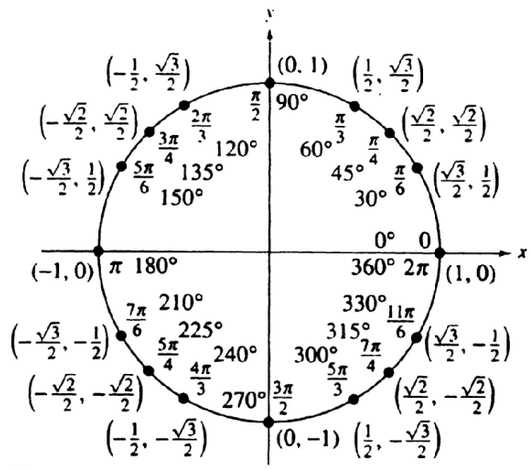
แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบปลายภาค

สูตรอนุพันธ์และสูตรอินทิเกรต

ให้ c, n และ $a > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

Differentiation Formula	Integration Formula	
1. $\frac{d}{dx}(C) = 0, \quad C \in \mathbb{R}$	1. $\int 0dx = C$	12. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$
2. $\frac{d}{dx}[kx] = k, \quad k \in \mathbb{R}$	2. $\int k dx = kx + C, \quad k \in \mathbb{R}$	13. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
3. $\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x), \quad k \in \mathbb{R}$	3. $\int [kf(x)]dx = k\int f(x)dx, \quad k \in \mathbb{R}$	14. $\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$
4. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
5. $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1$	16. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
6. $\frac{d}{dx}[\ln \lvert x \rvert] = \frac{1}{x}$	6. $\int \frac{1}{x}dx = \ln \lvert x \rvert + C$	17. $\int \tan x dx = \ln \lvert \sec x \rvert + C$
7. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	7. $\int e^x dx = e^x + C$	18. $\int \cot x dx = \ln \lvert \sin x \rvert + C$
8. $\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a, \ a > 0$ and $a \neq 1$	8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0$ and $a \neq 1$	19. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$
9. $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	9. $\int \cos x dx = \sin x + C$	20. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$
10. $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	21. $\int \sec x dx = \ln \lvert \sec x + \tan x \rvert + C$
11. $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	11. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	22. $\int \operatorname{cosec} x dx = \ln \lvert \operatorname{cosec} x - \cot x \rvert + C$
12. $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\operatorname{cosec}^2 x$		
13. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$		
14. $\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cot x$		
15. $\frac{d}{dx}[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
16. $\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$		
17. $\frac{d}{dx}[\ln \lvert \sec x \rvert] = \tan x$		
18. $\frac{d}{dx}[\ln \lvert \sin x \rvert] = \cot x$		



เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

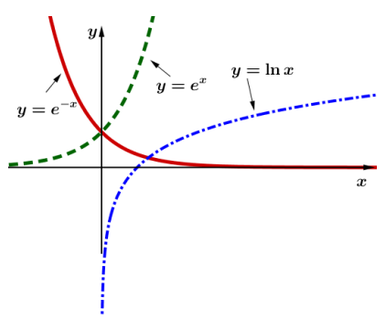
ให้ m และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}$
- $\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$
- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}$

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ A และ B เป็นจำนวนจริงบวก และให้ n และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
- $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$
- $\ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$
- $\log_B(A) = \frac{\ln A}{\ln B}$
- $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
- $\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$
- $\ln(e^A) = A$
- $e^{(\ln A)} = A$



กราฟของ e^x, e^{-x} และ $\ln x$

ข้อ 1 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1.1) $\displaystyle\int \left(\frac{2022}{x} - 2^x + \sec^2 x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \, dx$

1.2) $\displaystyle\int \frac{2022 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

1.3) $\displaystyle\int \frac{9e^{9x}}{1 + e^{18x}} \, dx$

ข้อ 2 ถ้าหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร u (u-substitution) พบว่า

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^5 + 5x + 5} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{u} \, du$$

แล้วจะได้ว่า $u =$ _____ และ $du =$ _____dx

ข้อ 3 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\displaystyle\int x^2 \cdot 2^x \, dx$ โดยใช้เทคนิคอินทิเกรตแบบแบ่งส่วน (integration by parts)

ข้อ 4 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\displaystyle\int \sin^{111} x \cos^3 x \, dx$

ข้อ 5 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\displaystyle\int \cos(13\theta) \sin(7\theta) \, d\theta$

ข้อ 6 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\displaystyle\int \frac{8}{x^2\sqrt{16 - x^2}} \, dx$ โดยวิธีแทนค่าตรีโกณมิติ (trigonometric substitution)

ข้อ 7 จงเขียนฟังก์ชันตรรกยะต่อไปนี้ในรูปเศษส่วนย่อย (partial fraction) **โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงที่ที่สมมติขึ้น**

