แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบปลายภาค ภาคเรียนที่ 1/68

ข้อ 1 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1.1) $\int 4 + 4\sec^2 x + \frac{4}{1+x^2}\, dx$

$= 4x + 4\tan x + 4\arctan x + C$

1.2) $\int \frac{e^x}{\sqrt{4+e^x}}\, dx$

$u = 4 + e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$= \int \frac{e^x}{\sqrt{u}} \frac{du}{e^x}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$

$= 2\sqrt{u} + C$

$= 2\sqrt{4+e^x} + C$

1.3) $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}\, dx$

$u = 1 + \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$= \int \frac{\sin x}{u^3} \cdot \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int \frac{1}{u^3}\, du$

$= -\left(-\frac{1}{2u^2}\right) + C$

$= \frac{1}{2u^2} + C = \frac{1}{2(1+\cos x)^2} + C$

1.4) $\int 8^{(x^3-6x+3)} \cdot (x^2-2)\, dx$

$u = x^3 - 6x + 3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 6$

$= \int 8^u (x^2-2) \cdot \frac{du}{3x^2-6}$

$= \frac{1}{3}\int 8^u\, du$

$= \frac{8^u}{3\ln 8} + C$

$= \frac{8^{x^3-6x+3}}{3\ln 8} + C$

ข้อ 2 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int (x^2+1)\ln(5x)\, dx$ โดยใช้เทคนิคอินทิเกรตแบบแบ่งส่วน (integration by parts)

Integrate by parts: $\int \mathrm{f}\mathrm{g}' = \mathrm{f}\mathrm{g} - \int \mathrm{f}'\mathrm{g}$,

$\mathrm{f} = \ln(5x), \mathrm{g}' = x^2 + 1$

$\downarrow$ steps $\quad \downarrow$ steps

$\mathrm{f}' = \frac{1}{x}, \quad \mathrm{g} = \frac{x^3}{3} + x$:

$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\ln(5x) - \int \frac{\frac{x^3}{3} + x}{x}\, \mathrm{d}x$

Expand:

$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\ln(5x) - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1\right)\mathrm{d}x$

$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\ln(5x) - \frac{x^3}{9} - x + C$

ข้อ 3 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \sin^{115} x \cos^3 x \, dx$

ให้ $u = \sin x \Rightarrow$ $\int \sin^{115}x \cos^3 x \, dx = \int u^{115}(\cos^2 x) \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^{115}(1-u^2) \, du$

$= \int u^{115} - u^{117} \, du$

$= \frac{u^{116}}{116} - \frac{u^{118}}{118} + C$

$= \frac{\sin^{116} x}{116} - \frac{\sin^{118} x}{118} + C$

ข้อ 4 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \sin(\frac{23}{2}x)\cos(\frac{17}{2}x) \, dx$

$\int \sin(\frac{23}{2}x)\cos(\frac{17}{2}x) \, dx = \int \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{23}{2}x + \frac{17}{2}x\right) + \sin\left(\frac{23}{2}x - \frac{17}{2}x\right)\right\} dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin(20x) + \sin(3x) \, dx$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(20x)}{20} - \frac{\cos(3x)}{3}\right) + C$

$= -\frac{\cos(20x)}{40} - \frac{\cos(3x)}{6} + C$

ข้อ 5 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \, dx$ โดยวิธีแทนค่าตรีโกณมิติ (trigonometric substitution)

ให้ $x = 2\sec\theta$

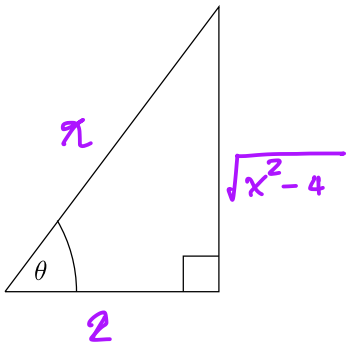
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \, dx = \int \frac{2\sec\theta}{\sqrt{(2\sec\theta)^2-4}} \, d(2\sec\theta)$

$= \int \frac{2\sec\theta \cdot 2\sec\theta\tan\theta}{2\tan\theta} \, d\theta$

$= \int 2\sec^2\theta \, d\theta$

$= 2\tan\theta + C$

$= \sqrt{x^2-4} + C$



ข้อ 6 จงเขียนฟังก์ชันตรรกยะต่อไปนี้ในรูปเศษส่วนย่อย (partial fraction) **โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงที่ที่สมมติขึ้น**

$$\frac{x^2+3x+5}{x(x+10)^2(x^2+5)} = \boxed{\frac{A}{x}+\frac{B}{x+10}+\frac{C}{(x+10)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+5}}$$

ข้อ 7 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$

เมื่อกำหนดรูปเศษส่วนย่อย $\frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= -\ln|x+2| + \ln|x^2+x+1| + C$$

