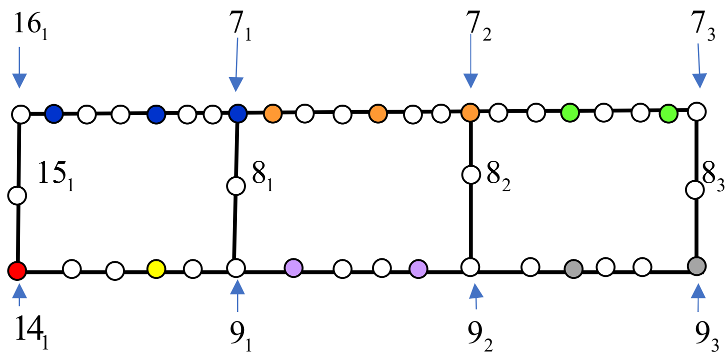
$x \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n - 4 \right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

จาก 1 ถึง 10 จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G

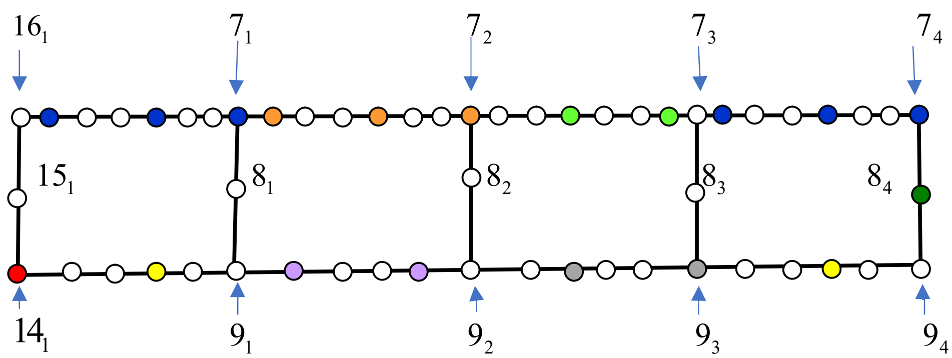
<u>ตัวอย่าง 3.5:</u> ให้ $n=16$ จะได้ว่า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$

จะได้ กราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_{16} 3 วัฏจักร 4 วัฏจักร และ 5 วัฏจักร ดังรูปต่อไปนี้

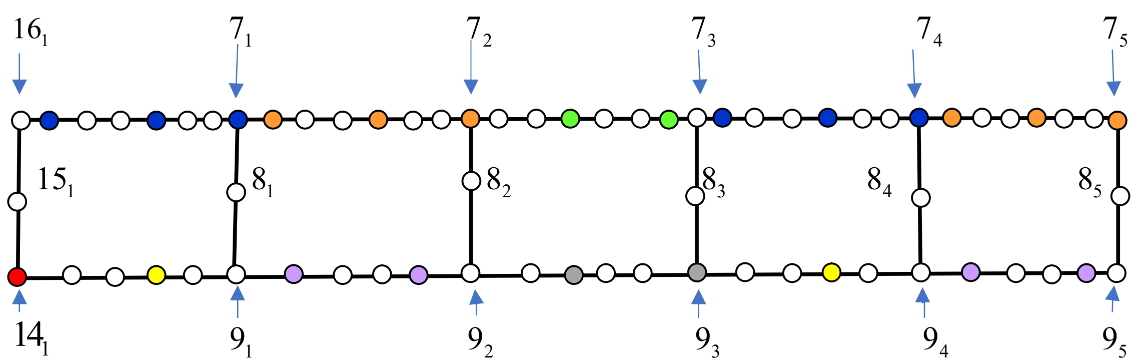
และได้เซตโดมิเนติงของแต่ละกราฟเป็นเซตของจุดที่ระบายด้วยสีต่าง ๆ ในรูป



รูปที่ 23 $\bigcup_{i=1}^{3} C_{16}^{i}\{7_i = 16_{i+1}, 8_i = 15_{i+1}, 9_i = 14_{i+1}\}$



รูปที่ 24 $\bigcup_{i=1}^{4} C_{16}^{i}\{7_i = 16_{i+1}, 8_i = 15_{i+1}, 9_i = 14_{i+1}\}$



รูปที่ 25 $\bigcup_{i=1}^{5} C_{16}^{i}\{7_i = 16_{i+1}, 8_i = 15_{i+1}, 9_i = 14_{i+1}\}$

