นางสาว กนกรัตน์ ใบแสด 60 (3)

NO.

DATE.

Homework 5.

(3) Make two exam problems, with solutions, for this chapter.

3.1) Find the coefficients a, b, c, d, e for the following s(x) that is a natural cubic spline

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) = a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & ; x \in [0,1] \\ s_2(x) = c(x-2)^2 & ; x \in [1,3] \\ s_3(x) = d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & ; x \in [3,4] \end{cases}$$

15/15

Sol. $s_1'(x) = 2a(x-2) + 3b(x-1)^2$, $s_2'(x) = 2c(x-2)$, $s_3'(x) = 2d(x-2) + 3e(x-3)^2$

$s_1''(x) = 2a + 6b(x-1)$, $s_2''(x) = 2c$, $s_3''(x) = 2d + 6e(x-3)$

▶ Continuous Condition

- $s_1(1) = s_2(1)$: $s_1(1) = a$, $s_2(1) = c$ $\therefore$ $a = c$
- $s_2(3) = s_3(3)$: $s_2(3) = c$, $s_3(3) = d$ $\therefore$ $c = d$
- $s_1'(1) = s_2'(1)$: $s_1'(1) = -2a$, $s_2'(1) = -2c$ $\therefore$ $-2a = -2c$
- $s_2'(3) = s_3'(3)$: $s_2'(3) = 2c$, $s_3'(3) = 2d$ $\therefore$ $2c = 2d$

$\Rightarrow a = c = d$

- $s_1''(1) = s_2''(1)$: $s_1''(1) = 2a$, $s_2''(1) = 2c$
- $s_2''(3) = s_3''(3)$: $s_2''(3) = 2c$, $s_3''(3) = 2d$

▶ Natural end condition

- $s_1''(0) = 0$: $s_1''(0) = 2a - 6b = 0$ $\therefore$ $a = 3b \rightarrow b = \frac{a}{3}$
- $s_3''(4) = 0$: $s_3''(4) = 2d + 6e = 0$ $\therefore$ $d = -3e \rightarrow e = -\frac{d}{3} = -\frac{a}{3}$

Thus the coefficients of $s(x)$ are $a = c = d$, $b = \frac{a}{3}$, $e = -\frac{a}{3}$ #

3.2) Write down the conditions that should be satisfied so that the following function is a natural cubic spline on the interval [0,2] :

$$S(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0,1] \\ f_2(x), & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Sol. For s(x) to be a "cubic spline", $f_1(x)$ and $f_2(x)$ should be cubic polynomials that satisfy the following condition :

- $f_1(1) = f_2(1)$ ✓, • $f_1'(1) = f_2'(1)$ ✓, • $f_1''(1) = f_2''(1)$ ✓

In addition, in order for s(x) to be a "nutural" spline on [0,2] we must require that • $f_1''(0) = f_2''(2) = 0$ #

✓

NO. ....

DATE : ..../......./.......

2. Determine the values of the coefficients $a, b, c, d,$ and e so that the following $s(x)$ is a natural cubic spline on $[0,2]$:

$$s(x) = \begin{cases} 1+x-ax^2+bx^3 & , \quad x \in [0,1], \\ c+d(x-1)+e(x-2)^2+(x-2)^3 & , \quad x \in [1,2]. \end{cases}$$

sol^{n}: Let $f_1(x) = 1+x+ax^2+bx^3 \Rightarrow f_1'(x) = 1-2ax+3bx^2$, $f_1''(x) = -2a+6bx$.

and $f_2(x) = c+d(x-1)+e(x-2)^2+(x-2)^3 \Rightarrow f_2'(x) = d+2e(x-2)+3(x-2)^2$,

$f_2''(x) = 2e+6(x-2)$.

Since $s(x)$ is a natural cubic spline, we have

$f_1''(0) = 0 \Rightarrow a = 0$, and $f_2''(2) = 0 \Rightarrow e = 0$.

The continuity of $s(x)$ at $x=1$; $2+b = c-1$ — ①.

The continuity of $s'(x)$ at $x=1$; $1+3b = d+3$ — ②.

The continuity of $s''(x)$ at $x=1$; $6b = -6 \Rightarrow b = -1$.

Plug in $b=-1$ in ①; $c = 2$.

Plug in $b=-1$ in ②; $d = -5$.

The answer is $s(x) = \begin{cases} 1+x-x^3 & , \quad x \in [0,1], \\ 2-5(x-1)+(x-2)^3 & , \quad x \in [1,2]. \end{cases}$ #

all conditions are verified.

Homework 4 Numerical Analysis

③ Make two exam problem, with solution, for this chapter.

