แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาคชุดที่ 1

ให้ c, n และ $a > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

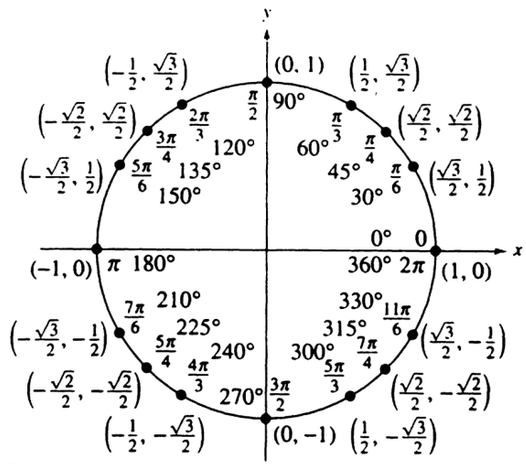
1) $\dfrac{d}{dx}[\arcsin x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $\dfrac{d}{dx}[\arccos x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 3) $\dfrac{d}{dx}[\arctan x] = \dfrac{1}{1+x^2}$

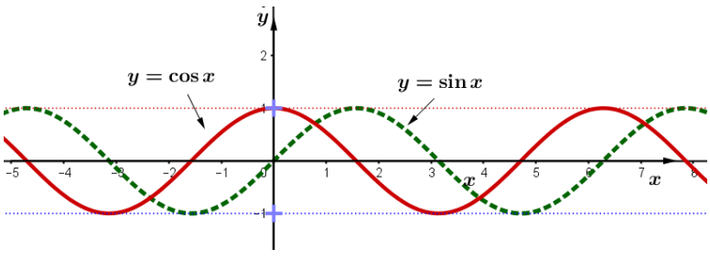
4) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} x] = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 5) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 6) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} x] = -\dfrac{1}{1+x^2}$

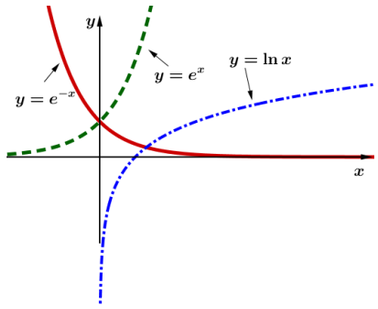
สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ A และ B เป็นจำนวนจริงบวก และให้ n และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
- $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$
- $\ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$
- $\log_B(A) = \dfrac{\ln A}{\ln B}$
- $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
- $\dfrac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$
- $\ln(e^A) = A$
- $e^{(\ln A)} = A$







กราฟของ $\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}$ และ $\ln x$

ข้อ 1 จงหา y' เมื่อ

1.1) $y = \dfrac{1}{x^6} + 2^x + 7\log x + e^{\pi}$

1.2) $y = 3e^{x^2}\arctan(\sin x)$

1.3) $y = \dfrac{\tan(x^2+8)}{x^7+7}$

ข้อ 2 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $f'''(x) = (3x+2)^{11}$ จงหา

2.1) $f^{(4)}(x)$

2.2) $f^{(5)}(x)$

ข้อ 3 กำหนดให้ $t = 4\sqrt{u},\ u = 3 + e^y,\ y = 2\ln x$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\left.\dfrac{dt}{dx}\right|_{x=1}$ โดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule)

ข้อ 4 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $f(2) = 7$ และ $f'(2) = 11$

4.1) จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $x = 2$

4.2) กำหนดฟังก์ชัน $g(x) = x^2 f(x) + 111x$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $g'(2)$

ข้อ 5 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{ถ้า } x < 1 \\ 4\sqrt{x} & \text{ถ้า } x \geq 1 \end{cases}$

ได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 4$

5.1) จงหา $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

5.2) f หาอนุพันธ์ที่ $x = 1$ ได้หรือไม่ **เพราะเหตุใด**

ข้อ 6 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันแฝง (implicit function)

$$\cos(x^2y) = e^{y^2} - 111x + 112$$

ข้อ 7 จงหา $f'(x)$ ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\cot x}$ โดยใช้สมบัติลอการิทึม (logarithmic differentiation)

ข้อ 8 อากาศถูกปั๊มเข้าไปในบอลลูนทรงกลมด้วยอัตราไม่คงที่ มีผลให้รัศมี (r) ของบอลลูนเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 2 เซนติเมตรต่อวินาที สมมติเมื่อเริ่มต้นในบอลลูนไม่มีอากาศ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรบอลลูน (V) ณ วินาทีที่ 10
(กำหนดปริมาตรบอลลูนเป็น $V = \frac{4\pi r^3}{3}$)

