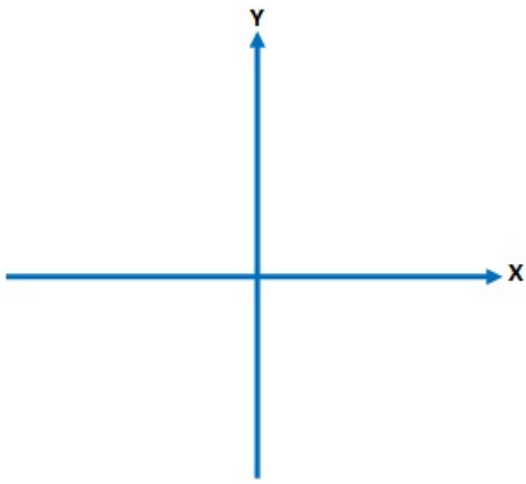
แบบฝึกหัดทบทวนปลายภาค 206112 ชุดที่ 8

ข้อ 1 กำหนดปริพันธ์ $I = \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_1^{e^2}\int_{\ln x}^{2} f(x,y)\,dydx$

1.1 จงวาดรูปและแรเงาบริเวณ R ที่สอดคล้องกับปริพันธ์ดังกล่าว พร้อมทั้งระบุสมการที่สอดคล้องกับเส้น จุดตัดแกน และจุดตัดของกราฟ

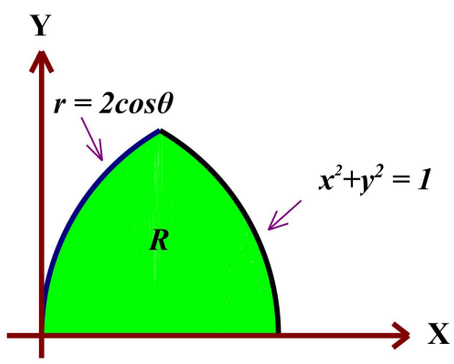


1.2 จงสลับลำดับของปริพันธ์ดังกล่าวเป็น $dxdy$

$I =$ . . . . . .

1.3 จงหาพื้นที่ของบริเวณ R โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก

ข้อ 2 กำหนดบริเวณ R ของปริพันธ์สองชั้น $I = \iint\limits_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$ ดังรูป



2.1 จงเขียนปริพันธ์ดังกล่าวในระบบพิกัดฉาก โดยมีลำดับการอินทิเกรตเป็น $dydx$ (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

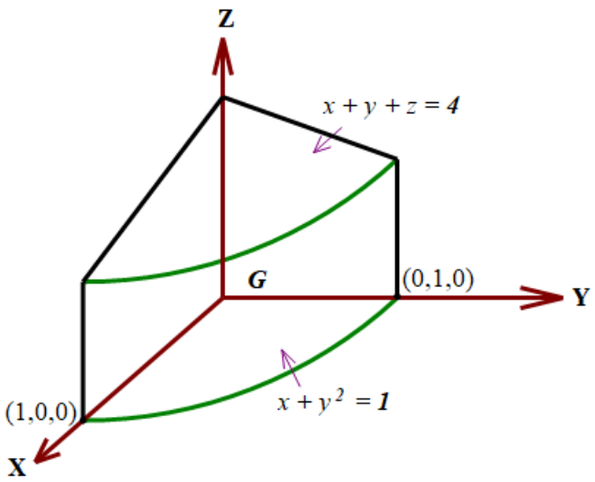
$I =$ . . . . . .

2.2 จงเขียนปริพันธ์ดังกล่าวในระบบพิกัดฉาก โดยมีลำดับการอินทิเกรตเป็น $dxdy$ (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

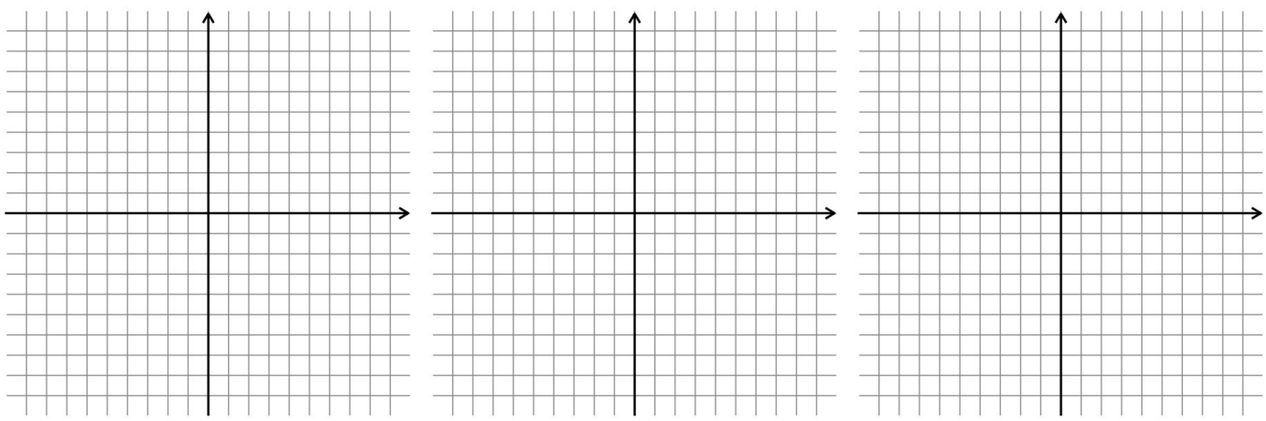
$I =$ . . . . . .

