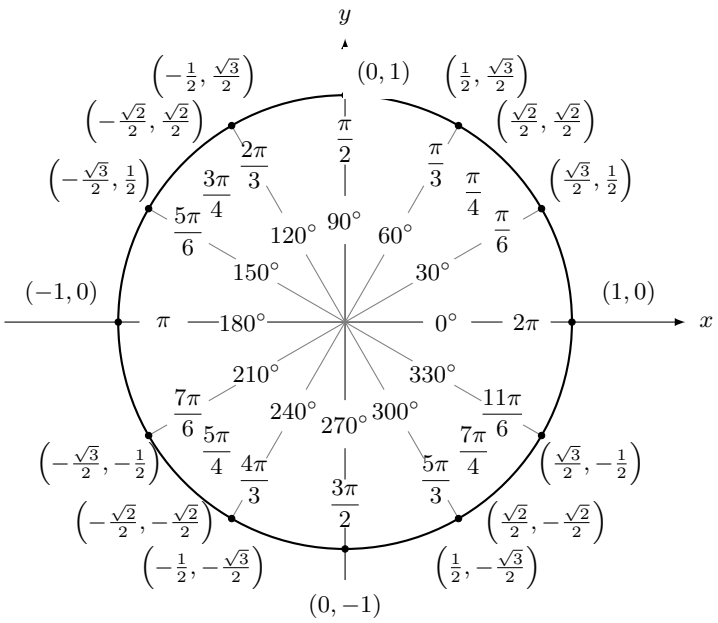
สูตรที่ให้ในการสอบปลายภาค 1/67

สูตรอินทิเกรต (บางส่วน)

ให้ C และ $a > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\displaystyle\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$
- $\displaystyle\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\displaystyle\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

Unit Circle



เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

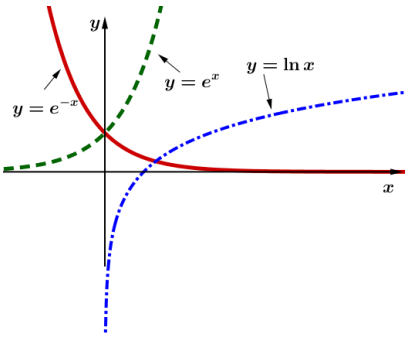
ให้ m และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}$
- $\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$
- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}$

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ A และ B เป็นจำนวนจริงบวก และ ให้ n และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
- $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$
- $\ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$
- $\log_B(A) = \dfrac{\ln A}{\ln B}$
- $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
- $\dfrac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$
- $\ln(e^A) = A$
- $e^{(\ln A)} = A$



กราฟของ e^x, e^{-x} และ $\ln x$

เฉลย

แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบปลายภาค ชุดที่ 2

ข้อ 1 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1.1) $\int (e^7 - 7^x + x^7 - 7\sin x)dx$

1.2) $\int \left(\frac{x^2 - x^4}{x^3} + \frac{1}{25 + x^2}\right) dx$

1.3) $\int e^{\tan x} \sec^2 x \, dx$

1.4) $\int 12x^5\sqrt{x^6 + 111} \, dx$

ข้อ 2 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{\ln x}{x^4} \, dx$ โดยใช้เทคนิคอินทิเกรตแบบแบ่งส่วน (integration by parts)

ข้อ 3 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \sin^5 x \, dx$

ข้อ 4 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \sin(7x)\sin(2x) \, dx$

ข้อ 5 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \, dx$ โดยวิธีแทนค่าตรีโกณมิติ (trigonometric substitution)

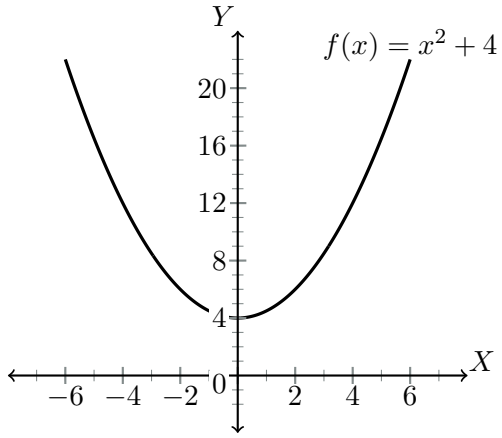
ข้อ 6 จงเขียนฟังก์ชันตรรกยะต่อไปนี้ในรูปเศษส่วนย่อย (partial fraction) **โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงที่ที่สมมติขึ้น**

$$\frac{100x}{(x+1)(x-1)(x^2+2x+3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x+3)^2}$$

