แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาค 206111 ประจำปีการศึกษา 2569

ข้อ 1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1) $y = x^{2.2} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2^x + \arctan x$ $y' = 2.2x^{1.2} - x^{-\frac{3}{2}} - 2^x \ln 2 + \frac{1}{1+x^2}$

1.2) $y = (4 + \cot x)^{100}$ $y' = 100(4+\cot x)^{99} \cdot (-\csc^2 x)$

1.3) $y = \log_2(e + e^x)$ $y' = \frac{1}{(e+e^x)\ln 2} \cdot e^x$

1.4) $y = \sec(x \ln x)$ $y' = \sec(x\ln x)\tan(x\ln x) \cdot [x \cdot \frac{1}{x} + \ln x] = \sec(x\ln x)\tan(x\ln x) \cdot (1 + \ln x)$

1.5) $y = \frac{\arcsin(\cos x)}{x^2}$ $y' = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot (-\sin x) - \arcsin(\cos x) \cdot 2x}{x^4} = y' = \frac{-\frac{x^2 \sin x}{|\sin x|} - 2x \arcsin(\cos x)}{x^4}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ข้อ 2 กำหนดค่าของ $f(1) = 2, g(1) = -1, f'(1) = 3, g'(1) = 1$ และ $g'(2) = -2$
จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่างต่อไปนี้

2.1) ถ้า $u(x) = f(x)g(x)$ แล้วจะได้ว่า $u'(1) =$ $f(1)g'(1) + g(1)f'(1) = (2)(1) + (-1)(3) = 2 - 3 = -1$

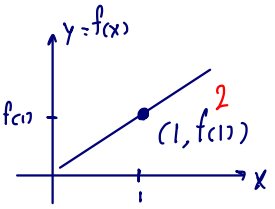
$u'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

2.2) ถ้า $h(x) = g(f(x))$ แล้วจะได้ว่า $h'(1) =$ $g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = (-2)(3) = -6$

$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ chain rule

2.3) สมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $x = 1$ คือ เส้นตรงผ่าน (1,2) : $y = 3x - 1$

$y = mx + c$ → ค.ชันของ y' | ค.ชันที่จุด $x=1$; $y'(1) = 3$ | $y - y_0 = m(x - x_0)$ → $(1,2)$ → $y - 2 = 3(x-1)$



ข้อ 3 กำหนดให้ $f(x) = e^{5x}$ จงหา $f'(x) = 5e^{5x}$, $f''(x) = 5 \cdot 5e^{5x} = 5^2 e^{5x}$

3.1) $f''(x) =$ $25e^{5x}$

3.2) $f''(0) =$ 25

3.3) $f^{(555)}(x) =$ $5^{555}e^{5x}$

$\ln y = \ln(1+\tan x)^{(7x^2-1)}$

$\ln y = (7x^2-1)\ln(1+\tan x)$

$\frac{1}{y} \cdot y' = [(7x^2-1) \cdot \frac{1}{1+\tan x} \cdot \sec^2 x] + [\ln(1+\tan x) \cdot 14x]$

$y' = (1+\tan x)^{(7x^2-1)}\left[\frac{(7x^2-1)\sec^2 x}{1+\tan x} + 14x\ln(1+\tan x)\right]$

ข้อ 4 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $y = (1+\tan x)^{(7x^2-1)}$ โดยใช้สมบัติลอการิทึม (logarithmic differentiation)

$y(x)$

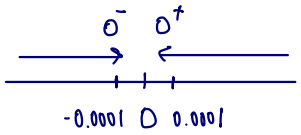
Implicit function : ฟังก์ชันปริยาย

ข้อ 5 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $\cos y + xy^4 = \csc x$

$-\sin y \cdot y' + (4xy^3 \cdot y' + y^4) = -\csc x \cot x$

$y'(-\sin y + 4xy^3) + y^4 = -\csc x \cot x$

$y' = \frac{-\csc x \cot x - y^4}{-\sin y + 4xy^3}$



$\lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2+4-(8)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2-4}{h}$

(ตัด h ได้ ∴ $h \neq 0$)

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = 4$

ข้อ 6 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{ถ้า } x \le 2 \\ 4x & \text{ถ้า } x > 2 \end{cases}$