3.1) จงคำนวณค่าของ $\ln 9.2$ โดยสร้างพหุนามลากรานจ์ จาก $\ln 9.0 = 2.1972$, $\ln 9.5 = 2.2513$ และ $\ln 10 = 2.3026$

วิธีทำ แทน $x_0 = 9.0$, $x_1 = 9.5$, $x_2 = 10.0$

$y_0 = 2.1972$, $y_1 = 2.2513$, $y_2 = 2.3026$

มีจุด 3 จุด จะต้องประมาณฟังก์ชันโดยใช้พหุนามดีกรี 2

จาก $P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$

จะได้

$$P_2(x) = (2.1972)\left[\frac{(x-9.5)(x-10.0)}{(9.0-9.5)(9.0-10.0)}\right] + 2.2513\left[\frac{(x-9.0)(x-10.0)}{(9.5-9.0)(9.5-10.0)}\right]$$

$$+ 2.3026\left[\frac{(x-9.0)(x-9.5)}{(10.0-9.0)(10.0-9.5)}\right]$$

ดังนั้น $P_2(x) = 4.3944(x-9.5)(x-10) - 9.0052(x-9.0)(x-10.0) + 4.6052(x-9.0)(x-9.5)$

แทน $x = 9.2$ ในสมการ

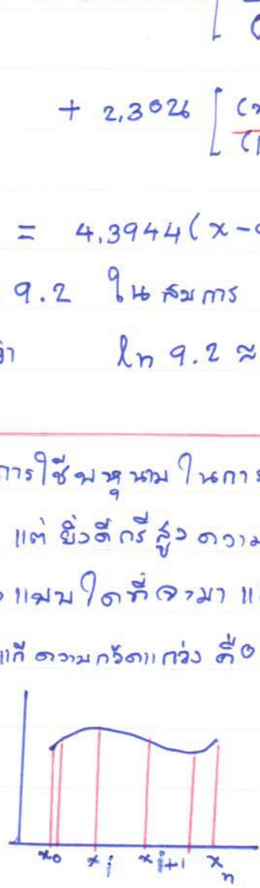
จะได้ว่า $\ln 9.2 \approx P_2(9.2) = 2.2192$

15/15

3.2) เนื่องจากการใช้พหุนามในการประมาณฟังก์ชันบนช่วงปิด ถ้าต้องการให้ความแม่นยำสูง ต้องใช้พหุนามที่ดีกรีสูง แต่ยิ่งดีกรีสูง ความคลาดเคลื่อนในการประมาณ จะมีความกวัดแกว่งสูงขึ้น ฉะนั้น จะใช้วิธีการประมาณช่วงแบบใดที่จะมาแก้ปัญหานี้ (ตอบได้มากกว่า 1 วิธี) พร้อมบอกข้อเสียของแต่ละวิธี

แปลว่าอะไร?

ตอบ ① วิธีที่ใช้แก้ความกวัดแกว่ง คือ การแบ่งช่วงปิดทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อยๆ แล้วสร้างพหุนามในแต่ละช่วงย่อย



แต่วิธีนี้จะมีข้อเสียคือ การประมาณเชิงเส้นนี้ ที่จุดปลายของช่วงย่อยมักจะหาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ นั่นคือ ทำให้ฟังก์ชันไม่ smooth

อันนี้ควรจะอธิบายด้วยว่าแปลว่าอะไร

② วิธีที่ใช้แก้ความกวัดแกว่งและ... การประมาณโดยพหุนามเป็นช่วงๆ คือการใช้พหุนาม Hermite กำลังสาม ในแต่ละช่วงย่อย $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ จะได้ฟังก์ชันประมาณซึ่งหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง ทำให้ฟังก์ชันประมาณ smooth ข้อเสียของวิธีนี้คือ ต้องทราบค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันที่จุดประมาณอยู่ทุกค่าของข้อมูลที่เป็นจุดปลายของช่วง

หรือใช้ Spline

นิราวรรณ หมู่ธรรมโชบ

540510587

3.2 Determine the parameters a, b, c, d, e, f, g and h so that $S(x)$ is a natural cubic spline where

$$S(x) = \begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d & x \in [-1,0] \\ ex^3+fx^2+gx+h & x \in [0,1] \end{cases}$$

with interpolation conditions $S(-1)=1$, $S(0)=2$ and $S(1)=-1$.

Sol^n On $[-1,0]$, $S(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

On $[0,1]$, $S(x) = ex^3+fx^2+gx+h$

Continuity conditions: $S(x)$, $S'(x)$ and $S''(x)$ continuous at $x=0$.

End conditions: $S''(x) < 0$ $= 0$ at $x=-1, x=+1$.

$$S'(x) = \begin{cases} 3ax^2+2bx+c \\ 3ex^2+2fx+g \end{cases} \quad \text{and} \quad S''(x) = \begin{cases} 6ax+2b \\ 6ex+2f \end{cases}$$

At $x=0$, $S(x)=2 \Rightarrow d=h=2$ —— (1)

$S'(x)$ continuous $\Rightarrow c=g$ —— (2)

$S''(x)$ continuous $\Rightarrow b=f$ —— (3)

At $x=-1$, $S''(x)=0 \Rightarrow -6a+2b=0 \Rightarrow b=3a$ —— (4)

At $x=1$, $S''(x)=0 \Rightarrow 6e+2f=0 \Rightarrow f=-3e$ —— (5)

From (3), (4) and (5): $a=-e$

Also, at $x=-1$, $S(x)=1 \Rightarrow -a+b-c+d=1 \Rightarrow -a+b-c=-1$ —— (6)

And at $x=-1$, $S(x)=-1 \Rightarrow e+f+g+2=-1 \Rightarrow -a+b+c=-3$ —— (7)

From (6) and (7): $c=-1$; from (7): $-a+b=-2$; and from (4): $-a+3a=-2 \Rightarrow a=-1$