ข้อ 8 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

8.1) $\int_9^9 \sin x\,dx =$ __0__

8.2) $\frac{d}{dx}\left[\int_7^x t\ln t\,dt\right] =$ __$x\ln x$__

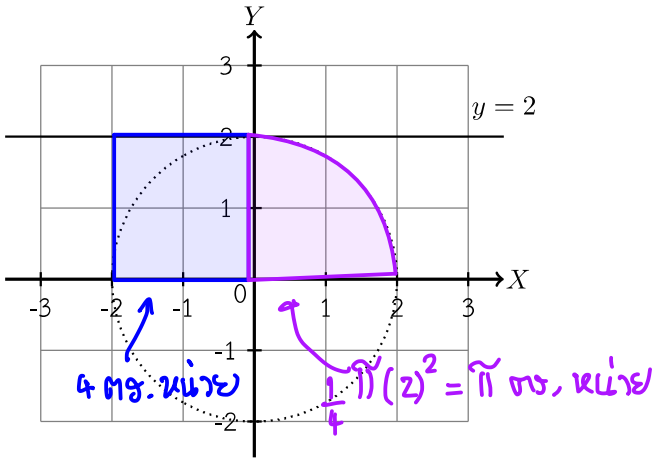
8.3) ถ้า $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+7}\,dx = \int_{\clubsuit}^{\heartsuit} \sqrt{u}\,du$ แล้ว $\clubsuit =$ __7__ และ $\heartsuit =$ __8__

ข้อ 9 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2 & ;x \le 0 \\ \sqrt{4-x^2} & ;0 < x \le 2 \end{cases}$

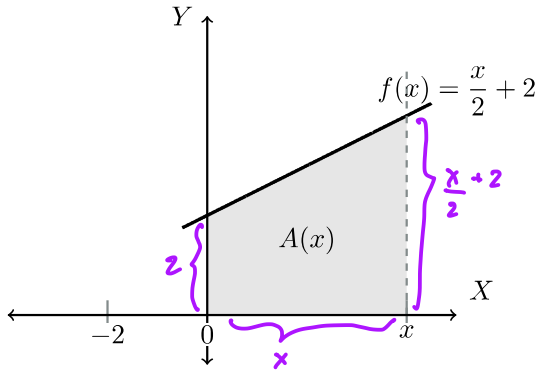
จง**แรเงาบริเวณที่สอดคล้องกับปริพันธ์จำกัดเขต**ต่อไปนี้ พร้อมเติมตัวเลขที่ถูกต้องลงในช่องว่าง $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} 2\,dx + \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= \underline{4+\pi}$$



ข้อ 10 ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ใต้กราฟ $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ บนช่วง $[0, x]$



10.1) จงหา $A(x) =$ $\frac{1}{2}(2 + \frac{x}{2} + 2)$ $= \frac{x^2}{4} + 2x$

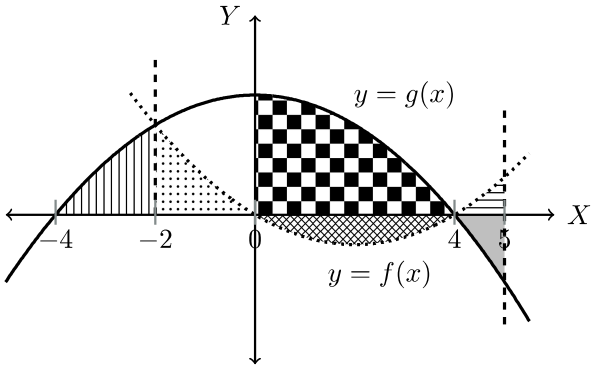
10.2) จงหา $A(1) =$ $\frac{1^2}{4} + 2(1) = \frac{9}{4}$

10.3) จงหา $\frac{d}{dx}[A(x)]$

$\frac{d}{dx}[A(x)] = \frac{d}{dx}[\frac{x^2}{4} + 2x] = \frac{x}{2} + 2 = f(x)$

ข้อ 11 จากกราฟต่อไปนี้ จงเติมค่าอินทิกรัลต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้พื้นที่แรเงาแต่ละส่วนมีขนาดตามตัวอักษรที่ระบุ

$= A$ $= B$ $= C$ $= D$ $= E$ $= F$ $= G$



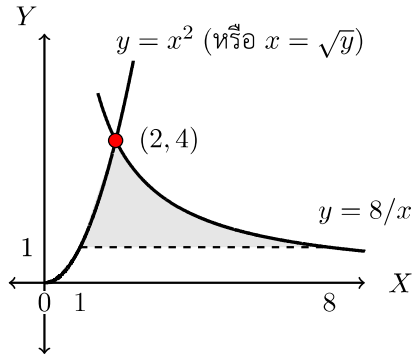
11.1) $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx =$ B − E

