# แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาคชุดที่ 1

ให้ $c$, $n$ และ $a > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

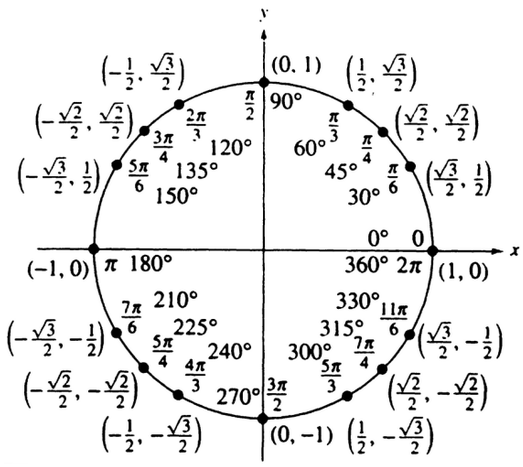
1) $\dfrac{d}{dx}[\arcsin x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $\dfrac{d}{dx}[\arccos x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 3) $\dfrac{d}{dx}[\arctan x] = \dfrac{1}{1+x^2}$

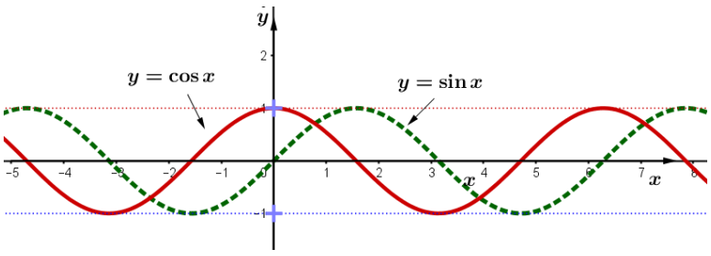
4) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} x] = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 5) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 6) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} x] = -\dfrac{1}{1+x^2}$

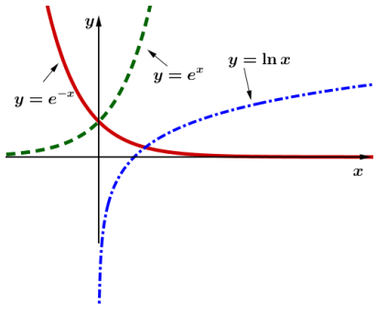
**สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง**

ให้ $A$ และ $B$ เป็นจำนวนจริงบวก และ ให้ $n$ และ $m$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
- $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$
- $\ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$
- $\log_B(A) = \dfrac{\ln A}{\ln B}$
- $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
- $\dfrac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$
- $\ln(e^A) = A$
- $e^{(\ln A)} = A$




กราฟของ $\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}$ และ $\ln x$

**ข้อ 1** จงหา $y'$ เมื่อ

1.1) $y = \dfrac{1}{x^6} + 2^x + 7\log x + e^{\pi}$

1.2) $y = 3e^{x^2}\arctan(\sin x)$

1.3) $y = \dfrac{\tan(x^2+8)}{x^7+7}$

**ข้อ 2** กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $f'''(x) = (3x+2)^{11}$ จงหา

2.1) $f^{(4)}(x)$

2.2) $f^{(5)}(x)$

**ข้อ 3** กำหนดให้ $t = 4\sqrt{u},\ u = 3 + e^y,\ y = 2\ln x$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\left.\dfrac{dt}{dx}\right|_{x=1}$ โดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule)

**ข้อ 4** กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $f(2) = 7$ และ $f'(2) = 11$

4.1) จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $x = 2$

4.2) กำหนดฟังก์ชัน $g(x) = x^2 f(x) + 111x$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $g'(2)$

**ข้อ 5** กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{ถ้า } x < 1 \\ 4\sqrt{x} & \text{ถ้า } x \geq 1 \end{cases}$