ได้ว่า $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$

6.1) จงแสดงวิธีหา $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{4(2+h)-8}{h} = 4$

6.2) f หาอนุพันธ์ที่ $x=2$ ได้หรือไม่ **เพราะเหตุใด**

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$

∴ หาได้ เพราะ $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

ข้อ 7 สมมติ $s = f(t) = t^3 - 3t + 50$ เป็นสมการแสดงตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t โดย s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที

7.1) จงหาความเร็วเฉลี่ย (average velocity) ของอนุภาค ระหว่างวินาทีที่ 0 (t_1) ถึง วินาทีที่ 5 (t_2)

Sol. $V_{ave} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{[5^3-3(5)+50]-[0-3(0)+50]}{5} = \frac{[125-15+50]-50}{5} = 22$ m/s

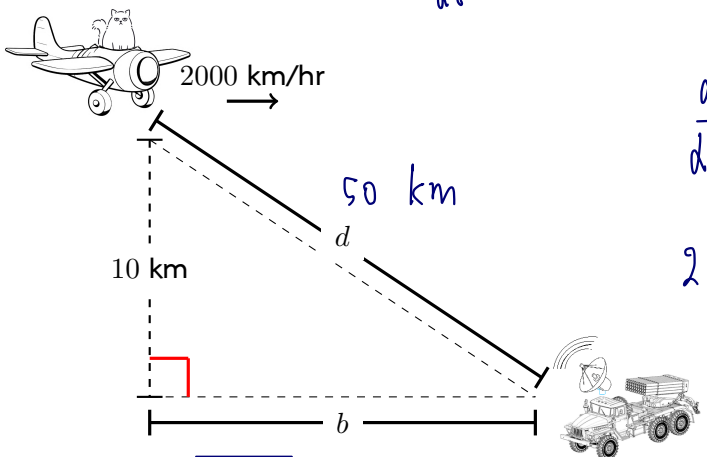
7.2) จงหาความเร็วชั่วขณะ (instantaneous velocity) ของอนุภาค ณ วินาทีที่ 5

Sol. $f'(t) = 3t^2-3$, $V_{inst} = f'(5) = 3(5)^2-3 = 3(25)-3 = 72$ m/s

ข้อ 8 เครื่องบิน $C-16$ บินในแนวระดับ ด้วยความสูงคงที่ 10 กิโลเมตร จากระดับน้ำทะเล ด้วยความเร็ว 2,000 กิโลเมตรต่อชั่วโมง db/dt

สถานีเรดาร์ตรวจจับวัตถุทางอากาศ อยู่บนพื้นดินซึ่งสูงเท่ากับระดับน้ำทะเล จับสัญญาณของเครื่องบิน $C-16$ ได้เป็นครั้งแรก เมื่ออยู่ห่างจากสถานีเรดาร์เป็นระยะทาง $D = 50$ กิโลเมตร

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทาง (D) ระหว่างเครื่องบิน $C-16$ และสถานีเรดาร์ตรวจจับวัตถุทางอากาศ ณ เวลาเริ่มตรวจจับสัญญาณได้เป็นครั้งแรก $\frac{dD}{dt} = ?$



$D^2 = b^2 + 100$

$\frac{d}{dt}[D^2] = \frac{d}{dt}[b^2+100]$

$2D\cdot\frac{dD}{dt} = 2b\cdot\frac{db}{dt}$

$b = \sqrt{50^2-10^2} = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6}$

$\frac{dD}{dt} = \frac{b}{D}\cdot\frac{db}{dt} = \frac{20\sqrt{6}}{50}\cdot 2000 = 800\sqrt{6}$ km/hr

ข้อ 9 จงประมาณค่า $e^{-0.001}$ โดยใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation)

ใกล้ 0 ($x_0 = 0$)

> **หมายเหตุ** การประมาณค่าเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f ณ จุด $x = x_0$ คือ
> $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Let $f(x) = e^x$ then $f'(x) = e^x$

การประมาณค่าเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f ณ $x=0$ ได้ดังนี้