11.2) $\int_{-4}^{0} g(x)\,dx =$ A+B+C

11.3) $\int_{-2}^{4} (g(x) - f(x))\,dx =$ C+D+E

11.4) $\int_{4}^{5} (f(x) - g(x))\,dx =$ F+G

ข้อ 12 กำหนดบริเวณที่แรเงาดังรูป จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาพื้นที่บริเวณที่แรเงา **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



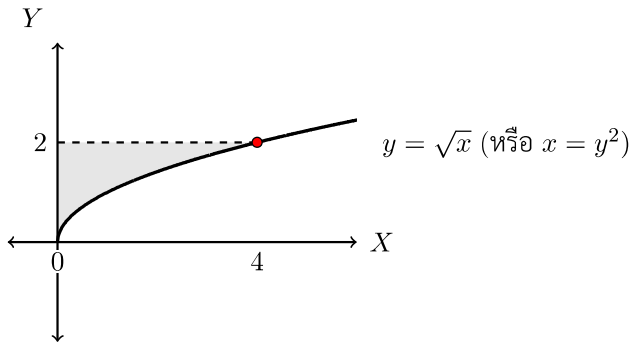
12.1) โดยการอินทิเกรตเทียบ x

พื้นที่ = $\int_1^2 x^2 - 1\,dx + \int_2^8 \frac{8}{x} - 1\,dx$ หรือ $\int_1^2 x^2\,dx + \int_2^8 \frac{8}{x}\,dx - \int_1^8 1\,dx$

12.2) โดยการอินทิเกรตเทียบ y

พื้นที่ = $\int_1^4 \frac{8}{y} - \sqrt{y}\,dy$

ข้อ 13 กำหนดบริเวณที่แรเงาดังรูป จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาปริมาตรทรงตันการหมุนรอบ (solid of revolution) ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



13.1) วิธี Disks หรือ Washers รอบแกน X

ปริมาตร = $\pi\int_0^4 2^2 - \sqrt{x}^2\,dx$

13.2) วิธี Disks หรือ Washers รอบแกน Y

ปริมาตร = $\pi\int_0^2 (y^2)^2\,dx$

13.3) วิธี Cylindrical Shells รอบแกน X

ปริมาตร = $2\pi\int_0^2 y(y^2)\,dy$

13.4) วิธี Cylindrical Shells รอบแกน Y

ปริมาตร = $2\pi\int_0^4 x(2-\sqrt{x})\,dx$

ข้อ 14 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

14.1) $\int_{-\infty}^{\infty} 2x\,dx =$ $\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 2x\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2x\,dx$

14.2) $\int_0^2 \frac{1}{x(x-2)}dx =$ $\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{x(x-2)}\,dx + \lim_{b\to2^-}\int_1^b \frac{1}{x(x-2)}\,dx$

ข้อ 15 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้

$$\int_3^{\infty} \frac{3}{x} dx$$

$$\int_3^{\infty} \frac{3}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_3^{b} \frac{3}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[3\ln|x|\right]_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} 3\ln|b| - 3\ln|3|$$

$$= \infty$$

ข้อ 16 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบทั่วไปของสมการแยกได้ต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{11+\sqrt{y}}$$

$$(11+\sqrt{y})\,dy = \sin x\,dx$$

$$\int (11+\sqrt{y})\,dy = \int \sin x\,dx$$

$$11y + \frac{y^{3/2}}{3/2} = -\cos x + C$$

ข้อ 17 จงหาคำตอบเฉพาะ (particular solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad x > 0 \quad \text{และ} \quad y(1) = 9$$

เมื่อกำหนดให้ $y = x\ln x + Cx$ เป็นคำตอบทั่วไป

จาก $y(1) = 9$ แทนค่า $x = 1,\ y = 9$

$$9 = 1\ln 1 + C\cdot 1$$

$$\therefore C = 9$$

คำตอบเฉพาะคือ $y = x\ln x + 9x$

** หมายเหตุ โจทย์บางข้อ ไป

ข้อ 18 กำหนดสมการ

$$\frac{dy}{dx} + 9y = e^{-7x}$$

18.1) จงหาตัวประกอบการอินทิเกรต (integrating factor)

$$I = e^{\int 9\,dx} = e^{9x}$$

18.2) จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบทั่วไป

$$e^{9x}\left(\frac{dy}{dx} + 9y\right) = e^{9x} \cdot e^{-7x}$$

$$e^{9x}\frac{dy}{dx} + 9e^{9x}y = e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{9x}y] = e^{2x}$$

$$\int d[e^{9x}y] = \int e^{2x}\,dx$$

$$e^{9x}y = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\therefore \quad y = \frac{\frac{e^{2x}}{2} + C}{e^{9x}} = \frac{e^{-7x}}{2} + Ce^{-7x}$$