Hence $a=-1$, $b=3a=-3$, $c=-1$, $d=2$, $e=-a=1$, $f=b=-3$, $g=c=-1$,

$h=d=2$ ✱

เช็คแล้วค่ะ เงื่อนไขทุกข้อเป็นจริง

ภัทบรรณ ศรีสุริยะชาดา No.: 540510597

DATE.: / /

Design the test for interpolation theorem on two data points

1. We know that simple Hermite interpolation by using Newton form can be describe as

$P_3(x) = a + b(x - x_1) + c(x - x_1)^2 + d(x - x_1)^2(x - x_2)$ from $f(x_1), f(x_2), f'(x_1), f'(x_2)$

By using the same formula, can we interpolate polynomial function from set of data (1, 2), (3, 7), (1, 5), (3, 9)?

If you can, show the function, otherwise, show the reason.

14/15

explain this better

- By the convention for interpolate polynomial function, we need 'distinct' points. Thus, we can't interpolate function from the given dataset.

2. For Simple Hermite interpolation, we have $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_1, f'(x_1)), (x_2, f'(x_2))$.

From $(x_1, f'(x_1)), (x_2, f'(x_2))$, we can form $f'(x)$ as a linear equation.

By Integration, we get polynomial equation with degree 2 and we can use that to interpolate $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ instead using degree 3.

If we can use polynomial degree 2, why we use polynomial degree 3?

- We "can't" use polynomial degree 2, Just try the method that given, by interpolate $f'(x)$ we get equation $y = mx + c$, m, c is a constant. We integrate it and get $\frac{m}{2}x^2 + cx + q$

But we know the value of $\frac{m}{2}$ and c, thus we have 2 equations with a variable 'q' and there'll be a chance that the system has no answer.

Thus, we need another variable to satisfy the condition, that's why we use polynomial degree 3 and the given method is useful in some cases of dataset only.

สุทธิศักดิ์ จิตรชมนา

540510598

② Make 2 exam with solution

1.1 Interpolate $f(x)$ with $p_2(x)$ at $x=0, x=1/2, x=1$.

Sol^n $p_2(x) = f(0)\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})}{(-1)(-\frac{1}{2})} + f(\tfrac{1}{2})\frac{(x-1)x}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})} + f(1)\frac{(x-\frac{1}{2})x}{(\frac{1}{2})(1)}$ ✓

$+\frac{1}{2}$

$= f(0)\,2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}) - f(\tfrac{1}{2})4(x^2-x) + f(1)\,2(x^2-\tfrac{1}{2}x)$ ✓

$= f(0) + (-3f(0)+4f(\tfrac{1}{2})-f(1))x + (2f(0)-4f(\tfrac{1}{2})+2f(1))x^2$ ✓

This can be two problems.

1.2 Approximate $\int_0^1 f(x)\,dx$ with $\int_0^1 P_2(x)\,dx$

Sol^n $\int_0^1 P_2(x)\,dx \approx \int_0^1 f(0) + (-3f(0)+4f(\tfrac{1}{2})-f(1))x + (2f(0)-4f(\tfrac{1}{2})+2f(1))x^2\,dx$

$= f(0)x + (-3f(0)+4f(\tfrac{1}{2})-f(1))\frac{x^2}{2} + (2f(0)-4f(\tfrac{1}{2})+2f(1))\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$

$= f(0) + (-3f(0)+4f(\tfrac{1}{2})-f(1))\frac{1}{2} + (2f(0)-4f(\tfrac{1}{2})+2f(1))\frac{1}{3}$

$= \frac{f(0)}{6} + \frac{4f(\frac{1}{2})}{6} + \frac{f(1)}{6}$ ✓

$= \frac{1}{6}(f(0)+4f(\tfrac{1}{2})+f(1))$ ✓

15/15

very nice!

2. Harry wants to approximate $f(x) = \frac{4}{x}$ on $[0,1]$

He use $n+1$ points polynomial interpolation and sets $x_i = \frac{i}{n}$ for $i=0,\ldots,n$. On every point $x \in [0,1]$ he doesn't want and error bigger than $\frac{1}{10^2}$. But he doesn't know how big n that he ~~have~~ has to use. (error calculate by $|f(x)-P_n(x)|\ \forall x \in [0,1]$)

how big n is

Your job is to help Harry find n by using the formular

$$|f-P_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{4(n+1)} h^{n+1}$$

Sol^n $f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$, $f'(x) = -4x^{-2}$, $f^{(2)}(x) = 4(-2)x^{-3}$, $f^{(3)}(x) = -4(-2)(-3)x^{-4}$

by the way $f^{(n)}(x) = 4(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$. set $h = \max(x_{i+1}-x_i) = \frac{1}{n}$.

$$|f-P_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{4(n+1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{4n!\,1^{n+1}}{4(n+1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n!}{(n+1)n^{n+1}} < \frac{1}{10^2}$$

✗ $f^{(n+1)}(x)$ is unbound on $[0,1]$

$(n=2)$ $\frac{2!}{3\cdot 2^3} = \frac{2}{3\cdot 8} = \frac{1}{12}$

$(n=3)$ $\frac{3!}{4\cdot 3^4} = \frac{6}{4\cdot 16} = \frac{1}{54}$

$(n=4)$ $\frac{4!}{5\cdot 4^5} = \frac{24}{5\cdot 2} = \frac{3}{640} < \frac{1}{10^2}$

The idea is right, but $f = \frac{4}{x}$ is not cont. at $x=0$.

