เฉลยแบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาค 206111
ประจำปีการศึกษา 2568

ข้อ 1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1) $y = 7^x + \log_7 x - 7e^x - \cos x$

ตอบ $y' = 7^x \ln 7 + \dfrac{1}{x \ln 7} - 7e^x - (-\sin x)$

หมายเหตุ ใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลฐาน 7 ฟังก์ชันลอการึทึมฐาน 7 ฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลฐาน e และ ฟังก์ชัน cos ตามลำดับ

1.2) $y = \dfrac{1}{(4x^5 - 18)^{112}}$

ตอบ $y' = (-112)(4x^5 - 18)^{-113} \cdot (20x^4) = \dfrac{(-112)(20x^4)}{(4x^5 - 18)^{113}}$

หมายเหตุ สามารถมองเป็น u^{-112} หรือใช้กฎอนุพันธ์ผลหารก็ได้

1.3) $y = \dfrac{3x^5 + 4x^2 + 1}{x^3}$

ตอบ $y' = 6x + 4(-1)x^{-2} + (-3)x^{-4}$

หรือ $y' = \dfrac{(x^3)(15x^4 + 8x) - (3x^5 + 4x^2 + 1)(3x^2)}{x^6}$

หมายเหตุ สามารถหารให้เรียบร้อยเป็น $y = 3x^2 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^3}$ ก่อนหาอนุพันธ์ หรือใช้กฎอนุพันธ์ผลหารก็ได้

1.4) $y = \sqrt[5]{x - \arcsin x}$

ตอบ $y' = \dfrac{1}{5}(x - \arcsin x)^{-4/5} \cdot (1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}})$

หมายเหตุ สามารถมองเป็น $u^{1/5}$

1.5) $y = \dfrac{x}{9^{\cot x}}$

ตอบ $y' = \dfrac{9^{\cot x} - x(9^{\cot x} \ln 9 \cdot (-\csc^2 x))}{9^{2\cot x}}$

หมายเหตุ ใช้กฎอนุพันธ์ผลหาร เศษคือ x ส่วนอยู่ในรูป 9^u

1.6) $y = x^3 \arctan(\pi + x^5)$

ตอบ $y' = \dfrac{x^3 \cdot 5x^4}{1 + (\pi + x^5)^2} + 3x^2 \arctan(\pi + x^5)$

หมายเหตุ ใช้กฎอนุพันธ์ผลคูณระหว่าง x^3 กับ $\arctan u$

1.7) $y = \ln(3x^3 - 7) + 6x^\pi$

ตอบ $y' = \dfrac{9x^2}{3x^3 - 7} + 6\pi x^{\pi - 1}$

หมายเหตุ ใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม

ข้อ 2 กำหนดค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ ดังตาราง

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	-2	3	-1	7
1	1	4	3	-4
2	0	5	-3	-5

จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่างต่อไปนี้

2.1) กำหนดให้ $u(x) = f(x)g(x)$ จะได้ว่า $u'(0) =$ ____-17____

2.2) กำหนดให้ $w(x) = f(g(x))$ จะได้ว่า $w'(1) =$ ____$-4f'(4)$____

2.3) สมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $x = 2$ คือ ____$y = -3x + 6$____

ข้อ 3 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $f^{(11)}(x) = 11e^{-2x}$

3.1) จงหา $f^{(12)}(x)$

ตอบ $f^{(12)}(x) = -22e^{-2x}$

3.2) จงแสดงวิธีหา $f^{(14)}(x)$

วิธีทำ $f^{(13)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(12)}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[-22e^{-2x}\right] = -22e^{-2x} \cdot \frac{d}{dx}[-2x] = 44e^{-2x}$

$f^{(14)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(13)}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[44e^{-2x}\right] = 44e^{-2x} \cdot \frac{d}{dx}[-2x] = -88e^{-2x}$

ตอบ $f^{(14)}(x) = -88e^{-2x}$

ข้อ 4 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $y = (4x-5)^{\tan x}$ โดยใช้สมบัติลอการิทึม (logarithmic differentiation)