<u>ทฤษฎีบท 3.5:</u> ให้ $n,m\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n\geq 4$ และให้

$G=\bigcup_{i=1}^{m}C_n^i\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i=n_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i=(n-1)_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i=(n-2)_{i+1}\right\}$ เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคู่ และ $n\equiv 1$ จะได้ว่า

1. ถ้า $m\equiv 0$ หรือ $m\equiv 2$ แล้ว

$$S=\{(n-2)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 1,1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-4\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ถ้า $m\equiv 1$ แล้ว

$$S=\{(n-2)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-4\right\}\cup\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

<u>พิสูจน์</u>: ให้ G เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคู่ และ $n\equiv 1$

1. ให้ $m\equiv 0$ หรือ $m\equiv 2$

$$S=\{(n-2)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 1,1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ 1\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-4\right\}$$

จะแสดงว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G ให้ $v\in V(G)-S$

1.1 ถ้า $v\in\{(n-1)_1,(n-3)_1\}$ จะเห็นว่ามี $(n-2)_1\in S$ ซึ่ง $\{v,(n-2)_1\}\in E(G)$

1.2 ถ้า $v=(n)_1$ แล้วจะมี $x=1_1\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 1,\ 1\le t\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.3 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 0,2,\ 1\le t\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ แล้วจะมี $x\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 1,\ 1\le t\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.4 ถ้า $v=\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_k$ โดยที่ $k\equiv 1$ จะมี

$x=(n-3)_{k+1}\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le t\le n-3\right\}\subset S$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.5 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 0,1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le t\le n-4\right\}$ จะมี

$x\in\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\le t\le n-5\right\}\subset S$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.6 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 0,2,\ 1\le t\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ จะมี $x\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 1,\ 1\le t\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.7 ถ้า $v\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 0,2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\le t\le n-3\right\}$ จะมี

$x\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le t\le n-3\right\}\subset S$ ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$

1.8 ถ้า $v=(1)_k$ โดยที่ $k\equiv 0$ จะมี

$x=n_k=\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_{k-1}\in\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t\equiv 1,\ 1\le t\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\subset S$

ซึ่ง $\{v,x\}\in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 5)

1.9 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -1\right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -2\right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

1.10 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le t \le n-3\right\}$ จะมี

$x \in \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +1 \le t \le n-4\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

จาก 1.1 ถึง 1.10 จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ให้ $m \equiv 1$ และ

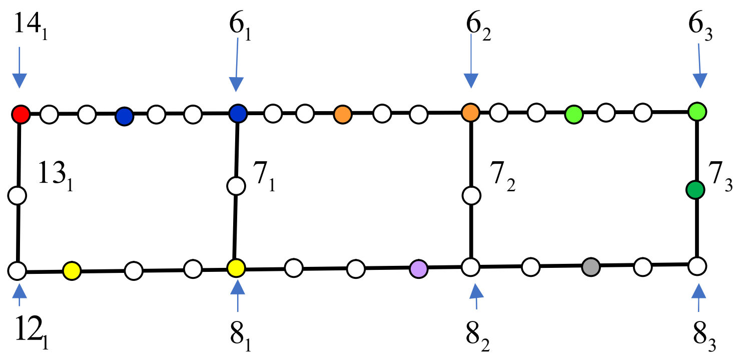
$$S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +3 \le t \le n-5\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +2 \le t \le n-3\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -2\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor +1 \le t \le n-4\right\} \cup \left\{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_m\right\}$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ ข้อ 1. จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G $\square$

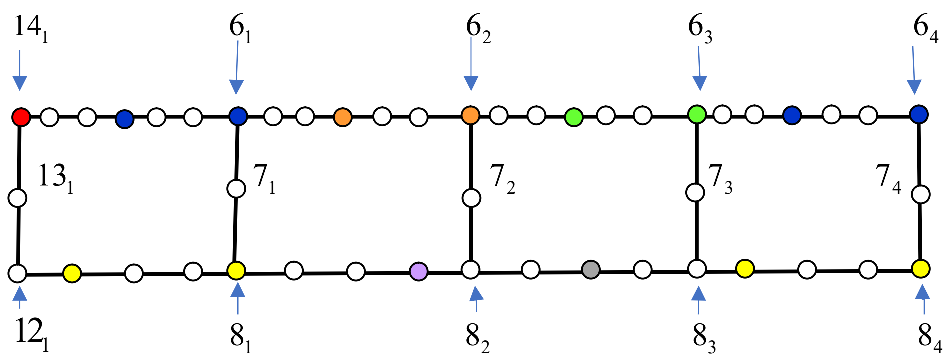
<u>ตัวอย่าง 3.6:</u> ให้ $n=12$ จะได้ว่า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$