ข้อ 7 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{4x^3 + 3x^2 + 18}{x^2(x^2+9)} \, dx$

เมื่อ $\frac{4x^3 + 3x^2 + 18}{x^2(x^2+9)}$ เขียนในรูปเศษส่วนย่อยได้ดังนี้ $\frac{4x^3 + 3x^2 + 18}{x^2(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$

ข้อ 8 ให้ $f(x) = x^2 + 4$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[-4, 4]$



ในการประมาณพื้นที่ใต้กราฟด้วยวิธีสี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangle approximation method)
โดยแบ่งช่วง $[-4, 4]$ ออกเป็น 2 ช่วงย่อยที่มีความกว้างเป็น Δx เท่า ๆ กัน

8.1) จงหา $\Delta x =$ 4

8.2) กำหนด A_2 แทนพื้นที่ใต้กราฟที่ได้จากการใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้า 2 รูป จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่า A_2 เมื่อกำหนดให้ความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นค่าของ $f(x)$ ณ **จุดปลายซ้ายของแต่ละช่วงย่อย**

$$A_2 = 4f(-4) + 4f(0)$$
$$= 4(20) + 4(4)$$
$$= 96$$



Ví dụ 1

1.1) $e^x - \frac{7^x}{\ln 7} + \frac{x^8}{8} + 7\cos x + C$

1.2) $\ln|x| - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x}{5}\right) + C$

1.3) $e^{\tan x} + C$

1.4) $\frac{4}{3}(x^6+111)^{3/2} + C$

Ví dụ 2

$u = \ln x \quad dv = \frac{1}{x^4}dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad v = -\frac{1}{3x^3}$

$$\int \frac{\ln x}{x^4}dx = -\frac{\ln x}{3x^3} + \int \frac{1}{3x^4}dx = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + C$$

Ví dụ 3

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$\int \sin^5 x\,dx = -\int \sin^4 x\,du = -\int (1-\cos^2 x)^2\,du = -\int (1-2u^2+u^4)\,du$$
$$= -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

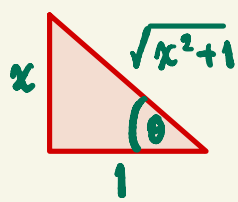
Ví dụ 4

$$\int \sin(7x)\sin(2x)\,dx = \int \frac{1}{2}[\cos(5x) - \cos(9x)]\,dx = \frac{1}{10}\sin(5x) - \frac{1}{18}\sin(9x) + C$$

Ví dụ 5

Đặt $x = \tan\theta$

$dx = \sec^2\theta\,d\theta$



$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan\theta\sqrt{\tan^2\theta+1}} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta = \int \operatorname{cosec}\theta\,d\theta$$
$$= \ln|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x}\right| + C$$

ข้อ 7

$$\therefore\ 4x^3+3x^2+18 = Ax(x^2+9)+B(x^2+9)+(Cx+D)x^2$$

$$4x^3+3x^2+18 = (A+C)x^3+(B+D)x^2+9Ax+9B$$

$$\therefore\ A+C=4,\quad B+D=3,\quad 9A=0,\quad 9B=18$$

$$\therefore\ A=0,\ B=2,\ C=4,\ D=1$$

$$\therefore \int \frac{4x^3+3x^2+18}{x^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{2}{x^2}+\frac{4x+1}{x^2+9}\,dx$$

$$= -\frac{2}{x}+2\ln|x^2+9|+\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

ข้อ 11

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} 2\,dx+\int_{3}^{5} x\,dx$$

$$= 2x\Big|_{-1}^{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_{3}^{5}$$