ได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 4$

5.1) จงหา $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

5.2) $f$ หาอนุพันธ์ที่ $x = 1$ ได้หรือไม่ **เพราะเหตุใด**

# แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาคชุดที่ 1

**ข้อ 1** จงหา $y'$ เมื่อ

1.1) $y = \frac{1}{x^6} + 2^x + 7\log x + e^{\pi}$

1.2) $y = 3e^{x^2}\arctan(\sin x)$

1.3) $y = \frac{\tan(x^2+8)}{x^7+7}$

1.1) $y' = -6x^{-7} + 2^x \ln 2 + \frac{7}{x \ln 10}$

1.2) $y' = \frac{3e^{x^2}\cos x}{1+\sin^2 x} + 6x e^{x^2}\arctan(\sin x)$

1.3) $\frac{(x^7+7)\sec^2(x^2+8)2x - \tan(x^2+8)7x^6}{(x^7+7)^2}$

**ข้อ 2** กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $f'''(x) = (3x+2)^{11}$ จงหา

2.1) $f^{(4)}(x)$

2.2) $f^{(5)}(x)$

2.1) $f^{(4)}(x) = 33(3x+2)^{10}$

2.2) $f^{(5)}(x) = 990(3x+2)^{9}$

**ข้อ 3** กำหนดให้ $t = 4\sqrt{u},\ u = 3+e^y,\ y = 2\ln x$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=1}$ โดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule)

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{du}\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{u}}e^y\frac{2}{x}$$

$$\therefore \left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=1} = \frac{2}{\sqrt{4}}e^0\frac{2}{1} = 2$$

เมื่อ $x=1$

$y = 2\ln 1 = 0$

$u = 3+e^0 = 4$

**ข้อ 4** กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $f(2)=7$ และ $f'(2)=11$

4.1) จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y=f(x)$ ที่จุด $x=2$

4.2) กำหนดฟังก์ชัน $g(x)=x^2f(x)+111x$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $g'(2)$

4.1) $y-f(2) = f'(2)(x-2)$

$\therefore \quad y-7 = 11(x-2)$

4.2) $g'(x) = x^2f'(x) + 2xf(x) + 111$

$\therefore \quad g'(2) = 2^2f'(2) + 2(2)f(2) + 111$

$= 4(11) + 4(7) + 111$

$= 44 + 28 + 111 = 183$

**ข้อ 5** กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 4x & \text{ถ้า } x<1 \\ 4\sqrt{x} & \text{ถ้า } x\geq 1 \end{cases}$

ได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=4$

5.1) จงหา $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

5.2) $f$ หาอนุพันธ์ที่ $x=1$ ได้หรือไม่ **เพราะเหตุใด**

5.1) $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{4\sqrt{1+h}-4}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{4(\sqrt{1+h}-1)}{h}\left(\dfrac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}\right)$

$= \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{4(1+h-1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{4h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = 2$

5.2) $f$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x=1$ เพราะ

$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 4 \neq 2 = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

**ข้อ 6** จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันแฝง (implicit function)

$$\cos(x^2y) = e^{y^2} - 111x + 112$$

**ข้อ 7** จงหา $f'(x)$ ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\cot x}$ โดยใช้สมบัติลอการิทึม (logarithmic differentiation)

**ข้อ 8** อากาศถูกปั๊มเข้าไปในบอลลูนทรงกลมด้วยอัตราไม่คงที่ มีผลให้รัศมี $(r)$ ของบอลลูนเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 2 เซนติเมตรต่อวินาที สมมติเมื่อเริ่มต้นในบอลลูนไม่มีอากาศ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรบอลลูน $(V)$ ณ วินาทีที่ 10
(กำหนดปริมาตรบอลลูนเป็น $V = \frac{4\pi r^3}{3}$)

**ข้อ 9** สมมติปริมาตรของบอลลูน ณ วินาทีที่ $t$ กำหนดโดย $V(t) = 3t^3 + 2t - 4$ ลูกบาศก์เมตร

9.1) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรบอลลูน ระหว่างวินาทีที่ 1 ถึง 3

9.2) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรบอลลูน ณ วินาทีที่ 2 **พร้อมทั้งอธิบายความหมายในเชิงกายภาพ**

**ข้อ 10** จงใช้การประมาณเชิงเส้น (linear approximation) ประมาณค่า $\ln(1.03)$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \ln(1+x)$