You can fix this by working on other interval, such as $[1,2]$.

น.ส. มินตรา ไชยนันตา
540510685

Homework 4

3.) Make 2 exam problems with solutions.

3.1) Determine the interpolating polynomial of degree 3, $P_3(x)$, in Newton form for the function $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1+x^2}$ using the interpolation points $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$

Sol^{n}

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1+x^2}$$

$(x_0, y_0) = (-1, 0)$, $(x_1, y_1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5})$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$

$$P_3(x) = r_0 + r_1(x+1) + r_2(x+1)(x+\tfrac{1}{2}) + r_3(x+1)(x+\tfrac{1}{2})(x-1)$$

plug-in $x = -1 \Rightarrow 0 = r_0$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{4}{5} = 0 + r_1(-\frac{1}{2}+1)$

$r_1 = -\frac{4}{5} \cdot 2 = -\frac{8}{5}$

$x = 1 \Rightarrow 0 = 0 - \frac{8}{5}(1+1) + r_2(1+1)(1+\frac{1}{2})$

$r_2 = \frac{16}{15}$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{5} = 0 - \frac{8}{5}(\frac{1}{2}+1) + \frac{16}{15}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) + r_3(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)$

$\frac{4}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{8}{5} + r_3(-\frac{3}{4})$

$r_3 = \left(\frac{4}{5} + \frac{12}{5} - \frac{8}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{32}{15}$

$$P_3(x) = -\frac{8}{5}(x+1) + \frac{16}{15}(x+1)(x+\tfrac{1}{2}) - \frac{32}{15}(x+1)(x+\tfrac{1}{2})(x-1)$$

15/15

3.2) จงพิจารณาดูว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเสมือนพหุนามดีกรี 3 (Cubic spline) หรือไม่

$$S(x) = \begin{cases} -x^2+1 & , x \in [0,1] \\ (x-1)^3-6(x-1)^2-6(x-1)-2 & , x \in [1,3] \end{cases}$$

<u>เงื่อนไข</u>.

1.) ในแต่ละช่วงย่อยสามารถหาอนุพันธ์อันดับ 1 และอนุพันธ์อันดับ 2 ได้

$$S_1(x) = -x^2+1 \qquad ; x \in [0,1]$$

$$S_1'(x) = -2x \quad , \quad S_1''(x) = -2$$

$$S_2(x) = (x-1)^3-6(x-1)^2-6(x-1)-2 \qquad ; x \in [1,3]$$

$$S_2'(x) = 3(x-1)^2-12(x-1)-6 \quad , \quad S_2''(x) = 6(x-1)-12$$

$\therefore$ $S_1(x)$ และ $S_2(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับ 1 และอนุพันธ์อันดับ 2 ได้

2.) เงื่อนไขความต่อเนื่อง

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$$

$$S_2(x_2) = S_1(x_2)$$

$$(\cancel{1-1})^3-6(\cancel{1-1})^2-6(\cancel{1-1})-2 = -(1)^2+1$$

$$-2 \neq 0$$

จะเห็นว่า $S_2(x_2) \neq S_1(x_2)$ ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขความต่อเนื่อง

ดังนั้น $S(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเสมือนพหุนามดีกรี 3 (Cubic spline)

No. ....
Date ..../..../....

② Determine the parameters a, b, c, d, e, f, g and h so that $S(x)$ is a natural cubic spline where

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d & x \in [-1, 0] \\ ex^3 + fx^2 + gx + h & x \in [0, 1] \end{cases}$$

with interpolation conditions $S(-1) = 1$, $S(0) = 2$ and $S(1) = -1$

Sol^n On $[-1, 0]$; $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

On $[0, 1]$; $S(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h$

Continuity condition : $S(x)$, $S'(x)$ and $S''(x)$ continuous at $x = 0$

End conditions : $S''(x) \angle 0$ at $x = -1$, $x = 1$

$$S'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2bx + c \\ 3ex^2 + 2fx + g \end{cases} \quad \text{and} \quad S''(x) = \begin{cases} 6ax + 2b \\ 6ex + 2f \end{cases}$$

At $x = 0$, $S(x) = 2 \Rightarrow d = h = 2$ — ①

$S'(x)$ continuous $\Rightarrow c = g$ — ②

$S''(x)$ continuous $\Rightarrow b = f$ — ③

At $x = -1$, $S''(x) = 0 \Rightarrow -6a + 2b = 0 \Rightarrow b = 3a$ — ④

At $x = 1$; $S''(x) = 0 \Rightarrow 6e + 2f = 0 \Rightarrow f = -3e$ — ⑤

From ③, ④ and ⑤ : $a = -e$

Also, at $x = -1$, $S(x) = 1 \Rightarrow -a + b - c + d = 1 \Rightarrow -a + b - c = -1$ — ⑥

And at $x = 1$, $S(x) = -1 \Rightarrow e + f + g + 2 = -1 \Rightarrow -a + b + c = -3$ ⑦