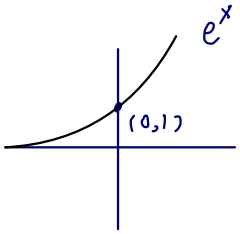
$e^{-0.001} \approx f(0) + f'(0)(-0.001-0) = 1 + (-0.001) = 0.999$ $\quad \therefore e^{-0.001} \approx 0.999$

ข้อ 10 จงระบุค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ในกรณีที่ลิมิตเป็นอนันต์จงระบุให้ชัดเจนว่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หากไม่มีลิมิตให้ระบุว่าไม่มีลิมิต

* ดูเลขชี้กำลังmax $x^{2024}(x+3)+2023$

10.1) $\lim_{x\to-\infty} x^{2025}+3x^{2024}+2023 =$ $-\infty$

10.2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{1+e^x} =$ $\frac{-3}{\infty} = 0$



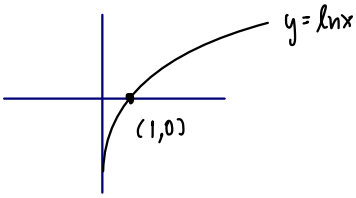
* ทดรูทคิด !!

10.3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{49x^2-6x+1}}{x+3} =$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{7|x|}{x} = -7$ (⊖)

ค่าไม่ลู่เข้า $[\infty,-\infty]$

10.4) $\lim_{x\to+\infty} (x-1)\sin x =$ ไม่มีลิมิต $[1,-1]$ $(+\infty)$

10.5) $\lim_{x\to+\infty} e^x \ln x =$ $+\infty$



ข้อ 11 จงแสดงวิธีหาค่าลิมิตต่อไปนี้พร้อมทั้งระบุรูปแบบยังไม่กำหนดของลิมิต (indeterminate form) (ถ้ามี)

11.1) $\lim_{x\to0^+} \frac{2\sin x}{x^{99}}$ รูปแบบ $\frac{0}{0}$ $\therefore$ Hospital $\frac{2\cos x}{99x^{98}} \xrightarrow{x\to0^+} \frac{2}{0^+} = +\infty$

$0 \uparrow x\to0^+$

11.2) $\lim_{x\to0^+} 6x^3\ln x$ รูปแบบ $0\cdot(-\infty)$ $\therefore$ Hospital $\frac{6\ln x}{x^{-3}} \to \frac{\frac{6}{x}}{-3x^{-4}} = \frac{-6}{3x^{-3}} = -2x^3$

ข้อ 12 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{2} - 12x^3 + 324x^2 - 1728x$

ได้ว่า $f'(x) = (x+8)(x-6)^3$ และ $f''(x) = 2(2x+9)(x-6)^2$

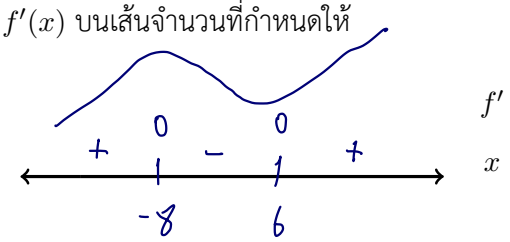
12.1) จุดวิกฤต (critical point) ทั้งหมดของ f คือ $f'(x)=0$; $x=-8,6$

12.2) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้

$f'(7) = (7+8)(7-6)^3$

$f'(0) = (0+8)(0-6)^3$

$f'(-9) = (-9+8)(-9-6)^3$

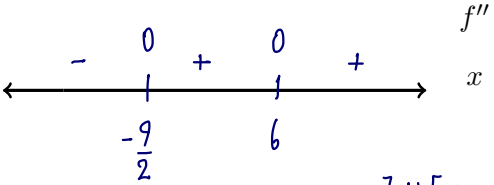


12.3) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้

$f''(7) = (+)$

$f''(0) = (+)$

$f''(-5) = (-)$



(+) ∪

12.4) ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) คือ $(-\infty,-8]\cup[6,\infty)$

(+) ∪

12.5) ช่วงที่ทำให้ f มีกราฟเป็นโค้งหงาย/เว้าขึ้น (concave up) คือ $(-\frac{9}{2},6)\cup(6,\infty)$