**ข้อ 11** จงแสดงวิธีหาค่าลิมิต $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-3}$

**ข้อ 12** จงระบุค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ในกรณีที่ลิมิตเป็นอนันต์จงระบุให้ชัดเจนว่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หากไม่มีลิมิตให้ระบุว่าไม่มีลิมิต

12.1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-4x^7 + 3x^5 - 2x + 4\right) =$_____

12.2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sin x) =$_____

**ข้อ 13** จงแสดงวิธีหาค่าลิมิตต่อไปนี้พร้อมทั้งระบุรูปแบบยังไม่กำหนดของลิมิต (indeterminate form) (ถ้ามี)

13.1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{99}}{9^x}$ รูปแบบ_____

13.2) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1}{x}\right)$ รูปแบบ_____

**ข้อ 14** กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหาจุดวิกฤต (critical points) ทั้งหมดของ $f$

**ข้อ 15** กำหนดให้ $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 3x^3$, $f'(x) = 3x^2(x+3)$ และ $f''(x) = 9x(x+2)$

15.1) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้




15.2) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้




15.3) ช่วงที่ทำให้ $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) คือ _____

15.4) ช่วงที่ทำให้ $f$ มีกราฟเป็นโค้งหงาย/เว้าขึ้น (concave up) คือ _____

15.5) $f$ เกิดจุดเปลี่ยนเว้า (reflection point) ที่ $x$ = _____

15.6) $f$ เกิดจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่ $x$ = _____

15.7) $f$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่ $x$ = _____

**ข้อ 6** จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันแฝง (implicit function)

$$\cos(x^2y) = e^{y^2} - 111x + 112$$

$$-\sin(x^2y)\left[x^2\frac{dy}{dx} + 2xy\right] = e^{y^2}2y\frac{dy}{dx} - 111$$

$$-\sin(x^2y)x^2\frac{dy}{dx} - \sin(x^2y)2xy = e^{y^2}2y\frac{dy}{dx} - 111$$

$$-\sin(x^2y)x^2\frac{dy}{dx} - e^{y^2}2y\frac{dy}{dx} = \sin(x^2y)2xy - 111$$

$$\left(-\sin(x^2y)x^2 - e^{y^2}2y\right)\frac{dy}{dx} = \sin(x^2y)2xy - 111$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x^2y)2xy - 111}{-\sin(x^2y)x^2 - e^{y^2}2y}$$

**ข้อ 7** จงหา $f'(x)$ ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\cot x}$ โดยใช้สมบัติลอการิทึม (logarithmic differentiation)

ให้ $y = f(x)$ $\therefore$ $y = x^{\cot x}$

$$\therefore \ln y = \ln(x^{\cot x})$$

$$\ln y = (\cot x)\ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cot x}{x} - (\csc^2 x)\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cot x}{x} - (\csc^2 x)\ln x\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\cot x}\left[\frac{\cot x}{x} - (\csc^2 x)\ln x\right]$$

**ข้อ 8** อากาศถูกปั๊มเข้าไปในบอลลูนทรงกลมด้วยอัตราไม่คงที่ มีผลให้รัศมี $(r)$ ของบอลลูนเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 2 เซนติเมตรต่อวินาที สมมติเมื่อเริ่มต้นในบอลลูนไม่มีอากาศ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรบอลลูน $(V)$ ณ วินาทีที่ 10

(กำหนดปริมาตรบอลลูนเป็น $V = \frac{4\pi r^3}{3}$)

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

ณ $t = 10$ วินาที $r = 2(10) = 20$ cm และจากโจทย์ $\frac{dr}{dt} = 2$ cm/s

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi(20^2)(2) = 3{,}200\pi \quad cm^3/s$$

**ข้อ 9** สมมติปริมาตรของบอลลูน ณ วินาทีที่ $t$ กำหนดโดย $V(t) = 3t^3 + 2t - 4$ ลูกบาศก์เมตร

9.1) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรบอลลูน ระหว่างวินาทีที่ 1 ถึง 3