From ⑥ and ⑦ : $c = -1$; from ⑦ ; $-a + b = -2$;

and from ④ : $-a + 3a = -2 \Rightarrow a = -1$

Thus $a = -1$, $b = 3a = -3$, $c = -1$, $d = 2$

$e = -a = 1$, $f = b = -3$, $g = c = -1$, $h = d = 2$ #

2. Ex. Proof. Thm. 1.7.6 If $f \in C^2[a,b]$ and $S(x)$ is the natural cubic spline that interpolate f at $n+1$ points $x_i, i=0,1,\cdots n$, then

$$\int_a^b S''(x)^2\,dx \le \int_a^b f''(x)^2\,dx \quad — ①$$

Pf We consider the function $e(x) = f(x) - S(x)$ with $e(x_i) = 0$ $i = 0,1,\cdots,n$, and write the approximate curvature of $f = S + e$ as

$$\int_a^b f''(x)^2 dx = \int_a^b (S''(x) + e''(x))^2 dx =$$

$$\int_a^b S''(x)^2 dx + \int_a^b e''(x)^2 dx + 2\int_a^b S''(x)e''(x)\,dx \quad — ②$$

we complete the proof by showing that the last term in the right-hand side of ② is 0

Integrating by parts we obtain.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} e''(x)S''(x)\,dx = S''(x)e'(x)\Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''(x)e'(x)\,dx$$

Summing over all intervals, using the fact that $e \in C^2$ and $S''(a) = S''(b) = 0$. Nothing that $S'''(x) = C_i$ is a constant on (x_i, x_{i+1}) we obtain.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e''(x)S''(x)dx = -\sum_{i=0}^{n-1} C_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} e'(x)\,dx$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} C_i[e(x_{i+1}) - e(x_i)] = 0$$

We used the fact that $e(x_i) = 0$ we establish $\int_a^b S''(x)e''(x)dx = 0$

Combining this ② leads to ①.

③ ลองสร้างการประมาณค่า~~ส่วนโค้งเส้นตรง~~ จากข้อมูลต่อไปนี้

x	-1	0	1
y	0	1	3

อันนี้เรียกว่า linear spline
หรือ ฟังก์ชันเสมือนพหุนามเชิงเส้น
หรือฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังหนึ่ง

วิธีทำ

$$S_{1,2}(x) = \begin{cases} 0 \cdot \dfrac{x-0}{(-1)-0} + 1 \cdot \dfrac{x-(-1)}{0-(-1)} \checkmark & , x \in [-1,0] \\ 1 \cdot \dfrac{x-1}{0-1} \checkmark + 3 \cdot \dfrac{x-0}{1-0} \checkmark & , x \in [0,1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1 & , x \in [-1,0] \\ 2x+1 & , x \in [0,1] \end{cases}$$

2 ✱ จงใช้ Newton approach to formulate a general Hermite interpolation โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$g(x_0) = f(x_0)$ $\quad g(x_1) = f(x_1)$ $\quad g(x_2) = f(x_2)$

$g'(x_0) = f'(x_0)$ $\quad g'(x_1) = f'(x_1)$ $\quad g'(x_2) = f'(x_2)$

$g''(x_0) = f''(x_0)$ $\quad g''(x_2) = f''(x_2)$

โดยที่กำหนดให้ $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับสองได้ ✓

Sol^n :

$$
\begin{aligned}
g(x) = {} & \gamma_0 + \gamma_1(x-x_0) + \gamma_2(x-x_0)^2 + \gamma_3(x-x_0)^3 \\
& + \gamma_4(x-x_0)^3(x-x_1) + \gamma_5(x-x_0)^3(x-x_1)^2 + \\
& \cancel{\gamma_6(x-x_0)^3(x-x_1)^2} + \\
& \gamma_7(x-x_0)^3(x-x_1)^2(x-x_2) + \\
& \gamma_8(x-x_0)^3(x-x_1)^2(x-x_2)^2
\end{aligned}
$$

เกินมาหนึ่งพจน์

✱

อันนี้คล้ายๆ กับใน เลคเชอร์

คำถาม

จงใช้วิธีของนิวตัน ~~ในการเขียน~~ เพื่อเขียนพหุนาม $g(x)$ ซึ่งมีเงื่อนไขต่อไปนี้

:

ปาณัสม์
550510454

DATE / / NO SUBJECT

$\frac{15}{15}$

③ Create 2 problems for exam (with sol$^{\underline{n}}$)

3.1) Show that, if $x_i \neq x_j$ for all $i,j = 0,\dots,n$; $n \geq 1$, then

$$\sum_{i=0}^{n} x_i l_i(x) = x \quad \text{where} \quad l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} .$$

Sol$^{\underline{n}}$: Let f be a function $f(x) = x$, then we can see that

$$\sum_{i=0}^{n} x_i l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$ which is the Lagrange form

for the polynomial p_n, where $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$,

interpolating the function f at the points $x = x_0, \dots, x_n$.