วิธีทำ Take ln ทั้งสองข้างของสมการ ได้ว่า หาอนุพันธ์

$$\ln y = \ln(4x-5)^{\tan x}$$
$$\ln y = (\tan x)\ln(4x-5)$$
$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[(\tan x)\ln(4x-5)]$$
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = (\tan x)\frac{d}{dx}[\ln(4x-5)] + \ln(4x-5)\frac{d}{dx}[(\tan x)]$$
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = (\tan x)\frac{1}{4x-5}\cdot\frac{d}{dx}[4x-5] + \ln(4x-5)\cdot\sec^2 x$$
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{4\tan x}{4x-5} + (\sec^2 x)\cdot\ln(4x-5)$$
$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{4\tan x}{4x-5} + (\sec^2 x)\cdot\ln(4x-5)\right)$$

ตอบ $\frac{dy}{dx} = (4x-5)^{\tan x}\left(\frac{4\tan x}{4x-5} + (\sec^2 x)\cdot\ln(4x-5)\right)$

ข้อ 5 จงหา $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}$ เมื่อ $9x^2y^3 + 3^x = 3 + \arctan y$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$\frac{d}{dx}\left[9x^2y^3 + 3^x\right] = \frac{d}{dx}\left[3 + \arctan y\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[9x^2y^3\right] + \frac{d}{dx}\left[3^x\right] = \frac{d}{dx}\left[3\right] + \frac{d}{dx}\left[\arctan y\right]$$

$$\left(9x^2\frac{d}{dx}\left[y^3\right] + y^3\frac{d}{dx}\left[9x^2\right]\right) + 3^x \ln 3 = 0 + \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$9x^2 \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3(18x) + 3^x \ln 3 = \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$27x^2y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = -y^3(18x) - 3^x \ln 3$$

$$\left(27x^2y^2 - \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx} = -y^3(18x) - 3^x \ln 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3(18x) - 3^x \ln 3}{27x^2y^2 - \frac{1}{1+y^2}}$$

แทนค่า $x = 1, y = 0$ ได้ว่า $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = \frac{-0^3(18\cdot 1) - 3^1 \ln 3}{27\cdot 1^2 0^2 - \frac{1}{1+0^2}} = 3\ln 3$

ตอบ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = 3\ln 3$

ข้อ 6 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{5} & \text{ถ้า } x < 5 \\ 5\sqrt{6x-5} & \text{ถ้า } x \geq 5 \end{cases}$

ได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 15$

6.1) จงหา $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{5\sqrt{6(5+h)-5} - 5\sqrt{6(5)-5}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{5\sqrt{25+6h} - 25}{h}$$

$$= 5\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{25+6h} - 5}{h}\cdot\frac{\sqrt{25+6h}+5}{\sqrt{25+6h}+5}$$

$$= 5\lim_{h\to 0^+} \frac{(\sqrt{25+6h})^2 - 5^2}{h(\sqrt{25+6h}+5)}$$

$$= 5\lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{25} + 6h - \cancel{25}}{h(\sqrt{25+6h}+5)}$$

$$= 5\lim_{h\to 0^+} \frac{6\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{25+6h}+5)}$$

$$= 5\lim_{h\to 0^+} \frac{6}{(\sqrt{25+6h}+5)}$$

$$= 5\frac{6}{(\sqrt{25+6(0)}+5)}$$

$$= 3$$

ตอบ $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 3$

6.2) f หาอนุพันธ์ที่ $x=5$ ได้หรือไม่ **เพราะเหตุใด**

ตอบ f **ไม่สามารถ**หาอนุพันธ์ที่ $x=5$ ได้

เนื่องจาก $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} \neq \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$

ทำให้ $f'(5)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$ ไม่สามารถหาค่าได้

ข้อ 7 สมมติ $s=f(t)=6t^2-t+9$ เป็นสมการแสดงตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t
โดย s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที

7.1) จงหาความเร็วเฉลี่ย (average velocity) ของอนุภาค ระหว่างวินาทีที่ 1 ถึง วินาทีที่ 4