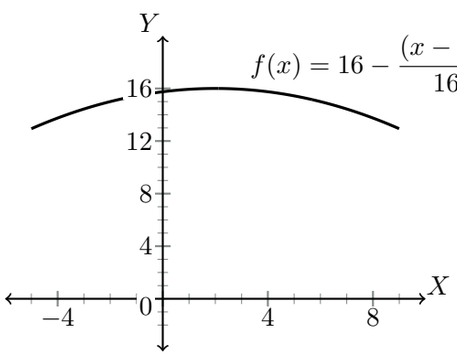
$$\frac{111x^3 + 5x - 7}{(2 - 5x)^2(x^2 + x + 6)^2} = \boxed{}$$

ข้อ 8 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\displaystyle\int \frac{10x + 3}{(x - 3)(x^2 + 2)} \, dx$

เมื่อ $\dfrac{10x + 3}{(x - 3)(x^2 + 2)}$ เขียนในรูปเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{10x + 3}{(x - 3)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

ข้อ 9 ให้ $f(x) = 16 - \dfrac{(x-2)^2}{16}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[-4, 8]$

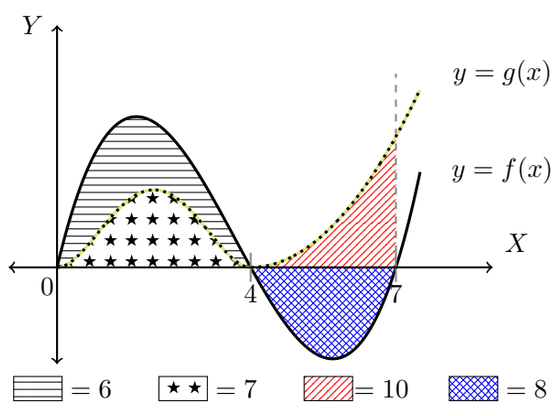


ในการประมาณพื้นที่ใต้กราฟด้วยวิธีสี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangle approximation method)
โดยแบ่งช่วง $[-4, 8]$ ออกเป็น 3 ช่วงย่อยที่มีความกว้างเป็น Δx เท่า ๆ กัน

9.1) จงหา $\Delta x =$ _____

9.2) กำหนด A_3 แทนพื้นที่ใต้กราฟที่ได้จากการใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้า 3 รูป จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่า A_3 เมื่อกำหนดให้ความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นค่าของ $f(x)$ ณ จุดกึ่งกลางช่วง

ข้อ 10 จากกราฟต่อไปนี้ จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้ เมื่อให้พื้นที่แรเงาแต่ละส่วนมีขนาดตามตัวเลขที่ระบุ



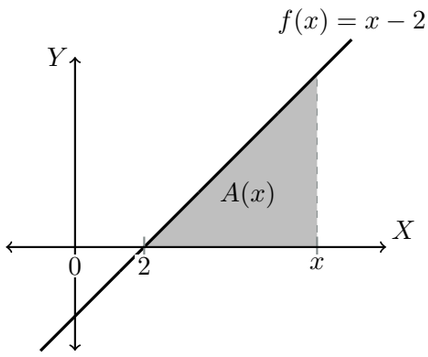
10.1) $\displaystyle\int_0^4 f(x) \, dx =$ _____

10.2) $\displaystyle\int_0^7 f(x) \, dx =$ _____

10.3) $\displaystyle\int_0^4 (f(x) - g(x)) \, dx =$ _____

10.4) $\displaystyle\int_4^7 (f(x) - g(x)) \, dx =$ _____

ข้อ 11 ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ใต้กราฟ $f(x) = x - 2$ บนช่วง $[2, x]$



11.1) จงหา $A(2) =$ _____

11.2) จงแสดงว่า $\frac{d}{dx}[A(x)] = f(x)$

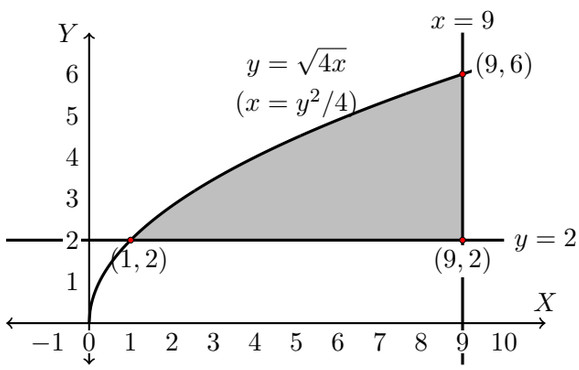
ข้อ 12 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

12.1) ถ้า $\int_4^{10} h(x)\,dx = 15$ และ $\int_7^{10} h(x)\,dx = 20$ แล้วจะได้ว่า $\int_7^4 h(x)\,dx =$ _____