The system $\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ has a unique solution for $a_0, \dots, a_n$

because $\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0$ since $x_j \neq x_i \ \forall i,j = 0,\dots,n$

We can see that $a_1 = 1$ and $a_i = 0 \ \forall i \neq 1$ satisfies the system of equation $\therefore p_n(x) = 0 + (1)x + 0 \dots + 0 = x$

$\because \sum_{i=0}^{n} x_i l_i(x) = p_n(x) \qquad \therefore \sum_{i=0}^{n} x_i l_i(x) = x$ ⋕

Another way to prove this is to set $q(x) = \sum x_i l_i(x) - x$.
Note that q is polynomial of degree $\le n$, but it has
$n+1$ zeros, so $q = 0$. This implies $\sum x_i l_i(x) = x$.

ปาณิสม์ กัลยาณสมิทร
55051045 4

DATE: / / NO.: SUBJECT:

3.2) Show that for a function f which has a continuous $(n+1)^{th}$ derivative and a polynomial p_n interpolating f at $x = x_0, \dots, x_n$, where $x_i < x_j$ $\forall i<j \in \{0, \dots, n\}$, $f = p_n$ iff f is a polynomial of degree $\leq n$.

Sol$^{\underline{n}}$: $(\Leftarrow)$ $(\cancel{\Rightarrow})$ Let f be a polynomial of degree $\leq n$, then

$[a,b]$ is a close interval containing $x_0, \dots, x_n, t$

clearly $f^{(n+1)'}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\because$ From theorem 3.2 pp.134-135 we have

$$f(t) - p_n(t) = \frac{(t-x_0)\dots(t-x_n)}{(n+1)!} \cancel{f^{(n+1)'}(\xi)}^{\,0} \quad ; \xi \in [a,b]$$

$$f(t) - p_n(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = p_n(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ $f = p_n$ #

$(\Rightarrow)$ $(\cancel{\Leftarrow})$ Let $f = p_n$ then obviously f is a polynomial of degree $\leq n$ since p_n is. #

Again, you can prove this by setting $q = p - f$ and show that $q = 0$, because $q \in P_n$ but q has $(n+1)$ zeros.

The first problem could be the direct result of the second problem.
these two problems are very similar.

น.ส. ณัฏฐ์สุกานต์ สุภาใจดี

540510579

3. Make 2 exam problems with solutions.

1) [Lagrange Interpolation]

Let $f(x) = 2e^x$ and let $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ and $x_2 = 7$.

Write an expression for the Lagrange interpolating polynomial for f over x_0, x_1, x_2.

15/15

Solution : $(x_0, y_0) = (1, 2e)$

$(x_1, y_1) = (4, 2e^4)$

$(x_2, y_2) = (7, 2e^7)$

$$l_0(x) = \frac{(x-4)(x-7)}{(1-4)(1-7)} = \frac{1}{18}(x-4)(x-7)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-7)}{(4-1)(4-7)} = \frac{1}{-9}(x-1)(x-7)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(7-1)(7-4)} = \frac{1}{18}(x-1)(x-4)$$

Lagrange's form

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$= \frac{2e}{18}(x-4)(x-7) + \frac{2e^4}{-9}(x-1)(x-7) + \frac{2e^7}{18}(x-1)(x-4)$$

$$= \frac{e}{9}(x^2-11x+28) - \frac{2e^4}{9}(x^2-8x+7) + \frac{e^7}{9}(x^2-5x+4)$$

$$\therefore P_2(x) = x^2\left(\frac{e}{9} - \frac{2e^4}{9} + \frac{e^7}{9}\right) + x\left(\frac{-11e}{9} + \frac{16e^4}{9} - \frac{5e^7}{9}\right)$$

$$+ \frac{28e}{9} - \frac{14e^4}{9} + \frac{4e^7}{9}$$

※

NO. ....
DATE / /

2) [Natural Cubic Spline.]

For the data points $(1,1)$, $(2,\frac{1}{2})$, $(3,\frac{1}{3})$, $(4,\frac{1}{4})$,

find the system of equation for solving $\alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ (using natural end condition.)

Solution: Here $n = 3$ and $h = 1$ ✓

Use natural end condition.

conditions: (1) $S''(1) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}\alpha_{-3} + \left(\frac{-2}{h^2}\right)\alpha_{-2} + \left(\frac{1}{h^2}\right)\alpha_{-1} = 0$$

จาก $h = 1$ จะได้ว่า

$$\alpha_{-3} - 2\alpha_{-2} + \alpha_{-1} = 0 \quad \text{— (1)}$$

(2) $S''(4) = 0$

$$\Rightarrow \alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad \text{— (2)}$$

(3) $S(1) = f(1) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\alpha_{-3} + \frac{2}{3}\alpha_{-2} + \frac{1}{6}\alpha_{-1} = 1 \quad \text{— (3)}$$

(4) $S(2) = f(2) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\alpha_{-2} + \frac{2}{3}\alpha_{-1} + \frac{1}{6}\alpha_0 = \frac{1}{2} \quad \text{— (4)}$$

(5) $S(3) = f(3) = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\alpha_{-1} + \frac{2}{3}\alpha_0 + \frac{1}{6}\alpha_1 = \frac{1}{3} \quad \text{— (5)}$$

(6) $S(4) = f(4) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{6}\alpha_2 = \frac{1}{4} \quad \text{— (6)}$$

So, we get the system of equation for solving $\alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-3} \\ \alpha_{-2} \\ \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad \#$$

Note :: Use matlab for solving, we have

$$\begin{aligned} \alpha_{-3} &= 1.5833 \\ \alpha_{-2} &= 1.0000 \\ \alpha_{-1} &= 0.4167 \\ \alpha_0 &= 0.3333 \\ \alpha_1 &= 0.2500 \\ \alpha_2 &= 0.1667 \end{aligned}$$

ค่า α_i , $i = -3, 2$ ที่ได้มานี้เอาไปใช้ทำอะไร

NO.