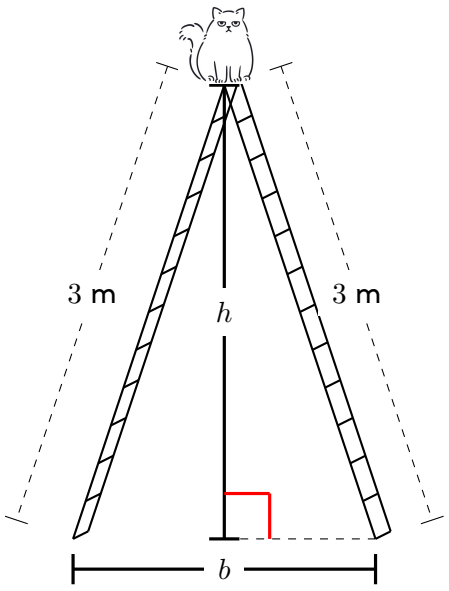
วิธีทำ $v_{ave}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{(6(4)^2-(4)+9)-(6(1)^2-(1)+9)}{3}=\dfrac{101-14}{3}=\dfrac{87}{3}=29$ เมตรต่อวินาที

7.2) จงหาความเร็วชั่วขณะ (instantaneous velocity) ของอนุภาค ณ วินาทีที่ 3

วิธีทำ จาก $f'(t)=12t-1$

ได้ว่า $v_{int}=f'(3)=12(3)-1=35$ เมตรต่อวินาที

ข้อ 8 บันไดพับสามเหลี่ยม ยาวฝั่งละ 3 เมตร วางตั้งอยู่บนพื้นดังรูป
ปลายล่างของบันไดทั้งสองฝั่ง ไถลแยกตัวเออกจากกันด้วยความเร็ว 0.1 เมตรต่อวินาที **จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของจุดสูงสุดของบันได ณ ตอนที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างกัน 2 เมตร**
(กำหนดตัวแปร b แทนระยะห่างระหว่างปลายล่างของบันได และ h แทนความสูงของจุดสูงสุดของบันได)



วิธีทำ โจทย์กำหนด $\dfrac{db}{dt}=0.1$ และ ต้องการให้หาค่า $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{b=2}$

จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัสกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากฝั่งขวา
จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรดังนี้

$$h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=3^2$$

ดังนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ t ได้ดังนี้ $\dfrac{d}{dt}\left[h^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2\right]=\dfrac{d}{dt}[3^2]$

$$2h\frac{dh}{dt}+2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{db}{dt}=0$$

$$2h\frac{dh}{dt}+\left(\frac{b}{2}\right)\frac{db}{dt}=0$$

ณ ตอนที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างกัน 2 เมตร $(b=2)$
จะได้ว่า $h^2+\left(\dfrac{2}{2}\right)^2=3^2$ ดังนั้น $h=2\sqrt{2}$ เมตร

แทนค่า $\dfrac{db}{dt}=0.1$, $b=2$ และ $h=2\sqrt{2}$ ในสมการ จะได้ว่า

$$2(2\sqrt{2})\left.\frac{dh}{dt}\right|_{b=2}+\left(\frac{2}{2}\right)(0.1)=0$$

ทำให้

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{b=2}=-\frac{0.1}{4\sqrt{2}}$$

ตอบ ความสูงของจุดสูงสุดของบันได ณ ตอนที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างกัน 2 เมตร จะ**ลดลง**ด้วยอัตราเร็ว $\dfrac{0.1}{4\sqrt{2}}$ เมตรต่อวินาที

ข้อ 9 จงประมาณค่า $\ln 998$ โดยใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation)
(กำหนดให้ $\ln 1000 = 6.907$)

> **หมายเหตุ** การประมาณค่าเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f ณ จุด $x = x_0$ คือ
> $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \ln x$ จะได้ว่า $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

ดังนั้น $\ln 998$ ประมาณจาก การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f ณ จุด $x = 1000$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\ln 998 &\approx f(1000) + f'(1000)(998 - 1000)\\ &= \ln(1000) + \frac{1}{1000}(998 - 1000)\\ &= 6.907 - 0.002\\ &= 6.905\end{aligned}$$

ตอบ $\ln 998 \approx 6.905$

ข้อ 10 จงระบุค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ในกรณีที่ลิมิตเป็นอนันต์จงระบุให้ชัดเจนว่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หากไม่มีลิมิตให้ระบุว่าไม่มีลิมิต

10.1) $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^5 + 5x^2 - 2x + 111 =$ $+\infty$

10.2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^6 - x + 5}{x^7 - 7x} =$ 0

10.3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 - 8x + 16}}{-3x + 33} =$ 1