12.2) $\frac{d}{dw}\left[\int_{-50}^{w} \frac{e^x \sin x}{x^4+2}\,dx\right] =$ _____

12.3) ถ้า $\int_0^2 e^{x^3+3x}(x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\heartsuit} e^u\,du$ แล้ว $\heartsuit =$ _____

ข้อ 13 กำหนดบริเวณที่แรเงาดังรูป



13.1) จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาพื้นที่แรเงา **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

- โดยการอินทิเกรตเทียบ x

พื้นที่ =

- โดยการอินทิเกรตเทียบ y

พื้นที่ =

13.2) จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาปริมาตรทรงตันการหมุนรอบ (solid of revolution) ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ด้วยวิธี Disk หรือ Washer **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

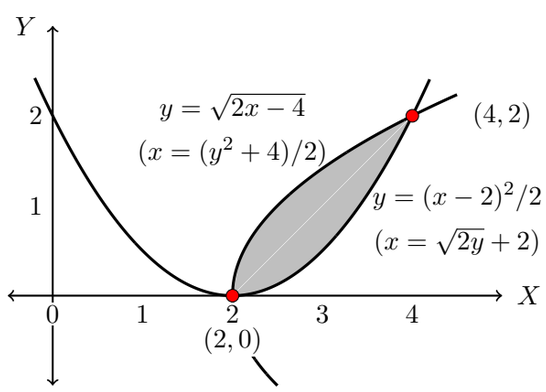
- หมุนรอบแกน Y

ปริมาตร =

- หมุนรอบเส้นตรง $y = 2$

ปริมาตร =

ข้อ 14 จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ด้วยวิธี Shell **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



14.1) หมุนรอบแกน Y

ปริมาตร =

14.2) หมุนรอบแกน X

ปริมาตร =

ข้อ 15 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

15.1) $\int_{-2}^{\infty} x^3 dx =$

15.2) $\int_{-\infty}^{\infty} 7x dx =$

15.3) $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x} dx =$

ข้อ 16 กำหนดอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{2/3}} dx$$

16.1) จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ในรูปของลิมิตของอินทิกรัลจำกัดเขต

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{2/3}} dx =$

16.2) จากข้อ 16.1) จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าอินทิกรัล

ข้อ 17 จงแสดงว่า $y = 1 + e^{-x}$ เป็นคำตอบ (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)

$$y'' + 2y' + y = 1$$

ข้อ 18 จงหาคำตอบทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2^x y^2 + 1$$

ข้อ 19 จงหาคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problem) ต่อไปนี้

$$y' + \frac{2y}{x} = x, \quad y(1) = 1$$

ข้อ 1 จงแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1.1) $\int \left(\frac{2022}{x} - 2^x + \sec^2 x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

1.2) $\int \frac{2022 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

1.3) $\int \frac{9e^{9x}}{1 + e^{18x}} \, dx$

1.1) $\int \left(\frac{2020}{x} - 2^x + \sec^2 x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{2022}{x} dx - \int 2^x dx + \int \sec^2 x \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= 2022 \int \frac{1}{x} dx - \frac{2^x}{\ln 2} + \tan x + \arcsin x + C$

$= 2022 \ln|x| - \frac{2^x}{\ln 2} + \tan x + \arcsin + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$ และ $a \neq 1$

$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

1.2) $\int \frac{2022 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{2022}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx$

$= 2022 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int 1 dx$

$= 2022 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int 1 dx$

$= 2022 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + x + C$

$= 2022 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + x + C$

$= 4044 x^{\frac{1}{2}} + x + C$ #

$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\int k \, dx = kx$

1.3) $\int \frac{ge^{gx}}{1+e^{2gx}}\,dx = \int \frac{ge^{gx}}{1+(e^{gx})^2}\,dx$

$e^{2gx} = (e^{gx})^2$

Misalkan $u = e^{gx}$

$du = ge^{gx}\,dx$

$\frac{du}{ge^{gx}} = dx$

ingat $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

$\therefore \int \frac{ge^{gx}}{1-(e^{gx})^2}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{ge^{gx}}$

$= \int \frac{1}{1+u^2}\,du$

$= \arctan u + C$

$= \arctan(e^{gx}) + C.$

ข้อ 2 ถ้าหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร u (u-substitution) พบว่า

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+5x+5}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{u}\,du$$

แล้วจะได้ว่า $u =$ x^5+5x+5 และ $du =$ $5x^4+5x\,dx$

เลือก $u = x^5+5x+5$

$du = (5x^4+5x)\,dx$

$\frac{du}{5(x^4+1)} = dx$

$\int \frac{x^4+1}{x^5+5x+5}\,dx = \int \frac{x^4+1}{u}\,\frac{du}{5(x^4+1)}$

$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{u}\,du$

ข้อ 3 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int x^2 \cdot 2^x\,dx$ โดยใช้เทคนิคอินทิเกรตแบบแบ่งส่วน (integration by parts)