12.6) f เกิดจุดเปลี่ยนเว้า (reflection point) ที่ $x =$ $-\frac{9}{2}$

12.7) f เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่ $x =$ 6

ข้อ 13 กำหนดข้อมูลของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังต่อไปนี้

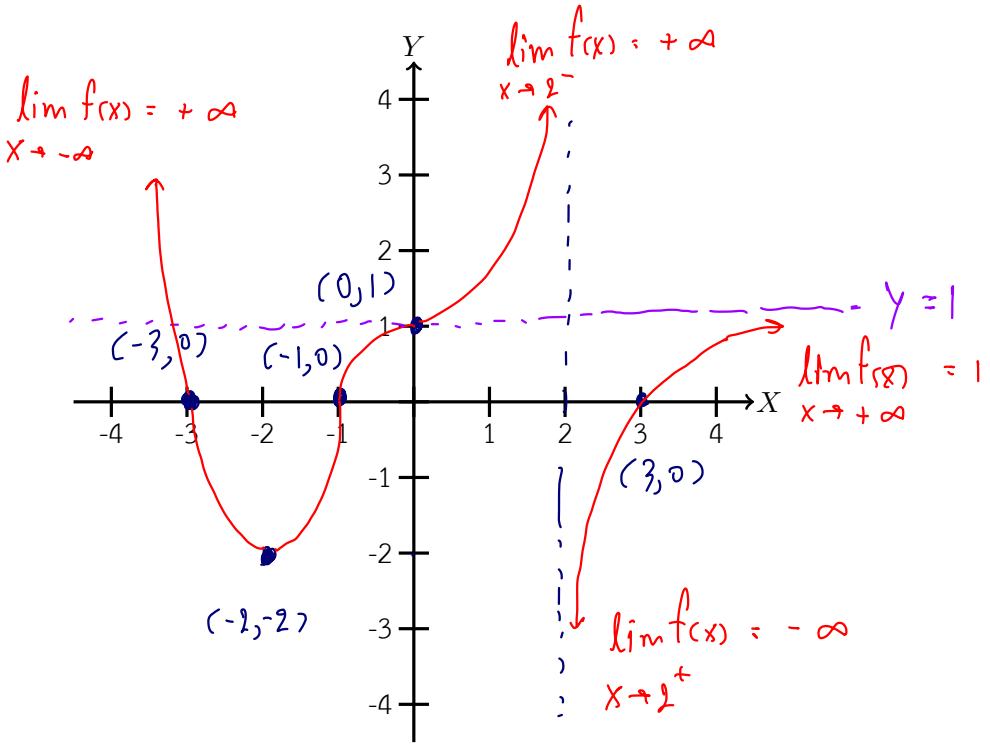
f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$

x	-3	-2	-1	0	3
$f(x)$	0	-2	0	1	0

เครื่องหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงต่าง ๆ แสดงดังตาราง

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

จงร่างกราฟ (sketch) ของฟังก์ชัน $f(x)$ พร้อมทั้งระบุพิกัดของจุดที่กำหนดให้



Cont. ข้างหน้า

ข้อ 14 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ของ $f(x) = x^3 - 12x + 8$ บนช่วง $[0, 1]$

	สัมพัทธ์	สัมบูรณ์
เปรียบเทียบ	จุดใกล้เคียง	ทุกจุดในโดเมน
หาจาก	$f'(x)$	เปรียบเทียบแต่ละจุด
รับประกัน	ไม่รับประกัน	Extreme Value Thm. มีก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องบนช่วงปิด
จำนวน	มีได้หลายจุด	max/min อย่างละค่า

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

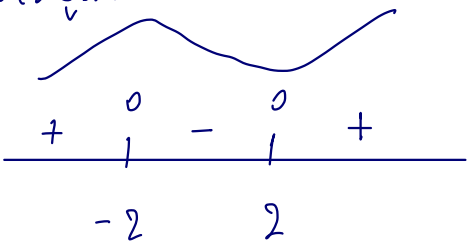
$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$f(0) = 8$

$f(1) = 1 - 12 + 8 = -3$

$\therefore$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0$



* ถ้าจุดวิกฤตอยู่ในช่วง จุดนั้นอาจให้ค่า absolute maximum หรือ absolute minimum