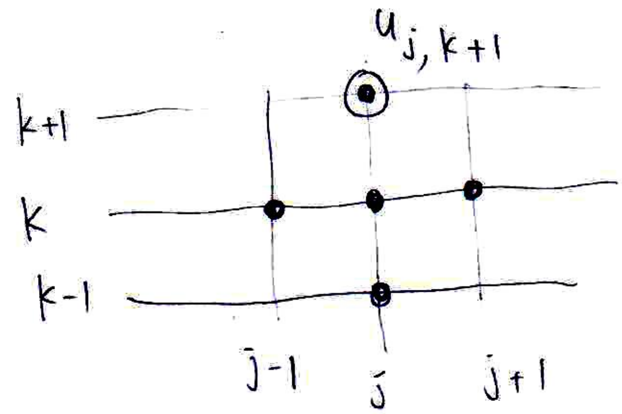
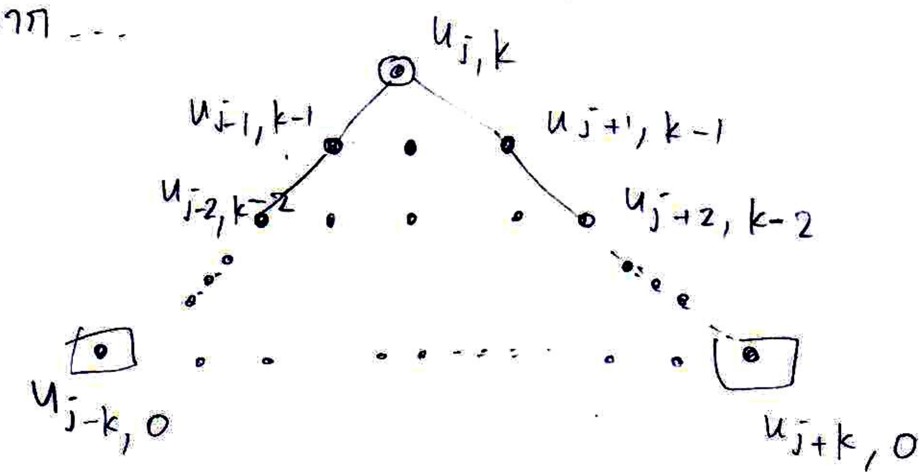
③ $u_{j,k+1} = \lambda^2 u_{j+1,k} + 2(1-\lambda^2) u_{j,k} + \lambda^2 u_{j-1,k} - u_{j,k-1}$ — (*)

จาก Explicit method ข้างต้น จะได้ว่า การที่จะคำนวณ $u_{j,k+1}$
เราจะต้องใช้ข้อมูลจาก $u_{j,k}$, $u_{j-1,k}$, $u_{j+1,k}$, $u_{j,k-1}$

ดังรูป



ดังนั้น จะได้ว่าการที่เราจะคำนวณค่าของ $u_{j,k}$ เราจะต้องใช้
ข้อมูลที่มาจาก ...



ดังนั้น Numerical domain of dependence ของ
$u_{j,k}$ คือจุด x_{j-k} ถึง จุด x_{j+k}
หรือ $x_j - k\Delta x$ ถึง จุด $x_j + k\Delta x$
โดยที่ $t = 0$. (t_0).

ทั้งนี้ เป็นเพราะว่า การที่เราจะคำนวณค่าของ $u_{j,k}$ เราจะต้อง
ใช้ข้อมูลที่สืบเนื่องมาจาก $u_{j-k,0}$ ถึง $u_{j+k,0}$.

แต่จากผลเฉลยของ Wave equation ซึ่งอยู่ในรูป

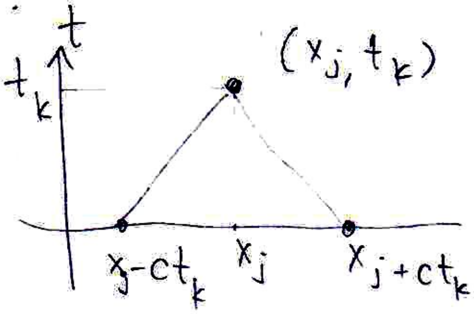
$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)\,dz$$

เราจะได้ว่า ค่าของ $u(x_j, t_k)$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} u(x_j,t_k) &= \frac{1}{2} f(x_j - ct_k) + \frac{1}{2} f(x_j+ct_k) + \frac{1}{2c}\int_{x_j-ct_k}^{x_j+ct_k} g(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2} u(x_j-ct_k,0) + \frac{1}{2} u(x_j+ct_k,0) \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x_j-ct_k}^{x_j+ct_k} u_t(z,0)\,dz . \end{aligned}$$

กล่าวคือ ค่าของ $u(x_j, t_k)$ ขึ้นอยู่กับค่าของ $u(x,0)$ โดยที่ $x \in [x_j - ct_k, x_j + ct_k]$.