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^2 \cdot 2^x\,dx$

เลือก $u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$dv = 2^x\,dx$

$\int dv = \int 2^x\,dx$

$v = \frac{2^x}{\ln 2}$

$\int x^2 \cdot 2^x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= x^2\frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,2x\,dx$

$= x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int 2^x \cdot x\,dx$ → เลือก $u = x$, $du = dx$; $dv = 2^x dx$, $\int dv = \int 2^x dx$, $v = \frac{2^x}{\ln 2}$

$= x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left[x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,dx\right]$

$= x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left[x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx\right]$

$= x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left[x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)\right] + C$

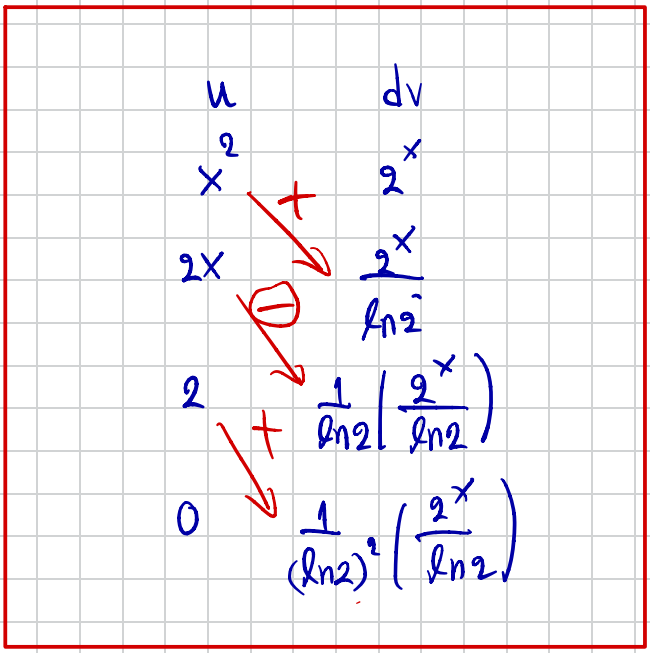
เทคนิคการเลือก u

LIATE

1) L = $\log x$, $\ln x$
2) I = $\arctan x$, $\arcsin x$, $\arccos$
3) A = polynomial $x^2, x, 1, x^3, x^2+1$
4) T = $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$
5) E = e^x, a^x

$$= \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2x \cdot 2^x}{(\ln 2)^2} + \frac{2 \cdot 2^x}{(\ln 2)^3} + C$$

เขียนอีกแบบ



$$\frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - 2x \cdot \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + 2 \cdot \frac{2^x}{(\ln 2)^3} + C$$

ข้อ 4 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \sin^{111} x \cos^3 x \, dx$

$\int \sin^n x \cos^m x \, dx$

Check! 1) n, m เป็นเลขคู่ทั้งสองตัว

2) m, n ตัวใดตัวหนึ่งเป็นเลขคี่

3) m, n เป็นเลขคี่ทั้งสองตัว

* ลำดับเลขคี่ที่น้อยสุด ลดกำลังไป 1

$\int \sin^m x \cos^2 x \, dx = \int \sin^m x \cos^2 x \cos x \, dx$

$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

$= \int (\sin^{111} x - \sin^{113} x) \cos x \, dx$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

เลือก $u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$\int (\sin^{111} x - \sin^{113} x) \cos x \, dx = \int (u^{111} - u^{113}) \, du$

$= \frac{u^{111+1}}{111+1} - \frac{u^{113+1}}{113+1} + C = \frac{\sin^{112} x}{112} - \frac{\sin^{114} x}{114} + C$

ข้อ 5 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \cos(13\theta) \sin(7\theta) \, d\theta$

$\int \sin(mx) \cos(nx) \, dx$, $\int \sin(mx) \sin(nx) \, dx$, $\int \cos(mx) \cos(nx) \, dx$

ต้องใช้สูตร

$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$

$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \sin(A+B)}{2}$

$\cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$

$\int \cos(\overset{B}{13\theta}) \sin(\overset{A}{7\theta}) \, d\theta = \int \frac{\sin(7\theta + 13\theta) + \sin(7\theta - 13\theta)}{2} \, d\theta$

* $\sin(-A) = -\sin A$

$= \int \frac{\sin(20\theta) + \sin(-6\theta)}{2} \, d\theta$

$= \int \frac{\sin(20\theta) - \sin(6\theta)}{2} \, d\theta$

$= \frac{1}{2} \left[\int \sin(20\theta) \, d\theta - \int \sin(6\theta) \, d\theta \right.$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \sin(20\theta)\,\frac{d(20\theta)}{20} - \int \sin 6\theta\,\frac{d6\theta}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(20\theta)}{20} - \left(-\frac{\cos(6\theta)}{6}\right)\right] + C \#$$

$$= -\frac{\cos(20\theta)}{40} + \frac{\cos(6\theta)}{12} + C \#$$

ข้อ 6 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{8}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$ โดยวิธีแทนค่าตรีโกณมิติ (trigonometric substitution)