2.3 จงเขียนปริพันธ์ดังกล่าวในระบบพิกัดเชิงขั้ว พร้อมทั้งคำนวณค่าของปริพันธ์

ข้อ 3 กำหนดทรงตัน G ที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยระนาบ XY ด้านบนด้วยระนาบ $x+y+z=4$ ด้านข้างด้วยระนาบ XZ, YZ และพื้นผิว $x+y^2=1$ ดังรูป



3.1 จงวาดรูปภาพฉาย (projection) ของ G บนระนาบ XY XZ และ YZ (ระบุสเกลให้ชัดเจน)



3.2 จงเขียนปริมาตรของทรงตัน G ในรูปของปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก ในลำดับการอินทิเกรตที่กำหนดให้

$dydx$: ปริมาตร $=$ . . . . . .

3.3 จงเขียนปริมาตรของทรงตัน G ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก ในลำดับการอินทิเกรตที่กำหนดให้ (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

$dzdxdy$: ปริมาตร $=$ . . . . . .

$dxdydz$: ปริมาตร $=$ . . . . . .

$dydzdx$: ปริมาตร $=$ . . . . . .

ข้อ 4 จงเขียนจุด $P(x,y,z)=\left(2\sqrt{3},-2,-4\sqrt{3}\right)$ ในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในรูปของจุดในระบบพิกัดต่อไปนี้

พิกัดทรงกระบอก $P(r,\theta,z)=$ . . . . . .

พิกัดทรงกลม $P\left(\rho,\theta,\phi\right)=$ . . . . . .

ข้อ 5 ให้ G เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยกรวยควำ $z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$ และปิดล้อมด้านล่างด้วยทรงกลม $x^2+y^2+z^2=4$ จงเขียนปริพันธ์

$$I=\iiint_G x^2y\,dV$$

ในรูปปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดต่อไปนี้ (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

พิกัดทรงกระบอก : $I=$ . . . . . .

พิกัดทรงกลม : $I=$ . . . . . .

ข้อ 6 กำหนดปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก

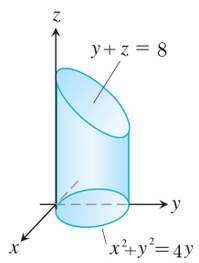
$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{r}^{3+\sqrt{9-r^2}} r^2\,dzdrd\theta$$

จงเขียนปริพันธ์ I ในระบบพิกัดฉาก (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

$I=$ . . . . . .

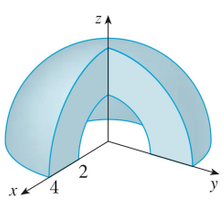
ข้อ 7 จงเขียนปริมาตรของทรงตันต่อไปนี้ในระบบพิกัดทรงกระบอกหรือพิกัดทรงกลม (ที่เหมาะสม) โดยไม่ต้องคำนวณค่า

7.1 ให้ G เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยระนาบ $y+z=8$ ปิดล้อมด้านข้างด้วยทรงกระบอก $x^2+y^2=4y$ และปิดล้อมด้านล่างด้วยระนาบ XY (ดังรูป)



ปริมาตร = ...

7.2 ให้ G เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ XY และส่วนหนึ่งของครึ่งทรงกลมรัศมี 2 หน่วยและ 4 หน่วย (ดังรูป)



ปริมาตร = ...

ข้อ 8 จงคำนวณค่าของ $I = \int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$

ข้อ 9 จงให้เหตุผลเพื่อสรุปว่าอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้า (converge) หรือลู่ออก (diverge) หรือสรุปไม่ได้

9.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-5^{n+1}}{4^n}$ เป็นอนุกรม ลู่เข้า / ลู่ออก / สรุปไม่ได้ เนื่องจาก . . . . . .

9.2 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ เป็นอนุกรม ลู่เข้า / ลู่ออก / สรุปไม่ได้ เนื่องจาก . . . . . .

9.3 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ โดยที่ $\lim_{k\to\infty} a_n = 0$ และ $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ เป็นอนุกรม ลู่เข้า / ลู่ออก / สรุปไม่ได้ เนื่องจาก . . . . . .

. . . . . .

ข้อ 10 กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าสู่ค่า A และ $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2^n}{5^n} - 3a_n\right] = 2$
จงแสดงวิธีหาค่า A

ข้อ 11 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}$

ข้อ 12

12.1 ให้ $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[2,\infty)$ จงแสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[2,\infty)$

12.2 จงใช้การทดสอบโดยอินทิกรัล (integral test) ทดสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ข้อ 13 จงแสดงว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก โดยเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมในการทดสอบ

13.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+\sin n}{n^5}$

13.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{9n^2-7}}{n^3-6n^2+4}$

13.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+112)^n}{(2n)^n}$

ข้อ 14 จงแสดงว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (absolutely converge) ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข (conditionally converge) หรือลู่ออก (diverge)

14.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{8^n}{(3n)!}$

14.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1-5n^2)}{n^3}$

ข้อ 15 จงหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(7^n)\sqrt{n+1}}$

ข้อ 16 กำหนดให้ $f(x) = \cos(\pi x)$

16.1 จงหาอนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin series) สำหรับ $f(x)$ ในรูปสัญลักษณ์ $\sum$

16.2 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) สำหรับ $f(x)$ รอบจุด $x = \frac{1}{2}$ (โดยเขียนกระจายสามพจน์แรกที่ไม่เป็นศูนย์)