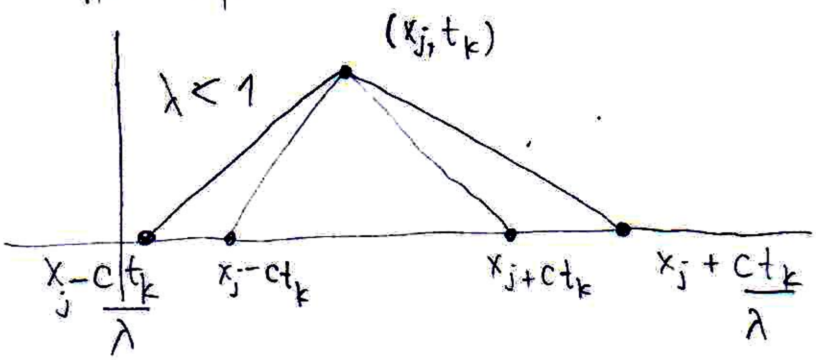
ดังนั้น domain of dependence ของ $u(x_j, t_k)$ คือ $[x_j - ct_k, x_j + ct_k]$.

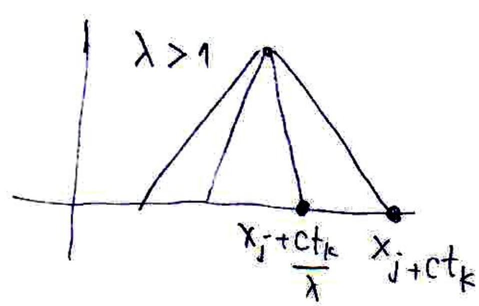


ด้วยเหตุนี้ CFL condition ของวิธีเชิงตัวเลข (*) คือ

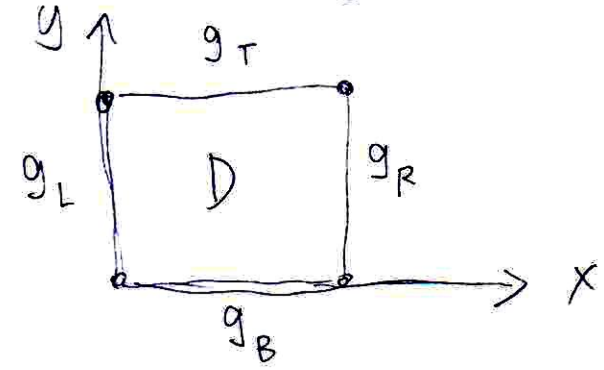
$\boxed{\lambda \le 1}$ เพราะว่าเป็น

ค่า λ ที่ทำให้ numerical domain of dependence ครอบคลุม domain of dependence. (นิยาม $\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$)





④ กำหนดให้ค่าของ g ที่ขอบทั้งสี่ของ D มีค่าดังนี้



จะได้ว่า ในกรณีที่ $N = M = 3$, เราสามารถเขียนวิธี finite difference สำหรับ Laplace equation ให้อยู่ในรูป matrix ได้ดังนี้

$$Au = b$$

โดยที่ A และ u เหมือนกับในเฉลยของกลุ่ม 4.

ส่วนเวคเตอร์ b จะเท่ากับ

$$b = \begin{pmatrix} g_B(x_1) + \lambda^2 g_L(y_1) \\ g_B(x_2) \\ g_B(x_3) + \lambda^2 g_R(y_1) \\ \lambda^2 g_L(y_2) \\ 0 \\ \lambda^2 g_R(y_2) \\ g_T(x_1) + \lambda^2 g_L(y_3) \\ g_T(x_2) \\ g_T(x_3) + \lambda^2 g_R(y_3) \end{pmatrix}$$