4^2-x^2

มี 3 แบบ

1) a^2-x^2 แทนค่า $x = a\sin\theta \Rightarrow 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$

2) a^2+x^2 แทนค่า $x = a\tan\theta \Rightarrow 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

3) x^2-a^2 แทนค่า $x = a\sec\theta \Rightarrow \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Sol $16-x^2$ อยู่ในรูป a^2-x^2 ที่ $a=4$

ดังนั้น $x = 4\sin\theta$

$dx = 4\cos\theta\,d\theta$

$$\int \frac{8}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{8}{(4\sin\theta)^2\sqrt{4^2-(4\sin\theta)^2}}\,4\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{32\cos\theta}{16\sin^2\theta\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$(4u)^2 = 4^2\cdot u^2 = 16u^2$

$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2 \neq \sin\theta^2$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{(\sin^2\theta)4\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$\sqrt{x^2} = x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\,d\theta$$

$\frac{1}{\cos x} = \sec x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$\frac{1}{\sin x} = \csc x$

$\frac{1}{\tan x} = \cot x$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = (\operatorname{cosec}\theta)^2 = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2\theta \, d\theta \qquad * \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$= \frac{1}{2}(-\cot\theta) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cot\theta + C$$

จาก $x = 4\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{4}$



$$= \sqrt{16-x^2}$$

$c^2 = a^2+b^2$

$c^2-b^2 = a^2$

$\sqrt{c^2-b^2} = a$

$$\tan\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ด้านประชิดมุม } \theta} = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุม } \theta} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$

$$\therefore \int \frac{8}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\right) + C \quad \#$$

ข้อ 7 จงเขียนฟังก์ชันตรรกยะต่อไปนี้ในรูปเศษส่วนย่อย (partial fraction) **โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงที่ที่สมมติขึ้น**

$$\frac{111x^3+5x-7}{(2-5x)^2(x^2+x+6)^2} = \boxed{\frac{A}{2-5x}+\frac{B}{(2-5x)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+6}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+6)^2}}$$

หลัก 4 แบบ

1) $\frac{P(x)}{(a_1x\pm b_1)(a_2x\pm b_2)\cdots(a_nx\pm b_n)} = \frac{A_1}{a_1x\pm b_1}+\frac{A_2}{a_2x\pm b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx\pm b_n}$

2) $\frac{P(x)}{(ax\pm b)^n} = \frac{A_1}{ax\pm b}+\frac{A_2}{(ax\pm b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax\pm b)^n}$

3) $\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$

4) $\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots$

ข้อ 8 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)}\,dx$

เมื่อ $\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)}$ เขียนในรูปเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

ข้อ 8 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\int \frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)}\,dx$

เมื่อ $\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)}$ เขียนในรูปเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+2)}$$

$$\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{Ax^2+2A+Bx^2-3Bx+Cx-3C}{(x-3)(x^2+2)}$$

$$\frac{0x^2+10x+3}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{(A+B)x^2+(-3B+C)x+2A-3C}{(x-3)(x^2+2)}$$

$\therefore$ $A+B=0$ ——— ① $\Rightarrow$ $A=-B$ ——— *

$-3B+C=10$ ——— ② $\Rightarrow$ $-B=\frac{10-C}{3}$ ——— (**)

$2A-3C=3$ ——— ③

แทน $A=-B$ ลงใน ③ จะได้ $2(-B)-3C=3$ ——— ④

แทน $-B=\frac{10-C}{3}$ ลงใน ④ จะได้ $2\left(\frac{10-C}{3}\right)-3C=3$

$$\frac{20-2C}{3}-3C=3$$

$$\frac{20-2C}{3}=3+3C$$

$$20-2C=3(3+3C)$$

$$20-2C=9+9C$$

$$20-9=9C+2C$$

$$11=11C$$

$\therefore$ $C=\frac{11}{11}=1$

για $C = 1$ από (**) έχουμε $-B = \frac{10-1}{3} = \frac{9}{3} = 3$

$\therefore B = -3$

για $B = -3$ από (*) έχουμε $A = -(-3) = 3$.

$$\frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$= \frac{3}{x-3} + \frac{(-3)x+1}{x^2+2}$$

$$\int \frac{10x+3}{(x-3)(x^2+2)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{(-3)x+1}{x^2+2} \right) dx$$

