

แบบฝึกหัด

1. จงหาปริพันธ์ $\int x^2 e^{-3x} dx$

2. จงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุนบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งที่อยู่ใต้กราฟ $y = \log_2 x, x \in [1, 2]$ รอบเส้นตรง $x = \frac{1}{2}$ โดยใช้วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

3. จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_0^{\pi/2} \sin^7\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$

① Use integration by parts twice

$$\int x^2 e^{-3x} dx = \cancel{-\frac{1}{3}x^2 e^{-3x}} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = e^{-3x} dx \\ du = 2x dx \quad v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array}}$$

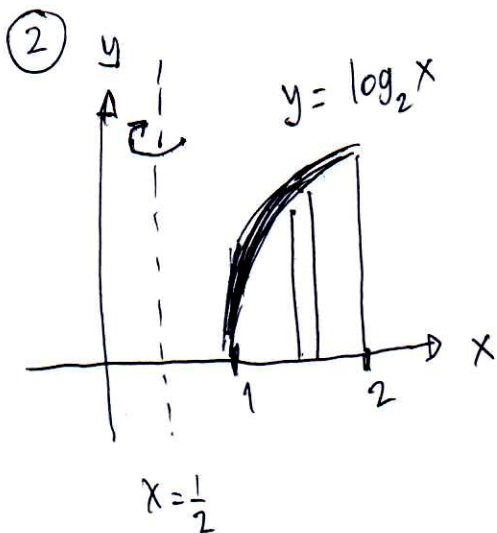
$$\boxed{\begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{-3x} dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3}x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx \right] \\ &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} + \frac{2}{9} \int e^{-3x} dx \\ &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{3} \right) e^{-3x} + C \\ &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C \end{aligned}$$

Use table

x^2	+	e^{-3x}
$2x$	-	$-\frac{1}{3}e^{-3x}$
2	+	$\frac{1}{9}e^{-3x}$
0	-	$-\frac{1}{27}e^{-3x}$

$$\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$$



$$V = \int_1^2 2\pi r h dx$$

$$= \int_1^2 2\pi x \log_2 x dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x \log_2 x dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2 \log_2 x \right]_1^2 - 2\pi \left[\int_1^2 \frac{1}{2 \ln 2} x dx \right]$$

~~$u = x$~~

$$u = \log_2 x \quad dv = x$$

$$du = \frac{1}{x \ln 2} dx \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi [2-0] - 2\pi \cdot \frac{1}{2\ln 2} \int_1^2 x dx \\
 &= 4\pi - \frac{\pi}{\ln 2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = 4\pi - \frac{\pi}{\ln 2} \left[\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right] \\
 &= 4\pi - \frac{\pi}{\ln 2} \left[2 - \frac{1}{2} \right] = 4\pi - \frac{3\pi}{2\ln 2}
 \end{aligned}$$

③ Consider $\int \sin^7\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$$= \int \sin^6\left(\frac{x}{2}\right) \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \sin^6\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\text{let } u = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$du = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$2du = \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int \sin^6\left(\frac{x}{2}\right) \left[1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int u^6 [1 - u^2]^2 \cdot 2 du$$

$$= 2 \int u^6 (1 - 2u^2 + u^4) du$$

$$= 2 \int (u^6 - 2u^8 + u^{10}) du$$

$$= 2 \left[\frac{1}{8} u^8 - \frac{2}{10} u^{10} + \frac{1}{12} u^{12} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{8} \sin^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5} \sin^{10}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{12} \sin^{12}\left(\frac{x}{2}\right) \right]$$

$$\text{So, } \int_0^{\pi/2} \sin^7\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{4} \sin^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{5} \sin^{10}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{6} \sin^{12}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64}$$

$$= \frac{11}{1920}$$