Hw. $f(x) = x^2$

น.ส. จิราวรรณ ไลซ้อน 540510619

น.ส. ชรินทิพย์ จันทร์นอกลอ 540510629

นายณัฐวุฒิ พันธุลี 540510646

น.ส. โภชิกา รัตนรักษ์ 540510689

show $(B_n f)(x) = x^2 + \frac{1}{n} x(1-x)$

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$n^2 (B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k}$$ ✓

$$n^2 (B_n f)(x) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k}$$ ✓ ✓

$$n^2 (B_n f)(x) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^2 x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} x \cdot x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}$$ ✓ ✓

$$n^2 (B_n f)(x) = n(n-1) x^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{(n-2)-k}}_{1} + n x \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k}}_{1}$$ ✓ ✓

$$n^2 (B_n f)(x) = n(n-1)x^2 + nx$$ ✓

$\frac{5}{5}$

$$n (B_n f)(x) = (n-1) x^2 + x$$

$$n (B_n f)(x) = n f(x) + x(1-x)$$ ✓

ดีมาก :)

$$(B_n f)(x) = \frac{n x^2}{n} + \frac{x(1-x)}{n}$$

✓

เจนจิรา เพชรช่วย 540510624
ณิชิญา จันธิมา 540510660
ภรณิสา เมืองโคตร 540510693
วิไลวรรณ กันทา 540510695

การบ้าน ๕

2. Let $f(x) = x^2$

Show that $(B_n f)(x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}$ =

Proof.

$$\boxed{(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}$$

$$(B_n f)(x^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{k}(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \frac{k^{\cancel{2}}}{n^{\cancel{2}}} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}\right) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n-1} \frac{(n-1)!\, x^{k-2} (1-x)^{n-k}}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}$$

$$+ x \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cancel{k-1}}{\cancel{n-1}}\right) \frac{(\cancel{n-1})(n-2)!\, x^{k-2} (1-x)^{n-k}}{(\cancel{k-1})(k-2)!\,[(n-2)-(k-2)]!} + \frac{x}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} + \frac{x}{n}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n}$$

$$= \frac{nx^2}{n} - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}$$

5/5

ดีมาก :)

นางสาวกนกรัตน์ ใบแสด 540510571
นางสาวชลิดา คงสนุ่น 540510578
นายทศพร โสห์ศิริกุล 540510583
นางสาวพัชราภรณ์ ดาวดิษฐ์ 540510592

NO. ....
DATE. ....

Homework 5

② (Extra credits) Let $f(x)=x^2$. Show that $(B_nf)(x) = x^2 + \frac{1}{n}x(1-x)$

Pf. Since $(B_nf)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$

Thus $(B_nf)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{k^2}{n^2}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{k}{n}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \cdot \left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{k-1}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \cdot \left[1 + \left(-1 + \frac{k}{n} \cdot \frac{n-1}{k-1}\right)\right] \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

ถ้า k=1 แล้ว (k−2)! เท่ากับเท่าไหร่?

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \cdot \left(\frac{-nk+n+nk-k}{n(k-1)}\right) \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

$$= x^2 \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \cdot x^{k-2} (1-x)^{((n-2)-(k-2))}}$$ 1

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \cdot \left(\frac{n-k}{n(k-1)}\right) \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

4/5

$$= x^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-1))+1}$$

$$= x^2 + \frac{1}{n}x(1-x) \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!} \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{((n-2)-(k-1))}}$$ 1

$$= x^2 + \frac{1}{n}x(1-x)$$ #

Homework 5

2. (Extra credits) Let $f(x) = x^2$. Show that

$$(B_n f)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Pf. From $(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$

$$\therefore (B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cancel{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \left(\frac{k^2}{n^2}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{k}(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \left(\frac{k^{\cancel{2}}}{n^{\cancel{2}}}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,((n-2)-(k-2))!} \cdot \left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{k-1}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,((n-2)-(k-2))!} \left[1 + \left(-1 + \frac{k}{n} \cdot \frac{n-1}{k-1}\right)\right] \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,((n-2)-(k-2))!} \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,((n-2)-(k-2))!} \cdot \left(\frac{-nk+n+nk-k}{n(k-1)}\right) \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

$$= x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,((n-2)-(k-2))!}\, x^{k-2} (1-x)^{((n-2)-(k-2))}}_{=1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,((n-2)-(k-2))!} \cdot \left(\frac{n-k}{n(k-1)}\right) \cdot x^k (1-x)^{((n-2)-(k-2))}$$