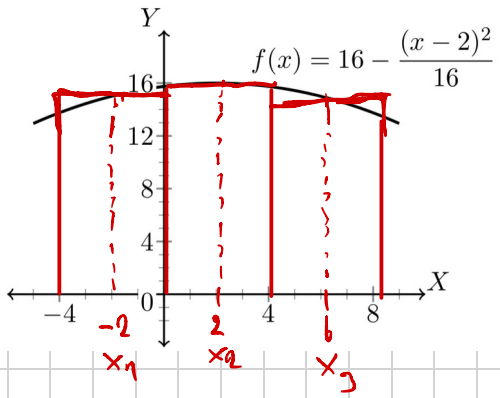
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \int \frac{3}{x-3}\,dx + \int \frac{-3x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

$$= 3\ln|x-3| - 3\int \frac{x}{u}\,\frac{du}{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= 3\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \#$$

ข้อ 9 ให้ $f(x) = 16 - \frac{(x-2)^2}{16}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[-4, 8]$ (a ↓, b ↓)



ในการประมาณพื้นที่ใต้กราฟด้วยวิธีสี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangle approximation method)
โดยแบ่งช่วง $[-4, 8]$ ออกเป็น 3 (n) ช่วงย่อยที่มีความกว้างเป็น Δx เท่า ๆ กัน

9.1) จงหา $\Delta x =$ _____

9.2) กำหนด A_3 แทนพื้นที่ใต้กราฟที่ได้จากการใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้า 3 รูป จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่า A_3 เมื่อกำหนดให้ความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นค่าของ $f(x)$ ณ จุดกึ่งกลางช่วง

(9.1) สูตร $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-(-4)}{3} = \frac{12}{3} = 4$

(9.2) $A_3 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$

$= \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right]$

$= 4\left[f(-2) + f(2) + f(6)\right]$

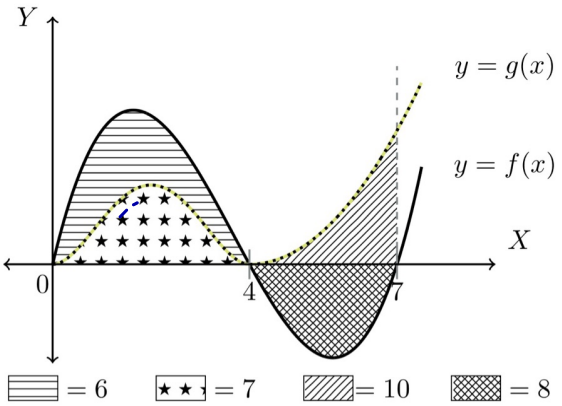
$= 4\left[\left(16 - \frac{(-2-2)^2}{16}\right) + \left(16 - \frac{(2-2)^2}{16}\right) + \left(16 - \frac{(6-2)^2}{16}\right)\right]$

$= 4(15 + 16 + 15)$

$= 4(46)$

$= 184$ ตารางหน่วย

ข้อ 10 จากกราฟต่อไปนี้ จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้ เมื่อให้พื้นที่แรเงาแต่ละส่วนมีขนาดตามตัวเลขที่ระบุ



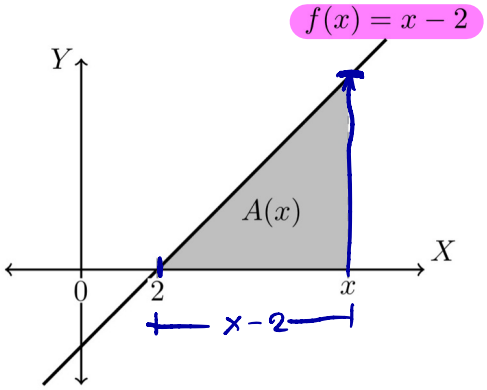
10.1) $\int_0^4 f(x)\,dx =$ 7 + 6 = 13

10.2) $\int_0^7 f(x)\,dx =$ 7+6−8 = 5

10.3) $\int_0^4 (f(x)-g(x))\,dx =$ 13 − 7 = 6

10.4) $\int_4^7 (f(x)-g(x))\,dx =$ −8 − 10 = −18

ข้อ 11 ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ใต้กราฟ $f(x) = x - 2$ บนช่วง $[2, x]$



11.1) จงหา $A(2) =$ 0

11.2) จงแสดงว่า $\frac{d}{dx}[A(x)] = f(x)$

แล้ว $A(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$

$\frac{d}{dx}(A(x)) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(x-2)^2$

$A(x) =$ พื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$= \frac{1}{2}(x-2)(x-2)$

$= \frac{1}{2}(x-2)^2$

$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x-2)^2$

$= \frac{2}{2}(x-2)$

$= x - 2$

$= f(x)$

สรุป $A(2) = \frac{1}{2}(2-2)^2 = 0$ #

$A(4) = \frac{1}{2}(4-2)^2 = \frac{1}{2}(2)^2 = 2$ #

ข้อ 12 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

12.1) ถ้า $\int_4^{10} h(x)\,dx = 15$ และ $\int_7^{10} h(x)\,dx = 20$ แล้วจะได้ว่า $\int_7^4 h(x)\,dx =$ 5