$$= 6-(-2)+\frac{25}{2}-\frac{9}{2}$$

$$= 8+8=16$$

ข้อ 16

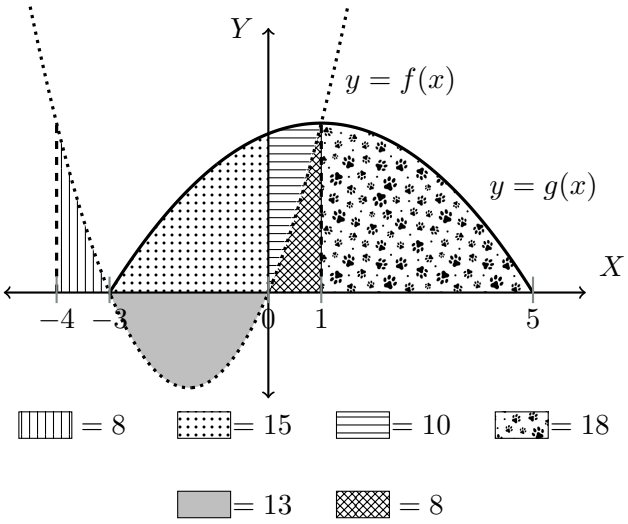
$$\int_{2}^{e+2}\frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{k\to 2^+}\int_{k}^{e+2}\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \lim_{k\to 2^+}\ln|x-2|\Big|_{k}^{e+2}$$

$$= \lim_{k\to 2^+}(\ln e-\ln|k-2|)$$

$$= +\infty \quad \text{ลู่ออก}$$

ข้อ 9 จากกราฟต่อไปนี้ จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้ เมื่อให้พื้นที่แรเงาแต่ละส่วนมีขนาดตามตัวเลขที่ระบุ



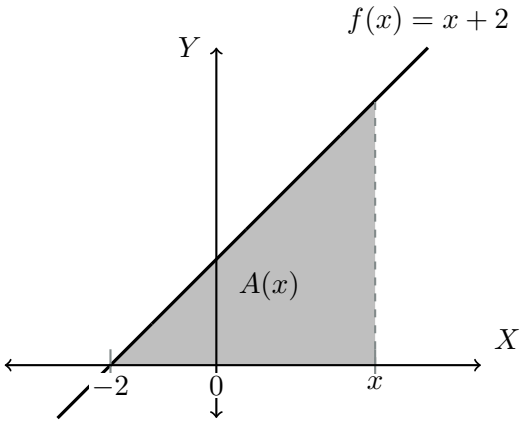
9.1) $\int_{-4}^{-3} f(x)\,dx =$ 8

9.2) $\int_{-3}^{0} g(x)\,dx =$ 15

9.3) $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx =$ $-13+8 = -5$

9.4) $\int_{-3}^{1} (f(x)-g(x))\,dx =$ $-(15+10+13)$
$= -38$

ข้อ 10 ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ใต้กราฟ $f(x) = x+2$ บนช่วง $[-2, x]$



10.1) จงหา $A(1) =$ 9/2

10.2) จงแสดงว่า $\frac{d}{dx}[A(x)] = f(x)$

$A(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)^2$

$\therefore \frac{d}{dx}(A(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(x+2)^2\right)$

$= x+2 = f(x)$

ข้อ 11 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2 & ; -1 \le x \le 3 \\ x & ; 3 < x \le 5 \end{cases}$

จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

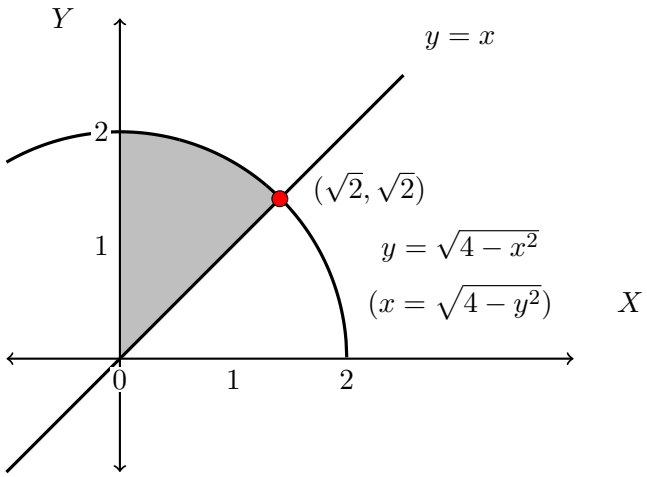
ข้อ 12 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

12.1) $\int_{111}^{111} \frac{x}{x^2+1}\,dx =$ 0

12.2) $\frac{d}{dz}\left[\int_0^z \frac{t}{t^2+1}\,dt\right] =$ $\frac{z}{z^2+1}$

12.3) ถ้า $\int_{-2}^{5} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{u}\,du$ แล้ว $a =$ 5, $b =$ 26

ข้อ 13 กำหนดบริเวณที่แรเงาดังรูป จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาพื้นที่บริเวณที่แรเงา **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