$$= x^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,((n-2)-(k-2))!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right) x^k \cdot (1-x)^{((n-2)-(k-2))+1}$$

k-1   k-1

$$= x^2 + \frac{1}{n} x (1-x) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,((n-2)-(k-1))!} \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{((n-2)-(k-1))}}_{=1}$$

$$= x^2 + \frac{1}{n} x (1-x) \quad \#$$

3/5

รายชื่อสมาชิกในกลุ่ม

1. น.ส. กรรณิการ์ วงศ์ชัย รหัส 540510572
2. น.ส. นภสร ปันแก้ว รหัส 540510586

... ประเทศ รหัส 540510593

(2). show that $B_n f(x) = x^2 + \frac{1}{n} x(1-x)$

sol from Bernstein polynomial for $f \in C[0,1]$

we have $B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$

consider $f(x) = x^2$

we got $(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!\,(n-k)!} \right) \frac{k^2}{n^2}\, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k}{n}\, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1+(-1)+k}{n} \cdot \frac{(n-1)}{(n-1)} \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{(n-1)(n-2)!}{(k-1)(k-2)!\,(n-k)!} \right) \left(\frac{1(n-1)}{n(n-1)} + \frac{(k-1)(n-1)}{n(n-1)} \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

จะต้องระวังตรง Index

ถ้า $k=1$

$\binom{n-2}{k-2}$ เท่ากับเท่าไหร่?

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{n-1}{k-1} \right) \left(\frac{1}{n} + \frac{(k-1)(n-1)}{n(n-1)} \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{k-1} \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{n-1}{k-1} \right) \left(\frac{(k-1)(n-1)}{n(n-1)} \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

4/5

$$= x \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \right) \frac{1}{n}\, x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$+ x \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \right) \cdot \frac{(k-1)(n-1)}{n(n-1)}\, x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{x}{n} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1}}_{\text{มีค่าเป็น } 1} + x\left(\frac{n-1}{n}\right) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{k-1}{n-1} \right) x^{k-1} (1-x)^{n-k}}_{\text{มีค่าเป็น } x}$$

$$= \frac{x}{n} + x^2 \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

$$= \frac{x}{n} + x^2 - \frac{x^2}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x}{n}(1-x) \quad \#$$

Thus, $(B_n f)(x) = x^2 + x(1-x)$ เมื่อ $f(x) = x^2$

NO. ....
DATE / /

2. Let $f(x) = x^2$. Show that

$$(B_n f)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{k^2}{n^2}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} ((k-1)+1) x^k (1-x)^{n-k}\right.$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} (k-1) x^k (1-x)^{n-k}\right]$$

$$+ \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}\right]$$

$$+ \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}\right]$$

$$= \frac{n-1}{n}\left[\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} x^k (1-x)^{n-k}\right]$$

$$+ \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} x^k (1-x)^{n-k}\right]$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 \left[\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}\right]$$

$$+ \frac{1}{n}(x)\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}\right]$$

NO. ....

DATE / /

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j(1-x)^{m-j}\right]$$

$$+ \frac{1}{n}(x)\left[\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}x^p(1-x)^{q-p}\right]$$

where $j = k-2$, $m = n-2$, $p = k-1$, $q = n-1$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}(x)$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$ ※

$\frac{5}{5}$

สมาชิกกลุ่ม

1. นายจักรกฤษณ์ แดงแสน 540510574
2. นายเจนวิช พ่วงพี 540510577
3. น.ส. ณัฏฐ์กานต์ สภาใจดี 540510579
4. นายขวัญชัย แจ้ใจ 540510614
5. น.ส. ภีมฟ้า รัศมีเนตร 540510677

ดีมาก :)

Homework 5

น.ส. ณัฐธิดา นิมิตรวดี 540510074

นาย สุทธิศักดิ์ วิเศษสมนา 540510598

นาย กรณิศ เพชรพัชรกุล 540510604

นาย อนุรักษ์ ชื่นใจ 540510719

น.ส. อาจรีย์ ศรีคำสุข 540510727

2.) Let $f(x) = x^2$ show that

$$(B_n f)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

4/5

Proof For $f \in [0,1]$

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k^2}{n^2} \cdot x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{k}(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k^{\cancel{2}}}{n^{\cancel{2}}} \cdot x^k (1-x)^{n-k}$$

k=1 →

$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{k}{n} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{(n-1)}{(n-1)} \cdot \frac{(k-1)}{(k-1)} \cdot \frac{k}{n} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \cdot \frac{k}{n} \cdot x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-2} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(1 - 1 + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right) \cdot x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{-(n-k)}{n(k-1)}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \cdot 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(-\frac{(n-k)}{n(k-1)}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{n-k}{k-1}\right) x^{k-1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-2)!}{\cancel{(n-k)}!\,(k-2)!} \cdot \frac{\cancel{(n-k)}}{(k-1)} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k-1)!\,(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Therefore $\quad (B_n f)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$

NO. ....