จะได้ กราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_{14} 3 วัฏจักร 4 วัฏจักร และ 5 วัฏจักร ดังรูปต่อไปนี้

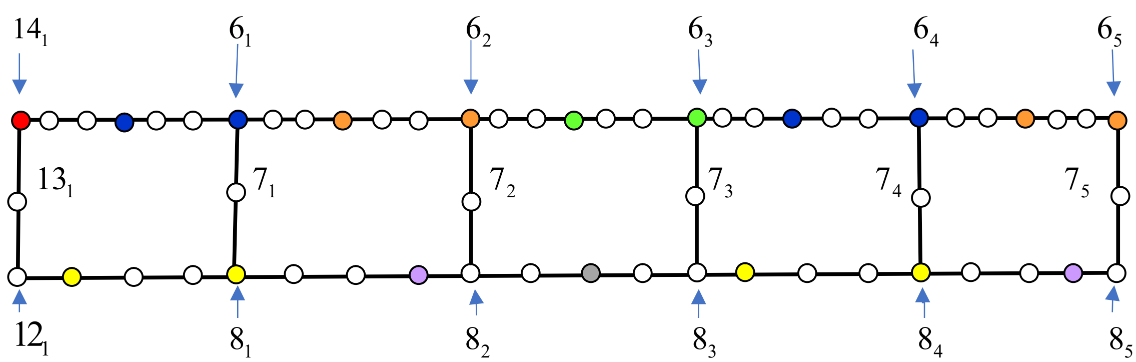
และได้เซตโดมิเนติงของแต่ละกราฟเป็นเซตของจุดที่ระบายด้วยสีต่าง ๆ ในรูป



รูปที่ 26 $\bigcup_{i=1}^{3} C_{14}^{i}\{6_i = 14_{i+1}, 7_i = 13_{i+1}, 8_i = 12_{i+1}\}$



รูปที่ 27 $\bigcup_{i=1}^{4} C_{14}^{i}\{6_i = 14_{i+1}, 7_i = 13_{i+1}, 8_i = 12_{i+1}\}$



รูปที่ 28 $\bigcup_{i=1}^{5} C_{14}^{i}\{6_i = 14_{i+1}, 7_i = 13_{i+1}, 8_i = 12_{i+1}\}$

<u>ทฤษฎีบท 3.6:</u> ให้ $n,m\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n\geq 4$ และให้

$G=\bigcup_{i=1}^{m}C_n^i\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)_i=n_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_i=\left(n-1\right)_{i+1},\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)_i=\left(n-2\right)_{i+1}\right\}$ เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคู่ และ $n\equiv 2$ จะได้ว่า

1. ถ้า $m\equiv 0$ แล้ว

$$S=\{(n)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-4\right\}\cup\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ถ้า $m\equiv 1$ หรือ $m\equiv 2$ แล้ว

$$S=\{(n)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-4\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

<u>พิสูจน์</u>: ให้ G เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร และ n เป็นจำนวนคู่ และ

$n\equiv 2$

1. ให้ $m\equiv 0$ และ

$$S=\{(n)_1\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i\mid t\equiv 2,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\leq t\leq n-3\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leq t\leq n-5\right\}$$
$$\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 0,\ 3\leq t\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i\mid t\equiv 1,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq t\leq n-4\right\}\cup\left\{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)_m\right\}$$

จะแสดงว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G ให้ $v\in V(G)-S$

1.1 ถ้า $v\in\{(1)_1,(n-1)_1\}$ จะเห็นว่ามี $\left(n\right)_1\in S$ ซึ่ง $\{v,\left(n\right)_1\}\in E(G)$

1.2 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 1,2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ แล้วจะมี $x \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

1.3 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-2\right\}$ จะมี

$x \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-3\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

1.4 ถ้า $v = (1)_k$ โดยที่ $k \equiv 2$ จะมี

$$x = n_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \subset S$$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 6)

1.5 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

1.6 ถ้า $v \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-4\right\}$

จะมี $x \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-5\right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$