12.2) $\frac{d}{dw}\left[\int_{-50}^{w} \frac{e^x \sin x}{x^4+2}\,dx\right] =$ $\frac{e^w \sin w}{w^4+2}$

12.3) ถ้า $\int_0^2 e^{x^3+3x}(x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\heartsuit} e^u\,du$ แล้ว $\heartsuit =$ 14

12.1)

$$\int_4^{10} h(x)\,dx = \int_4^{7} h(x)\,dx + \int_7^{10} h(x)\,dx$$

$$15 = \int_4^{7} h(x)\,dx + 20$$

$$\int_4^{7} h(x)\,dx = 15-20 = -5$$

เปลี่ยนขอบ $$\int_7^{4} h(x)\,dx = -\int_4^{7} h(x)\,dx = -(-5) = 5 \#$$

เมื่อ $x=0$, $u=0$

เมื่อ $x=2$, $u = 2^3+3(2) = 8+6 = 14$

เลือก $u = x^3+3x$

$du = (3x^2+3)\,dx$

$$\int_0^{2} e^{x^3+3x}(x^2+1)\,dx = \int_0^{14} e^{u}\,\frac{1}{3(x^2+1)}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{14} e^u\,du.$$

12.2)

7.4.3 Part 2 of the Fundamental Theorem of Calculus

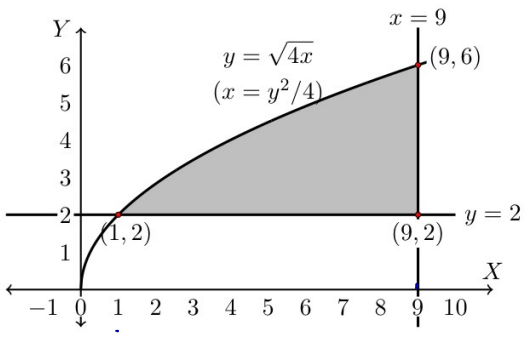
Theorem 7.8 If f is continuous on an interval, then f has an antiderivative on that interval. In particular, if a is any point in the interval, then the function F defined by

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

is an antiderivative of f ; that is, $F'(x) = f(x)$ for each x in the interval, or in an alternative notation

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

ข้อ 13 กำหนดบริเวณที่แรเงาดังรูป



13.1) จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาพื้นที่แรเงา **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

$\int_a^b$ (บน − ล่าง) dx

- โดยการอินทิเกรตเทียบ x

พื้นที่ = $\int_1^9 (\sqrt{4x} - 2)\,dx$

- โดยการอินทิเกรตเทียบ y

$\int_a^b$ (ขวา − ซ้าย) dy

พื้นที่ = $\int_2^6 \left(9 - \frac{y^2}{4}\right) dy$

13.2) จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาปริมาตรทรงตันการหมุนรอบ (solid of revolution) ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ด้วยวิธี Disk หรือ Washer **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

- หมุนรอบแกน Y

$V = \int_a^b [\pi(\text{ขวา})^2 - \pi(\text{ซ้าย})^2]\,dy$

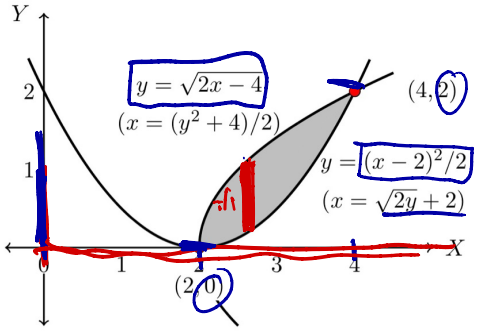
ปริมาตร = $\int_2^6 \left(\pi(9^2) - \pi\left(\frac{y^2}{4}\right)^2\right) dy = \pi\int_2^6 \left(9^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2\right) dy$

- หมุนรอบเส้นตรง $y = 2$

$V = \int_a^b \pi(\text{บน} - \text{ล่าง})^2\,dx$

ปริมาตร = $\int_1^9 \pi(\sqrt{4x} - 2)^2\,dx$ *

ข้อ 14 จงเขียนอินทิกรัลแสดงการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ด้วยวิธี Shell **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



14.1) หมุนรอบแกน Y

$V = 2\pi\int_a^b r(x)\,(\text{บน} - \text{ล่าง})\,dx$

ปริมาตร = $V = 2\pi\int_2^4 x\left(\sqrt{2x-4} - \frac{(x-2)^2}{2}\right) dx$

14.2) หมุนรอบแกน X

$V = 2\pi\int_a^b r(y)\,(\text{ขวา} - \text{ซ้าย})\,dy$

ปริมาตร = $2\pi\int_0^2 y\left(\sqrt{2y}+2 - \frac{y^2+4}{2}\right) dy$

ข้อ 15 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

15.1) $\int_{-2}^{\infty} x^3 dx =$ $\lim_{b\to\infty} \int_{-2}^{b} x^3 dx$

15.2) $\int_{-\infty}^{\infty} 7x dx =$ $\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} 7x dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} 7x dx$