นายจักรกฤษณ์ แดงแสน 540510574

1. Determine the interpolation polynomial of degree 2, $p_2(x)$ in Largrange forms pass through the tree point $(0,1)$, $(-1,2)$, and $(1,3)$

Sol^n จาก $P_2(x) = l_0 y_0 + l_1 y_1 + l_2 y_2$

$$P_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} \cdot 3$$

$$= \frac{x^2-1}{-1} + 2\frac{(x^2-x)}{2} + 3\frac{(x^2+x)}{2}$$

$$= -x^2+1+x^2-x+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}+1$$

$$\therefore \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}+1 \quad \#$$

15/15

2. find the cubic Hermite polynomial or "clamped cubic" that satisfies

$$p(1) = 2, \quad p'(1) = 1$$
$$p(3) = 1, \quad p'(3) = 2$$

ตรวจสอบคำตอบแล้วว่าถูก

Sol^n จาก formula for a general cubic equation

จะได้ว่า $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

และได้ว่า $p'(x) = 3ax^2+2bx+c$

แทนค่าเงื่อนไข

$$2 = a+b+c+d \quad —①$$
$$1 = 27a+9b+3c+d \quad —②$$
$$1 = 3a+2b+c \quad —③$$
$$2 = 27a+6b+c \quad —④$$

① − ② $\quad 1 = -26a-8b-2c \quad —⑤$

④ − ③ $\quad 1 = 24a+4b \quad —⑥$

2×③ $\quad 2 = 6a+4b+2c \quad —⑦$

⑦ + ⑤ $\quad 3 = -20a-4b \quad —⑧$

⑥ + ⑧ $\quad 4 = 4a$

$a = 1$ แทนใน ⑥

$3+20 = -4b$

$$1 = 3(1) + 2\left(-\frac{23}{4}\right) + c$$

$$c = 1 - 3 + \frac{23}{2} = \frac{-4+23}{2} = \frac{19}{2}$$ แทนใน ①

$$2 = 1 + \left(-\frac{23}{4}\right) + \frac{19}{2} + d$$

$$d = 1 + \frac{23}{4} - \frac{19}{2} = \frac{4+23-38}{4} = \frac{-11}{4}$$

จาก $$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\therefore \quad p(x) = x^3 - \frac{23x^2}{4} + \frac{19}{2}x - \frac{11}{4} \quad \#$$

ถ้าใช้วิธีของนิวตัน จะได้ว่า

$$p(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x-1) + \gamma_2(x-1)^2 + \gamma_3(x-1)^2(x-3)$$

NO.

DATE

นางสาวปัญจารีย์ สาลี รหัส 540510667

Find a Hermite interpolating polynomial for the following data, which is based on $f(x) = \sqrt{x}$

	$f(x)$	$f'(x)$
$x_0 = 1$	$f_0 = 1$	$f_0' = 1/2$
$x_1 = 4$	$f_1 = 2$	$f_1' = 1/4$

Solution. Since $n = 1$ there are $2n+2 = 4$ condition that must be met, and therefore the order of the polynomial will be $2n+1 = 3$. The interpolating polynomial is

$$P(x) = H_3(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{1} f_j H_{1j}(x) + \sum_{j=0}^{1} f_j' \hat{H}_{1j}(x)$$

$$= f_0 H_{10}(x) + f_1 H_{11}(x) + f_0' \hat{H}_{10}(x) + f_1' \hat{H}_{11}(x)$$

$$= H_{10}(x) + 2H_{11}(x) + \frac{1}{2}\hat{H}_{10}(x) + \frac{1}{4}\hat{H}_{11}(x)$$

*

To find the H's we need to first find the L_{1j}'s,

$$L_{10}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-4}{-3} = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$L_{11}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-1}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

from this we can determined that $L_{10}' = \frac{-1}{3}$ and $L_{11}' = \frac{1}{3}$ Hence

$$H_{10}(x) = [1 - 2(x - x_0)L_{10}'(x_0)]L_{10}^2(x)$$

$$= \left(1 - 2(x-1)\left(\frac{-1}{3}\right)\right)\left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{27}(1+2x)(4-x)^2$$

and

$$H_{11}(x) = [1 - 2(x - x_1)L_{11}'(x_1)]L_{11}^2(x)$$

$$= \left(1 - 2(x-4)\left(\frac{1}{3}\right)\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Similarly

$$\hat{H}_{10}(x) = (x - x_0)L^2_{10}(x)$$

$$= \frac{1}{9}(x-1)(4-x)^2$$

$$\hat{H}_{11}(x) = (x - x_1)L^2_{11}(x)$$

$$= \frac{1}{9}(x-4)(x-1)^2$$

Thus from equation *

$$P(x) = H_{10}(x) + 2H_{11}(x) + \frac{1}{2}\hat{H}_{10}(x) + \frac{1}{4}\hat{H}_{11}(x)$$

$$= \frac{1}{27}(1+2x)(4-x)^2 + \frac{2}{27}(11-2x)(x-1)^2 + \frac{1}{18}(x-1)(4-x)^2 + \frac{1}{36}(x-4)(x-1)^2$$

NO. ....