ข้อ 9 สมมติปริมาตรของบอลลูน ณ วินาทีที่ t กำหนดโดย $V(t) = 3t^3 + 2t - 4$ ลูกบาศก์เมตร

9.1) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรบอลลูน ระหว่างวินาทีที่ 1 ถึง 3

9.2) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรบอลลูน ณ วินาทีที่ 2 **พร้อมทั้งอธิบายความหมายในเชิงกายภาพ**

ข้อ 10 จงใช้การประมาณเชิงเส้น (linear approximation) ประมาณค่า $\ln(1.03)$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \ln(1+x)$

ข้อ 11 จงแสดงวิธีหาค่าลิมิต $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-3}$

ข้อ 12 จงระบุค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ในกรณีที่ลิมิตเป็นอนันต์จงระบุให้ชัดเจนว่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หากไม่มีลิมิตให้ระบุว่าไม่มีลิมิต

12.1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-4x^7 + 3x^5 - 2x + 4\right) =$_____

12.2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sin x) =$_____

ข้อ 13 จงแสดงวิธีหาค่าลิมิตต่อไปนี้พร้อมทั้งระบุรูปแบบยังไม่กำหนดของลิมิต (indeterminate form) (ถ้ามี)

13.1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{99}}{9^x}$ รูปแบบ_____

13.2) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1}{x}\right)$ รูปแบบ_____

ข้อ 14 กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหาจุดวิกฤต (critical points) ทั้งหมดของ f

ข้อ 15 กำหนดให้ $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 3x^3$, $f'(x) = 3x^2(x+3)$ และ $f''(x) = 9x(x+2)$

15.1) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้



15.2) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้



15.3) ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) คือ _____

15.4) ช่วงที่ทำให้ f มีกราฟเป็นโค้งหงาย/เว้าขึ้น (concave up) คือ _____

15.5) f เกิดจุดเปลี่ยนเว้า (reflection point) ที่ x = _____

15.6) f เกิดจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่ x = _____

15.7) f เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่ x = _____

ข้อ 16 กำหนดข้อมูลของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังต่อไปนี้
โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{1\}$

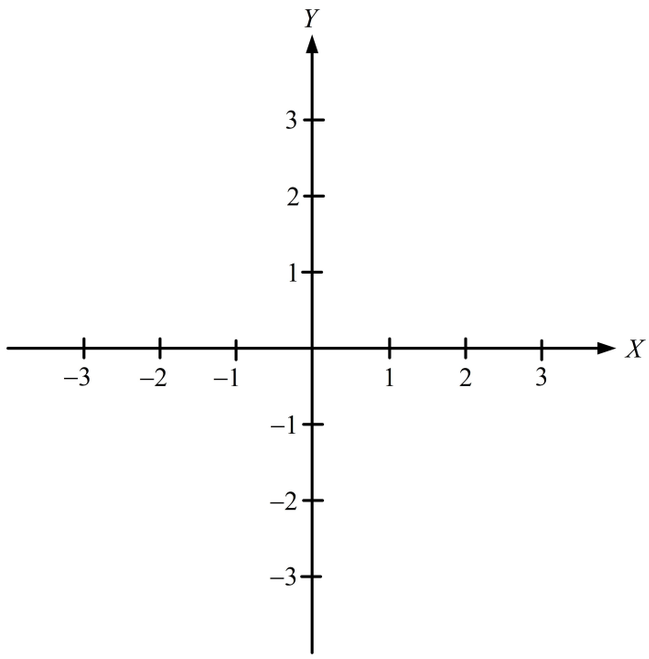
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

x	-2	0	2
$f(x)$	-1	-3	-3
$f'(x)$	-1	0	-1

เครื่องหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงต่าง ๆ แสดงดังตาราง

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$

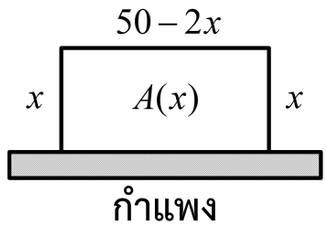
จงร่างกราฟ (sketch) ของฟังก์ชัน $f(x)$



ข้อ 17 ชาวนาคนหนึ่งต้องการสร้างพื้นที่ปิดล้อมรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดใหญ่ซึ่งติดกับกำแพงดังภาพ เขามีเชือกยาว 50 เมตร ในการสร้างรั้ว ถ้าขนาดของพื้นที่ปิดล้อม (ตารางเมตร) สำหรับ x เมตร มีค่า

$$A(x) = x(50 - 2x)$$

จงหาพื้นที่ที่มากที่สุดที่สามารถสร้างได้



พื้นที่ที่มากที่สุดที่สามารถสร้างได้มีค่าเท่ากับ _____ ตารางเมตร