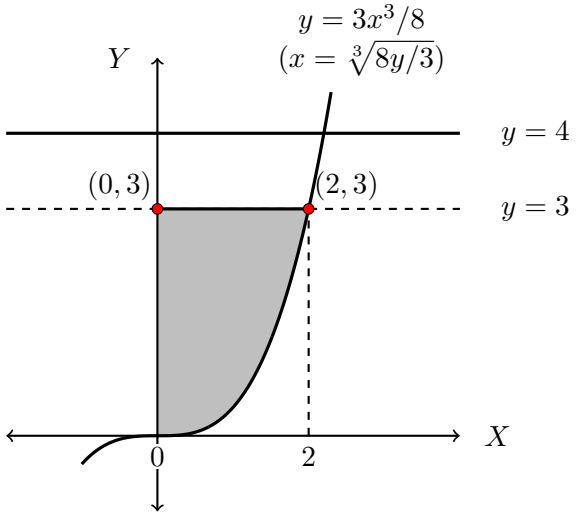
13.1) โดยการอินทิเกรตเทียบ x

พื้นที่ = $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} - x \; dx$

13.2) โดยการอินทิเกรตเทียบ y

พื้นที่ = $\int_0^{\sqrt{2}} y \; dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4-y^2} \; dy$

ข้อ 14 กำหนดบริเวณที่แรเงาดังรูป จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาปริมาตรทรงตันการหมุนรอบ (solid of revolution) ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



14.1) หมุนรอบแกน Y โดยการอินทิเกรตเทียบ y

ปริมาตร = $\int_0^{3} \pi \left(\sqrt[3]{8y/3}\right)^2 \; dy$

14.2) หมุนรอบแกน Y โดยการอินทิเกรตเทียบ x

ปริมาตร = $\int_0^2 2\pi x\,(3-3x^3/8)\,dx$

14.3) หมุนรอบเส้นตรง $y=4$ โดยการอินทิเกรตเทียบ x

ปริมาตร = $\int_0^2 \pi\left[(4-3x^3/8)^2-(4-3)^2\right]\,dx$

ข้อ 15 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}dx =$ $\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{1}{x}\,dx+\lim_{k\to0^-}\int_{-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx+\lim_{h\to0^+}\int_h^{1}\frac{1}{x}\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}\,dx$

ข้อ 16 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้

$$\int_2^{e+2}\frac{1}{x-2}dx$$

ข้อ 17 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first order differential equation) ต่อไปนี้

$$xy'-1=x+x\ln x$$

17.1) จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y=(x+1)\ln x+C$ เป็นคำตอบทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนด

17.2) กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (initial value) $y(1)=5$ จงหาคำตอบเฉพาะ (particular solution)

ข้อ 18 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx}=xye^{x-y} \tag{1}$$

$$y\frac{dy}{dx}-y^2\tan x=0 \tag{2}$$

จงแยกประเภทของสมการและจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบที่กำหนดให้ โดยเติมคำตอบลงในตาราง

สมการแยกได้	สมการหมายเลข	รูปแบบ $h(y)\,dy=g(x)\,dx$	สมการเชิงเส้น	สมการหมายเลข	รูปแบบ $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$
	(1)	$e^y/y\,dy=xe^x\,dx$		(2)	$\frac{dy}{dx}-(\tan x)y=0$
	(2)	$1/y\,dy=\tan x\,dx$			

ข้อ 19 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการแยกได้ (separable equation) ต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx}=x^7\sec y$$

ข้อ 20 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงเส้น (linear equation) ต่อไปนี้

$$y'-2y=e^{2x}+1$$

ข้อ 17

17.1)

$$xy'-1 = x\left(\frac{x+1}{x}+\ln x\right)-1 = x+x\ln x$$

$\therefore$ $y=(x+1)\ln x+C$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ

17.2)

เมื่อ $x=1,\ y=5 \rightarrow 5=2\ln 1+C \therefore C=5$

$\therefore$ $y=(x+1)\ln x+5$ เป็นคำตอบเฉพาะ

ข้อ 19

$$\frac{dy}{dx} = x^7\sec y$$

$$\int \frac{1}{\sec y}\,dy = \int x^7\,dx$$

$$\sin y = \frac{x^8}{8}+C$$

ข้อ 20

$$I(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$$

$$e^{-2x}y' - e^{-2x}2y = e^{-2x}(e^{2x}+1)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-2x}y) = 1+e^{-2x}$$

$$\int d(e^{-2x}y) = \int (1+e^{-2x})\,dx$$

$$e^{-2x}y = x-e^{-2x}/2+C$$