DATE : ....../....../......

นายเอกชัย ตานะกุล 540510733 sec 1

Homework 4

3. Make two exam problems, which solutions, for this chapter.

1. Determine the interpolating polynomial of degree 2, $p_2(x)$, in both Lagrange and Newton forms. Using the interpolation points (2,1), (3,0), (1,4).

$\underline{Sol^n}$ $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

$x_1 = 3$, $y_1 = 0$

$x_2 = 1$, $y_2 = 4$

15/15

1.1) Method of Lagrange

$$l_0(x_0) = \frac{(x-3)(x-1)}{(2-3)(2-1)} = \frac{x^2-4x+3}{-1}$$

$$l_1(x_1) = \frac{(x-2)(x-1)}{(3-2)(3-1)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$l_2(x_2) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{2}$$

$$\therefore P_2(x) = (1)l_0(x) + \cancel{(0)l_1(x)} + 4\,l_2(x)$$

$$= (-x^2+4x-3) + \cancel{4}^{2}\left(\frac{x^2-5x+6}{\cancel{2}}\right)$$

$$= -x^2+4x-3+2x^2-10x+12$$

$$= x^2-6x+9$$

$$\therefore p_2(2) = 2^2-6(2)+9 = 1$$

$$p_2(3) = 3^2-6(3)+9 = 0$$

$$p_2(1) = 1^2-6(1)+9 = 4$$

NO. ....

DATE : ....../....../......

1 2) Method of Newton

$$p_2(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x-x_0) + \gamma_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$= \gamma_0 + \gamma_1(x-2) + \gamma_2(x-2)(x-3)$$

find $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$

Plug-in $x = 2 \Rightarrow 1 = \gamma_0$

Plug-in $x = 3 \Rightarrow 0 = 1 + \gamma_1(3-2)$

$-1 = \gamma_1$

Plug-in $x = 1 \Rightarrow 4 = 1 - 1(1-2) + \gamma_2(1-2)(1-3)$

$4 = 1 + 1 + 2\gamma_2$

$2 = 2\gamma_2$

$1 = \gamma_2$

$$\therefore p_2(x) = 1 - (x-2) + (x-2)(x-3)$$
$$= 1 - x + 2 + x^2 - 5x + 6$$
$$= x^2 - 6x + 9$$

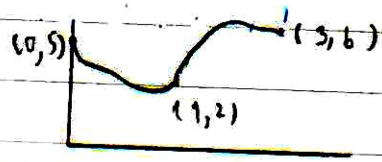
$p_2(2) = 2^2 - 6(2) + 9 = 1$

$p_2(3) = 3^2 - 6(3) + 9 = 0$

$p_2(1) = 1^2 - 6(1) + 9 = 4$

2. จงอธิบายฟังก์ชันเสมือนพหุนามดีกรี 3 (cubic spline)

ตอบ.



การใช้สมการเส้นตรงมาประมาณค่าในช่วงข้อมูลที่กำหนดให้นั้น ในบางครั้งอาจได้ผลไม่เป็นที่น่าพอใจนัก เนื่องจากธรรมชาติของข้อมูลดังกล่าวอาจไม่ได้ประพฤติตัวตามสมการเส้นตรง ในกรณีเช่นนี้เราจำต้องใช้พหุนามดีกรีสูงขึ้น จะศึกษาการใช้ฟังก์ชันเสมือนพหุนามดีกรี 3 หรือ cubic spline มาใช้ประมาณค่าในช่วง เป็นเทคนิคการประมาณค่าในช่วงที่ใช้กันอย่างแพร่หลายและเป็นที่นิยมมากที่สุด ทำไม? ฟังก์ชันเสมือนพหุนามกำลังสาม $S(x)$ เป็น C^2 Piecewise Cubic polynomial หมายความว่า

และ $= x_{i+1}$

• $S(x)$ เป็น Piecewise Cubic ระหว่างจุด x_i ที่กำหนดให้ใดๆ กล่าวคือ

NO. ....

DATE : ..../..../....

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 & , x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 & , x \in [x_2, x_3] \\ \vdots & \vdots \\ S_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3 & , x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

- $S(x)$ เป็น C^2 หมายความว่า $S_{3,n}(x)$ มีความต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองที่ต่อเนื่องทุก ๆ ที่ในช่วง $[a, b]$ (โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่จุด x_i)
- และการจะให้ $S_{3,n}(x)$ เป็นฟังก์ชันเสมือนพหุนามดีกรี 3 ที่ใช้ประมาณค่าในช่วง จะต้องเพิ่มเงื่อนไขต่อไปนี้

$$S(x_i) = f_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

#

$\downarrow$

เงื่อนไข ยังไม่พอ (ขาดอีก 2 เงื่อนไข)

ควรจะโชว์ด้วยว่าทำไมเงื่อนไขไม่พอ