DATE : ...... / ...... / ......

น.ส. มินตรา ไชยมีเดช

540510685

นาย เอกชัย ตานะกุล

540510733

นาย เอกรินทร์ จัดหา

540510734

Math 455 : Homework 5

2. (Extra credits) Let $f(x) = x^2$. show that

$$(B_n f)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

4/5

Sol^n

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \checkmark$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \frac{\cancel{n!}\,(n-1)!}{\cancel{k!}\,(k-1)!\,(n-k)!} \frac{\cancel{k^2}\,k}{\cancel{n^2}\,n} x^k (1-x)^{n-k} \checkmark$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \frac{k}{n} x^k \frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!} \checkmark$$

ถ้า k = 1 แล้ว (k-2)! = เท่าไหร่ ?

$$= x^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!} x^{k-2} \frac{(1-x)^{(n-2)-(k-2)}}{[(n-2)-(k-2)]!} \frac{k}{n} \frac{(n-1)}{(k-1)}$$

$$= x^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \frac{k}{n} \frac{(n-1)}{(k-1)}$$

$$= x^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \left(1 + \left(-1 + \frac{k}{n} \frac{(n-1)}{(k-1)}\right)\right)$$

$$= x^2 \sum_{k=1}^{n} \cancel{\binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}}^{\,1} +$$

$$x^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \left(-1 + \frac{k}{n} \frac{(n-1)}{(k-1)}\right)$$

$$= x^2 \checkmark + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{(n-k)} \left(\frac{-nk + n + nk - k}{n(k-1)}\right)$$

$$= x^2 \checkmark + \frac{x}{n}(1-x) \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,\cancel{(n-k)!}\,(n-k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{(n-k-1)} \frac{\cancel{(n-k)}}{(k-1)}$$

NO.

DATE : ____/____/____

$$= x^2 + \frac{x}{n}(1+x) \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-k-1)}$$

$$\therefore (B_n f)(x) = x^2 + \frac{x}{n}(1+x) \quad \checkmark \quad \#$$

HW. 5

(2.) (Extra credits) Let $f(x) = x^2$. Show that

$$(B_n f)(x) = x^2 + \frac{x}{n}(1-x)$$

Sol$^{\underline{n}}$

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \frac{\overset{(n-1)!}{\cancel{n!}}}{\underset{(k-1)!}{\cancel{k!}}(n-k)!} \frac{\overset{k}{\cancel{k^2}}}{\underset{n}{\cancel{n^2}}} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \frac{k}{n} x^k \frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}$$

ดูนี่ระวังตรง index
เช่น ถ้า $k=1$
$(k-2)! = ?$ $\rightarrow$

$$= x^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!} x^{k-2} \frac{(1-x)^{(n-2)-(k-2)}}{[(n-2)-(k-2)]!} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)}$$

$$= x^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)}$$

$$= x^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \left(1 + \left(-1 + \frac{k}{n} \cdot \frac{n-1}{k-1}\right)\right)$$

$$= x^2 \cancel{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}} \rightarrow 1 \quad +$$

$$x^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \left(-1 + \frac{k}{n} \cdot \frac{n-1}{k-1}\right)$$

$$= x^2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{(n-k)} \left(\frac{-nk+n+nk-k}{n(k-1)} \right)$$

$$= x^2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{(n-k)} \frac{n-k}{n(k-1)}$$

$$= x^2 + \frac{x}{n}(1-x) \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,\cancel{(n-k)}!}\, x^{k-1} (1-x)^{(n-k-1)} \frac{\cancel{n-k}}{k-1}$$

$(n-k-1)!$

$$= x^2 + \frac{x}{n}(1-x) \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-k-1)}$$

$\rightarrow 1$

$$\therefore (B_n f)(x) = x^2 + \frac{x}{n}(1-x)$$

$\frac{4}{5}$

น.ส. อุชิรวรรณ หงส์เพชรรัศมี 540510595

น.ส. ปัจจารีย์ สาลี 540510667

นาย มนต์ชัย ต๊ะประจา 540510684

น.ส. อาทิติยา น่วมเลิศ 540510730