15.3) $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x} dx =$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ $\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{1}{x} dx + \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x} dx + \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{2} \frac{1}{x} dx$

1) $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$

15.3 $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{1}{x} dx$

2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} f(x)dx$

4) $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=d \Rightarrow$ หรือ x หาค่าไม่ได้ที่ $x=d \in [a,b]$

$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to d^-} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{c\to d^+} \int_{c}^{b} f(x)dx$

ข้อ 16 กำหนดอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{2/3}} dx$$

ไม่ต่อเนื่อง ที่ $x = 0 \in [-1, 1]$

16.1) จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ในรูปของลิมิตของอินทิกรัลจำกัดเขต

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{2/3}} dx = \lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx + \lim_{c \to 0^+} \int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = 3 + 3 = 6$$

16.2) จากข้อ 16.1) จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าอินทิกรัล

พิจารณา $\lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} x^{-\frac{2}{3}} dx$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right]_{-1}^{c}$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_{-1}^{c}$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[3x^{\frac{1}{3}} \right]_{-1}^{c}$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[3c^{\frac{1}{3}} - 3(-1)^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[3c^{\frac{1}{3}} - 3(-1) \right]$$

$$= \lim_{c \to 0^-} 3c^{\frac{1}{3}} + \lim_{c \to 0^-} 3$$

$$= 3$$

$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$

$= \sqrt[3]{(-1)(-1)(-1)}$

$= -1$

พิจารณา $\lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left[3x^{\frac{1}{3}} \right]_{c}^{1}$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left[3(1)^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$= \lim_{c \to 0^+} 3 - \lim_{c \to 0^+} 3c^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = 3+3 = 6 \quad \#$$

ข้อ 17 จงแสดงว่า $y = 1 + e^{-x}$ เป็นคำตอบ (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)

$$y'' + 2y' + y = 1$$

พิจารณา $y' = \frac{d}{dx}(1+e^{-x}) = 0 + (-e^{-x}) = -e^{-x}$

$y'' = \frac{d}{dx}(-e^{-x}) = e^{-x}$

ดังนั้น $y'' + 2y' + y = e^{-x} + 2(-e^{-x}) + 1 + e^{-x}$

$= e^{-x} - 2e^{-x} + 1 + e^{-x}$

$= 1$ ———— สมการเป็นจริง

สรุปได้ว่า $y = 1 + e^{-x}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + 2y' + y = 1$ #

ข้อ 18 จงหาคำตอบทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2^x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2^x(y^2+1)$$

$$\frac{1}{y^2+1}\,dy = 2^x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int 2^x\,dx$$

$$\arctan y = \frac{2^x}{\ln 2} + C \qquad \#$$

ข้อ 19 จงหาคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problem) ต่อไปนี้

$$y' + \frac{2y}{x} = x, \quad y(1) = 1 \quad (*)$$

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ หรือ $y' + p(x)y = q(x)$

Step 1 $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = x$

Step 2 หาตัวประกอบการอินทิเกรต $I(x) = e^{\int p(x)dx}$

$= e^{\int \frac{2}{x} dx}$

$= e^{2\ln x}$

$= e^{\ln x^2}$

$= x^2$

Step 3 $I(x)$ คูณหน้า $(*)$ จะได้

$$x^2\left[\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y\right] = x^2(x)$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$$

$x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{dx^2}{dx} \leftarrow \frac{d}{dx}(x^2y) = x^3$

$$d(x^2y) = x^3dx$$

$$\int d(x^2y) = \int x^3dx$$

$$x^2y = \frac{x^4}{4} + C$$

$$y = \frac{x^4}{4 \cdot x^2} + \frac{C}{x^2}$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}} \quad \text{---------- } (**)$$

$\rightarrow y = \frac{1}{I(x)}\int I(x)q(x)\,dx$

$= \frac{1}{x^2}\int x^2 \cdot x\,dx$

$= \frac{1}{x^2}\left[\int x^3dx\right]$

$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{x^4}{4} + C\right]$

$= \frac{x^4}{x^2 \cdot 4} + \frac{C}{x^2}$

$= \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$

กรณี $y(1) = 1$; นั่นคือ $x = 1$, $y = 1$

แทน $x = 1$ และ $y = 1$ ลงใน (**) จะได้

$$1 = \frac{1^2}{4} + \frac{C}{1^2}$$

$$1 = \frac{1}{4} + C$$

$$1 - \frac{1}{4} = C$$

$$\frac{3}{4} = C$$

แทน $C = \frac{3}{4}$ ลงใน (**) จะได้

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4x^2}$$ /