1.7ถ้า $v \in (n-3)_k$ โดยที่ $k \equiv 2$ จะมี

$$x = (n-2)_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-3\right\} \subset S$$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 6)

1.8 ถ้า $v = (1)_k$ โดยที่ $k \equiv 0$ จะมี

$$x = n_k = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_{k-1} \in \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \subset S$$

ซึ่ง $\{v,x\} \in E(G)$ (โดยข้อสังเกต 2.1 ข้อ 6)

1.9 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1, 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\}$ จะมี $x \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \subset S$

ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.10 ถ้า $v = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)_m$ จะมี $x = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)_m \in S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

1.11 ถ้า $v \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0, 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n - 3 \right\}$ จะมี

$x \in \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n - 4 \right\} \subset S$ ซึ่ง $\{v, x\} \in E(G)$

จาก 1.1 ถึง 1.11 จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ให้ $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ และ

$$S = \{(n)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n - 3 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n - 5 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n - 4 \right\}$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ ข้อ 1. จะได้ว่า S เป็นเซตโดมิเนติงของ G $\square$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาการหาเซตโดมิเนติงของ **กราฟการรวมวิถี** P_3 (P_3 **– amalgamation)** ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร โดยที่ $n,m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \geq 4$ ได้ผลการศึกษาดังนี้

ให้ $n,m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \geq 4$ และให้ G เป็นกราฟการรวมวิถี P_3 ของวัฏจักร C_n m วัฏจักร จะได้ว่า

1 ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 0$ และ $m \equiv 0$ แล้ว

$$S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq t \leq n-4\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \leq t \leq n-5\right\} \cup \left\{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_m\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

2. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 0$ และ $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ แล้ว

$$S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq t \leq n-4\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \leq t \leq n-5\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

3. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 1$ และ $m \equiv 0$ แล้ว

$$S = \{(n-1)_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \leq t \leq n-4\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq t \leq n-3\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \leq t \leq n-5\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

4. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 1$ และ $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ แล้ว

$$S = \{(n-1)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n-4 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-3 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-5 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)_i \right\}$$
$$\cup \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)_m \right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

5. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 2$ และ $m \equiv 0$ แล้ว

$$S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5 \right\} \cup \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)_m \right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

6. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ และ $n \equiv 2$ และ $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ แล้ว

$$S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-5 \right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

7. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 0$ แล้ว

$$S = \{(n-1)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-4 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)_i \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-4 \right\}$$
$$\cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \left\{ t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-4 \right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

8. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 1$ และ $m \equiv 0$ หรือ $m \equiv 2$ แล้ว

$$S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 1, 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n-5\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-3\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-4\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

9. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 1$ และ $m \equiv 1$ แล้ว

$$S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n-5\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-3\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-4\right\} \cup \left\{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_m\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

10. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 2$ และ $m \equiv 0$ แล้ว

$$S = \{(n)_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-3\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-5\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n-4\right\} \cup \left\{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_m\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

11. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ $n \equiv 2$ และ $m \equiv 1$ หรือ $m \equiv 2$ แล้ว

$$S = \{(n)_1\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 1}\left\{t_i \mid t \equiv 2,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n-3\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 2}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le t \le n-5\right\}$$

$$\cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \le t \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\} \cup \bigcup_{i\equiv 0}\left\{t_i \mid t \equiv 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le t \le n-4\right\}$$

เป็นเซตโดมิเนติงของ G

เอกสารอ้างอิง

[1] นิตยา ชิงชัย, ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2016.

[2] E. Cockayne, S. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, Networks Fall, (1977), 247-261.

[3] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, Fundamentals of dominations in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.

Dominating sets of P_3 – amalgamations of m copies of C_n

Mr. Numpon Pipatsart Student ID 580510529

Advisor : Assoc. Prof. Dr. Sayan Punma

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

Abstract

A subset S of vertices in a graph G is a dominating set if every vertex in $V(G)-S$ is adjacent to some vertices in S. In this independent study, we discuss the dominating sets of a P_3- amalgamations of m copies of C_n for all $n,m \in \mathbb{N}$ such that $n \geq 4$.