9.2) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรบอลลูน ณ วินาทีที่ 2 **พร้อมทั้งอธิบายความหมายในเชิงกายภาพ**

9.1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย $= \frac{V(3) - V(1)}{3 - 1} = \frac{83 - 1}{2} = 41$ $m^3/s$

9.2) จากโจทย์ จะได้ว่า $V'(t) = 9t^2 + 2$

$\therefore$ อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ วินาทีที่ 2 $= V'(2) = 38$ $m^3/s$

**ข้อ 10** จงใช้การประมาณเชิงเส้น (linear approximation) ประมาณค่า $\ln(1.03)$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \ln(1 + x)$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

จาก $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

ให้ $x_0 = 0$ และ $\Delta x = 0.03$

$$\therefore \quad f(0.03) \approx f(0) + f'(0)(0.03)$$

$$\ln(1.03) \approx \ln 1 + 1(0.03)$$

$$\therefore \quad \ln(1.03) \approx 0.03$$

**ข้อ 11** จงแสดงวิธีหาค่าลิมิต $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-9/x^2)}}{2x-3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-9/x^2}}{x(2-3/x)}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-0}}{2-0} = \frac{-1}{2}$$

**ข้อ 12** จงระบุค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ในกรณีที่ลิมิตเป็นอนันต์จงระบุให้ชัดเจนว่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หากไม่มีลิมิตให้ระบุว่าไม่มีลิมิต

12.1) $\lim_{x\to\infty} (-4x^7+3x^5-2x+4) =$ $-\infty$

12.2) $\lim_{x\to-\infty} (x-\sin x) =$ $-\infty$

**ข้อ 13** จงแสดงวิธีหาค่าลิมิตต่อไปนี้พร้อมทั้งระบุรูปแบบยังไม่กำหนดของลิมิต (indeterminate form) (ถ้ามี)

13.1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{99}}{9^x}$ รูปแบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{99x^{98}}{9^x \ln 9} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{99!}{9^x (\ln 9)^{99}}$$

$$= 0$$

13.2) $\lim_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1}{x}\right)$ รูปแบบ $\infty-\infty$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x-(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x-1+\cos x}{x(1-\cos x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1-\sin x}{x(-(-\sin x))+(1-\cos x)}$$

$$= +\infty$$

**ข้อ 14** กำหนดให้ $f(x) = 2x^2-8x-10$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหาจุดวิกฤต (critical points) ทั้งหมดของ $f$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 4x-8 = 4(x-2)$

$f'(x)$ หาค่าไม่ได้ ไม่มี

$f'(x)=0$

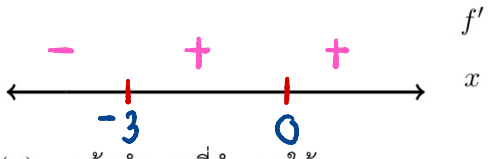
$4(x-2)=0$

$\therefore x=2$

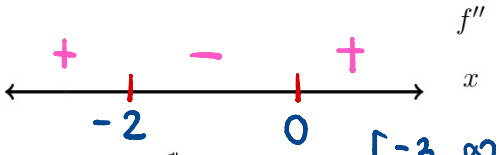
$\therefore x=2$ เป็นจุดวิกฤตของ $f$

**ข้อ 15** กำหนดให้ $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 3x^3$, $f'(x) = 3x^2(x+3)$ และ $f''(x) = 9x(x+2)$

15.1) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้




15.2) จงแบ่งช่วงและเติมเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้




15.3) ช่วงที่ทำให้ $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) คือ $[-3, \infty)$

15.4) ช่วงที่ทำให้ $f$ มีกราฟเป็นโค้งหงาย/เว้าขึ้น (concave up) คือ $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

15.5) $f$ เกิดจุดเปลี่ยนเว้า (reflection point) ที่ $x$ = $-2, 0$

15.6) $f$ เกิดจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่ $x$ = ไม่มี

15.7) $f$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่ $x$ = $-3$

**ข้อ 16** กำหนดข้อมูลของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังต่อไปนี้
โดเมนของ $f$ คือ $\mathbb{R} - \{1\}$

