แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาคชุดที่ 3

ให้ c, n และ $a > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

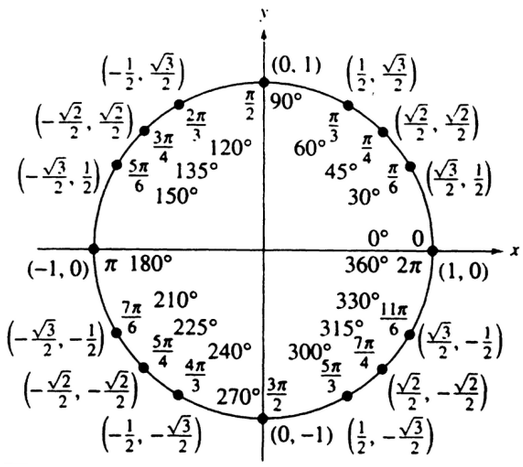
1) $\dfrac{d}{dx}[\arcsin x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $\dfrac{d}{dx}[\arccos x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 3) $\dfrac{d}{dx}[\arctan x] = \dfrac{1}{1+x^2}$

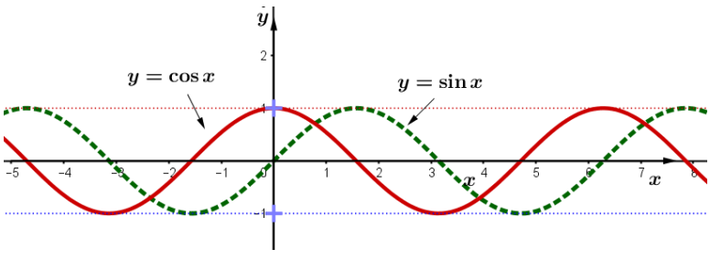
4) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} x] = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 5) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 6) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} x] = -\dfrac{1}{1+x^2}$

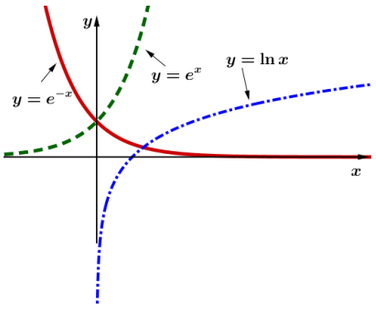
สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ A และ B เป็นจำนวนจริงบวก และ ให้ n และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
- $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$
- $\ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$
- $\log_B(A) = \dfrac{\ln A}{\ln B}$
- $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
- $\dfrac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$
- $\ln(e^A) = A$
- $e^{(\ln A)} = A$







กราฟของ $\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}$ และ $\ln x$

ข้อ 1 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x+6} & \text{ถ้า } 0 \le x < 3 \\ x^2 & \text{ถ้า } x \ge 3 \end{cases}$

ได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = 6$

1.1) จงหา $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

1.2) f หาอนุพันธ์ที่ $x = 3$ ได้หรือไม่ **เพราะเหตุใด**

ข้อ 2 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $f(-2) = -1$ และ $f'(-2) = 4$

2.1) จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $x = -2$

2.2) กำหนดให้ $g(x) = \dfrac{x^2+8x}{f(x)}$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $g'(-2)$

ข้อ 3 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1) $y = e^7 - \dfrac{1}{x^7} + 7^x - \log_7 x$

3.2) $y = x^3 \arccos(3x)$

3.3) $y = \dfrac{111e^x}{\csc x}$

3.4) $y = \tan(9x^2 - e^{9x})$

3.5) $y = 5^{\sqrt{x}} + \log_5(e^{2x} + 3x)$

ข้อ 4 กำหนดให้ $f(x) = -\dfrac{x^4}{4} + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2023$ จงหา

4.1) $\left.\dfrac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=-111}$

4.2) $f^{(111)}(x)$

ข้อ 5 ให้ $y = \dfrac{\sqrt{x+9}(11x^7+x^6)^{99}}{\sin^{100} x}$ จงใช้สมบัติลอการิทึม (logarithmic differentiation) เพื่อหา $\dfrac{dy}{dx}$

ข้อ 6 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันแฝง (implicit function) $2^x = 3y^3e^y$

ข้อ 7 จงประมาณค่า $(4.98)^4$ โดยใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation)

> **หมายเหตุ** การประมาณค่าเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f ณ จุด $x = x_0$ คือ
> $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ข้อ 8 สมมติ $s = f(t) = 5t^3 - 3t^2 + 8$ เป็นสมการแสดงตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t โดย s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที

8.1) จงหาความเร็วเฉลี่ย (average velocity) ของอนุภาค ระหว่างวินาทีที่ 2 ถึง วินาทีที่ 4

8.2) จงหาความเร็วชั่วขณะ (instantaneous velocity) ของอนุภาค ณ วินาทีที่ 5

ข้อ 9 แท่นขุดเจาะน้ำมันกลางทะเลทำน้ำมันรั่วไหลด้วยอัตราคงที่ 4×10^5 ลูกบาศก์นิ้วต่อชั่วโมง
สมมติน้ำมันที่รั่วแพร่เป็นวงกลมรัศมี r ความหนา 1 นิ้วบนผิวน้ำ **จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี ณ ตอนที่รัศมีของคราบน้ำมันเป็น $5,000$ นิ้ว**
(กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของน้ำมันที่รั่วไหล V และ รัศมีของคราบน้ำมัน r สัมพันธ์กันด้วยสมการ $V = \pi r^2$)