Preliminaries

Let $n,m \in \mathbb{N}$ such that $n \geq 4$ and let $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^m$ be cycles of n vertices such that $V(C_n^i) = \{1_i, 2_i, 3_i, \ldots, n_i\}$,

$E(C_n^i) = \{\{k_i, (k+1)_i\} \mid k = 1,2,3,\ldots,n-1\} \cup \{\{n_i, 1_i\}\}$, $V(C_n^i) \cap V(C_n^{i+1}) = \{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)_i = n_{i+1}, (\lfloor n/2 \rfloor)_i = (n-1)_{i+1}, (\lfloor n/2 \rfloor + 1)_i = (n-2)_{i+1}\}$, and

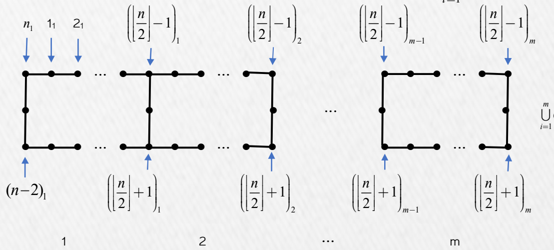
$E(C_n^i) \cap E(C_n^{i+1}) = \{\{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)_i, (\lfloor n/2 \rfloor)_i\} = \{n_{i+1}, (n-1)_{i+1}\}, \{(\lfloor n/2 \rfloor)_i, (\lfloor n/2 \rfloor + 1)_i\} = \{(n-1)_{i+1}, (n-2)_{i+1}\}\}$.

The P_3 – amalgamations of m copies of C_n is the graph with the vertex set $\bigcup_{i=1}^{m} V(C_n^i)$ and the edge set $\bigcup_{i=1}^{m} E(C_n^i)$,

Results

For simplicity of notation, we write

$a \equiv b$ instead of $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 3)$.



$\bigcup_{i=1}^{m} C_n^i \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)_i = n_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)_i = (n-1)_{i+1}, \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)_i = (n-2)_{i+1} \right\}$

If n is odd and $n \equiv 0$ and $m \equiv 0$, then $S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-4\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-5\} \cup \{(\lfloor n/2 \rfloor)_m\}$ *is a dominating set of G.*

If n is odd and $n \equiv 0$ and $m \equiv 1$ or $m \equiv 2$, then $S = \{n_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq n-3\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-4\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-5\}$ *is a dominating set of G.*

If n is odd and $n \equiv 1$ and $m \equiv 0$, then $S = \{(n-1)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-4\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 3\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-3\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-5\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{(\lfloor n/2 \rfloor)_i\}$ *is a dominating set of G.*

If n is odd and $n \equiv 1$ and $m \equiv 1$ or $m \equiv 2$, then $S = \{(n-1)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-4\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 3\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-3\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-5\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{(\lfloor n/2 \rfloor)_i\} \cup \{(\lfloor n/2 \rfloor)_m\}$ *is a dominating set of G.*

If n is odd and $n \equiv 2$ and $m \equiv 0$, then $S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-5\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-5\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 3\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-5\} \cup \{(\lfloor n/2 \rfloor)_m\}$ *is a dominating set of G.*

If n is odd and $n \equiv 2$ and $m \equiv 1$ or $m \equiv 2$, then $S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-5\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-5\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 3\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-5\}$ *is a dominating set of G.*

If n is even and $n \equiv 0$, then $S = \{(n-1)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ 2 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-4\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 3\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)_i\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-4\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-4\}$ *is a dominating set of G.*

If n is even and $n \equiv 1$ and $m \equiv 0$ or $m \equiv 2$, then $S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 1, 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-5\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-3\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-4\}$ *is a dominating set of G.*

If n is even and $n \equiv 1$ and $m \equiv 1$, then $S = \{(n-2)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-5\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 1,\ 1 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-3\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-4\} \cup \{(\lfloor n/2 \rfloor)_m\}$ *is a dominating set of G.*

If n is even and $n \equiv 2$ and $m \equiv 0$, then $S = \{(n)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-3\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-5\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-4\} \cup \{(\lfloor n/2 \rfloor)_m\}$ *is a dominating set of G.*

If n is even and $n \equiv 2$ and $m \equiv 1$ or $m \equiv 2$, then $S = \{(n)_1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 1} \{t_i \mid t \equiv 2,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq t \leq n-3\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 2} \{t_i \mid t \equiv 0,\ \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq t \leq n-5\}$ $\cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 0,\ 3 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\} \cup \bigcup_{i \equiv 0} \{t_i \mid t \equiv 1,\ \lfloor n/2 \rfloor + 3 \leq t \leq n-4\}$ *is a dominating set of G.*