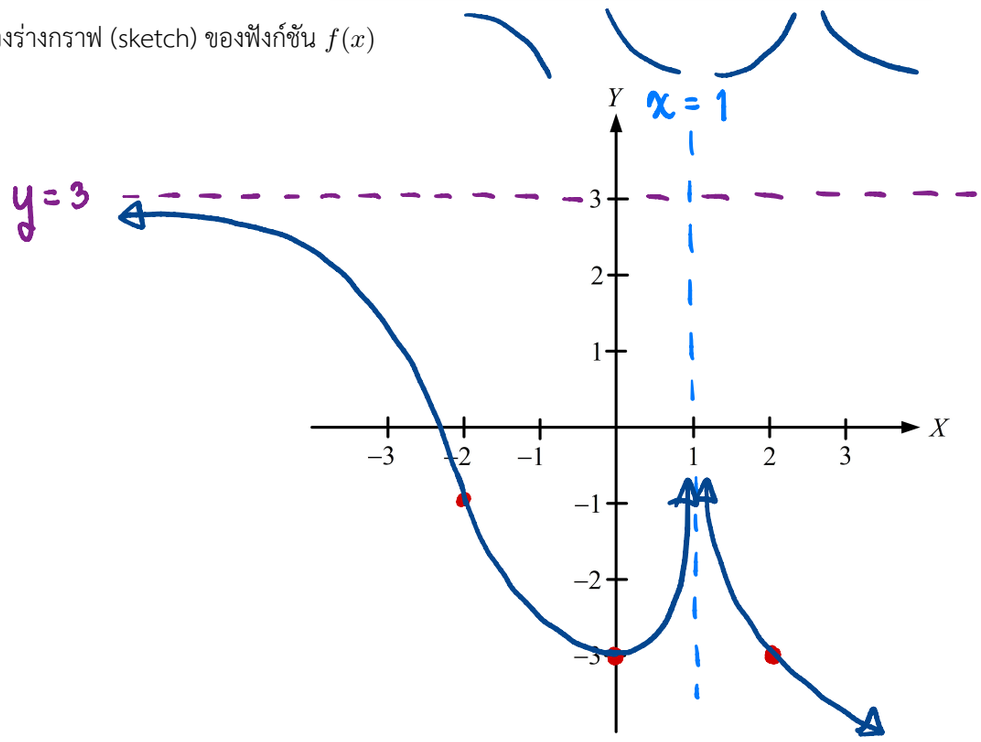
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

| $x$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $-3$ | $-3$ |
| $f'(x)$ | $-1$ | $0$ | $-1$ |

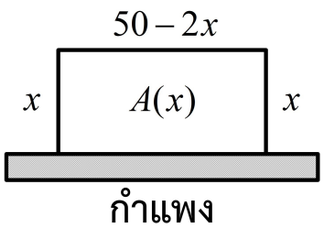
เครื่องหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงต่าง ๆ แสดงดังตาราง

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,0)$ | $(0,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |

จงร่างกราฟ (sketch) ของฟังก์ชัน $f(x)$




**ข้อ 17** ชาวนาคนหนึ่งต้องการสร้างพื้นที่ปิดล้อมรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดใหญ่ซึ่งติดกับกำแพงดังภาพ เขามีเชือกยาว 50 เมตร ในการสร้างรั้ว ถ้าขนาดของพื้นที่ปิดล้อม (ตารางเมตร) สำหรับ $x$ เมตร มีค่า




$$A(x) = x(50-2x) \quad \rightarrow \quad 50-2x > 0$$

จงหาพื้นที่ที่มากที่สุดที่สามารถสร้างได้

พื้นที่ที่มากที่สุดที่สามารถสร้างได้มีค่าเท่ากับ 312.5 ตารางเมตร

พิจารณา $A(x) = 50x - 2x^2, \quad 0 < x < 25$

$\therefore \quad A'(x) = 50 - 4x = -2(2x-25)$

$A'(x)$ หาค่าไม่ได้ ไม่มี

$A'(x) = 0$

$-2(2x-25) = 0$

$\therefore x = \frac{25}{2}$