10.4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-10000}{\ln(1/x)} =$ 0

10.5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{111} =$ 0

ข้อ 11 จงแสดงวิธีหาค่าลิมิตต่อไปนี้พร้อมทั้งระบุรูปแบบยังไม่กำหนดของลิมิต (indeterminate form) (ถ้ามี)

11.1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{1 - e^x}$ รูปแบบ $\dfrac{0}{0}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{1 - e^x} &= \lim_{x\to0} \frac{\frac{d}{dx}[\tan x]}{\frac{d}{dx}[1 - e^x]} && \text{โดยกฎของโลปิตาล รูปแบบ } \frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to0} \frac{\sec^2 x}{0 - e^x}\\ &= \frac{\sec^2 0}{0 - e^0}\\ &= \frac{1^2}{-1}\\ &= -1\end{aligned}$$

ตอบ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{1 - e^x} = -1$

11.2) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ รูปแบบ $\infty - \infty$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1(x-1)}{(\ln x)(x-1)} - \frac{(\ln x)1}{(\ln x)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)-\ln x}{(\ln x)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{d}{dx}[(x-1)-\ln x]}{\frac{d}{dx}[(\ln x)(x-1)]} && \text{โดยกฎของโลปิตาล รูปแบบ } \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-0-\frac{1}{x}}{(\ln x)(1-0)+(x-1)\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{d}{dx}\left[1-\frac{1}{x}\right]}{\frac{d}{dx}\left[\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right]} && \text{โดยกฎของโลปิตาล รูปแบบ } \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{0+x^{-2}}{\frac{1}{x}+0+x^{-2}} \\
&= \frac{0+1^{-2}}{\frac{1}{1}+0+1^{-2}} \\
&= \frac{1}{1+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ตอบ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

ข้อ 12 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ของ $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ บนช่วง $[1, 2]$

วิธีทำ จาก $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ จะได้ $f'(x) = -2x + 6$

เมื่อแก้สมการ $f'(x) = 0$ จะได้ $0 = -2x + 6$ นั่นคือจุดวิกฤตคือ $x = 3$

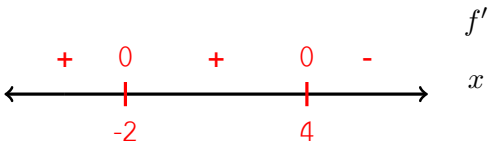
	x	$f(x) = -x^2 + 6x - 7$	หมายเหตุ
ค่า x จากขอบช่วง	1	$f(1) = -(1^2) + 6(1) - 7 = -2$	ค่าต่ำสุด
ค่า x จากขอบช่วง	2	$f(2) = -(2^2) + 6(2) - 7 = 1$	ค่าสูงสุด
ค่า x จากจุดวิกฤต	$\not{3}$		3 ไม่อยู่ในช่วง [1,2] จึงไม่นำมาคิด

ตอบ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ บนช่วง $[1, 2]$ คือ 1 เกิดที่ $x = 2$

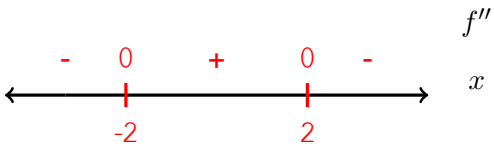
ข้อ 13 กำหนดให้ $f(x) = 16x + 6x^2 - \frac{x^4}{4}, f'(x) = -(x+2)^2(x-4)$ และ $f''(x) = -3(x-2)(x+2)$

13.1) จุดวิกฤต (critical point) ทั้งหมดของ f คือ $x = -2$ และ 4

13.2) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้



13.3) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้



13.4) ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) คือ $(-\infty, 4]$

13.5) ช่วงที่ทำให้ f มีกราฟเป็นโค้งหงาย/เว้าขึ้น (concave up) คือ $(-2, 2)$

13.6) f เกิดจุดเปลี่ยนเว้า (reflection point) ที่ x = $x = -2$ และ 2

13.7) f เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่ x = ไม่มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ข้อ 14 กำหนดข้อมูลของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังต่อไปนี้

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง, โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

x	-2	-1	0	2
$f(x)$	0	2	0	-2

เครื่องหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงต่าง ๆ แสดงดังตาราง

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

จงร่างกราฟ (sketch) ของฟังก์ชัน $f(x)$ พร้อมทั้งระบุพิกัดของจุดที่กำหนดให้