ข้อ 10 จงแสดงวิธีหาค่าลิมิต $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x+2}$

ข้อ 11 จงระบุค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ในกรณีที่ลิมิตเป็นอนันต์จงระบุให้ชัดเจนว่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หากไม่มีลิมิตให้ระบุว่าไม่มีลิมิต

11.1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4-3x}{4x-1} =$_____

11.2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) =$_____

ข้อ 12 จงแสดงวิธีหาค่าลิมิตต่อไปนี้พร้อมทั้งระบุรูปแบบยังไม่กำหนดของลิมิต (indeterminate form) (ถ้ามี)

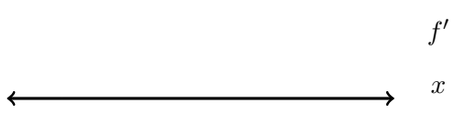
12.1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3-3x^2}{\sin x}$ รูปแบบ_____

12.2) $\lim\limits_{x\to0^+} (x+1)^{1/x}$ รูปแบบ_____

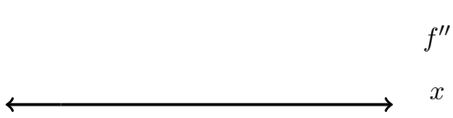
ข้อ 13 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{4}{3}x^3$, $f'(x) = x^2(x-2)(x+2)$ และ $f''(x) = 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

13.1) จุดวิกฤต (critical point) ทั้งหมดของ f คือ _____

13.2) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้



13.3) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้



13.4) ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) คือ _____

13.5) ช่วงที่ทำให้ f มีกราฟเป็นโค้งคว่ำ/เว้าลง (concave down) คือ _____

13.6) f เกิดจุดเปลี่ยนเว้า (reflection point) ที่ $x =$ _____

13.7) f เกิดจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่ $x =$ _____

ข้อ 14 กำหนดข้อมูลของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังต่อไปนี้

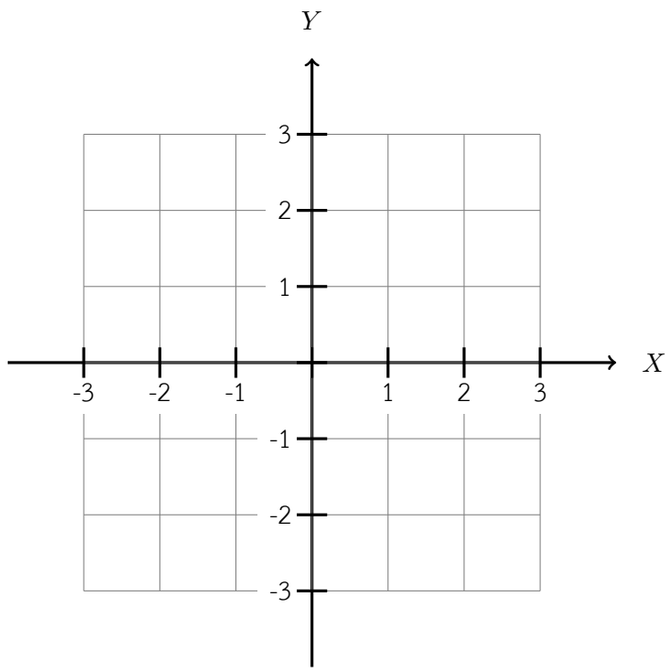
$$\text{โดเมนของ } f \text{ คือ } \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	-2	0	2

เครื่องหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงต่าง ๆ แสดงดังตาราง

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

จงร่างกราฟ (sketch) ของฟังก์ชัน $f(x)$ พร้อมทั้งระบุพิกัดของจุดที่กำหนดให้



ข้อ 15 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ของ $f(x) = x^3 - 12x + 5$ บนช่วง $[0, 2]$

ข้อ 16 เกาะแมวอยู่ห่างจากชายฝั่งสองไมล์ และเราอยู่บ้านบนชายฝั่งห่างจากจุดตรงข้ามเกาะแมวไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะทาง 6 ไมล์ หากต้องการเดินทางไปยังเกาะแมวโดยการปั่นจักรยานออกจากบ้านด้วยความเร็วคงที่ 5 ไมล์ต่อชั่วโมง จากนั้นว่ายน้ำด้วยความเร็วคงที่ 3 ไมล์ต่อชั่วโมง **เราต้องปั่นจักรยานเป็นระยะทางรวมเท่าใดจึงจะใช้เวลาในการเดินทางน้อยสุด**

กำหนดตัวแปรดังนี้ x เป็น ระยะทางปั่นจักรยาน มีหน่วยเป็นไมล์

y เป็น ระยะทางว่ายน้ำ มีหน่วยเป็นไมล์

และ $T(x)$ เป็น เวลารวมในการเดินทาง มีหน่วยเป็นชั่วโมง ซึ่งคำนวณได้จาก $T(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{\sqrt{(6-x)^2+4}}{3}$

ซึ่งได้ตามมาว่า $T'(x) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{(x-6)}{3\sqrt{(x-6)^2+4}}$

