1.10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน (Extreme values of functions)

นิยาม 1.10.1 ให้ c เป็นจุดบนโดเมน D ของฟังก์ชัน f เราจะกล่าวว่า $f(c)$ เป็น

(i) **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (local maximum)** ที่ c ก็ต่อเมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วงเปิดหนึ่งที่บรรจุ c

(ii) **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (local minimum)** ที่ c ก็ต่อเมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วงเปิดหนึ่งที่บรรจุ c

(iii) **ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum)** ที่ c ก็ต่อเมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ใน D

(iv) **ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum)** ที่ c ก็ต่อเมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ใน D

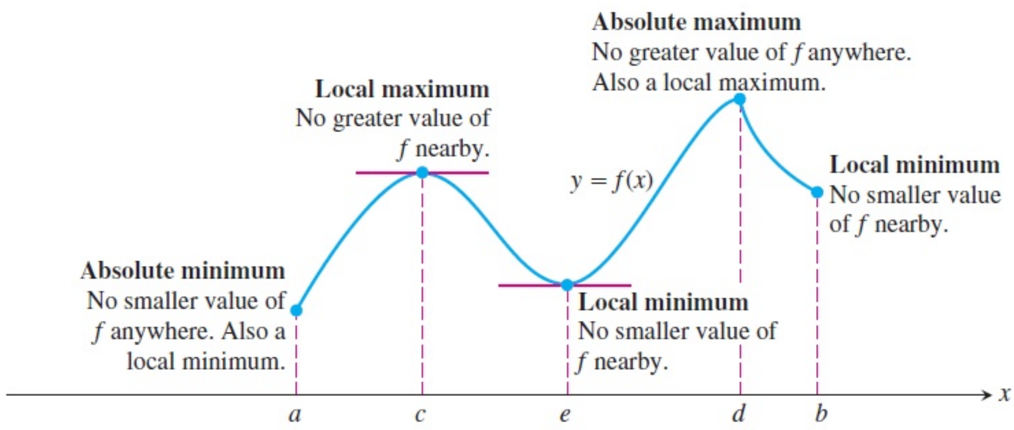
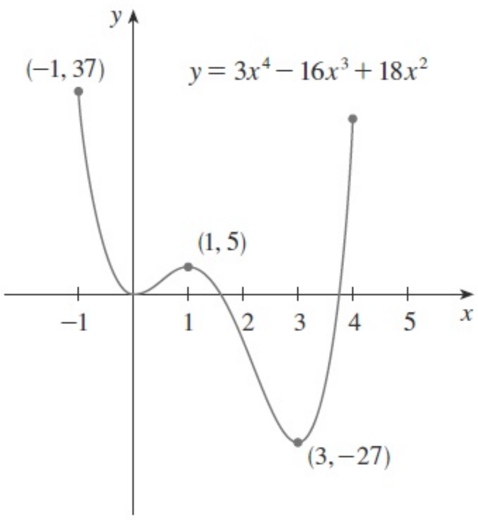


Figure 1: Extreme values

ตัวอย่าง 1.10.2 พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ บนช่วง $[-1, 4]$



จากรูปจะเห็นว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ . . . . และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ . . . .

ข้อสังเกต จากรูปที่ 1 จะเห็นว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน มักจะเกิดที่จุดต่อไปนี้

1. จุดที่ฟังก์ชันมีอนุพันธ์เป็นศูนย์ เช่น จุด $x = c$ และ $x = e$

2. จุดที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้ เช่น จุด $x = d$

นิยาม 1.10.3 ค่าวิกฤต (critical number) ของฟังก์ชัน f คือค่า c ที่อยู่ในโดเมนของ f ที่ไม่ใช่จุดปลายช่วงซึ่ง $f'(c) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ c

ตัวอย่าง 1.10.4 กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$ จงหาค่าวิกฤตของ f

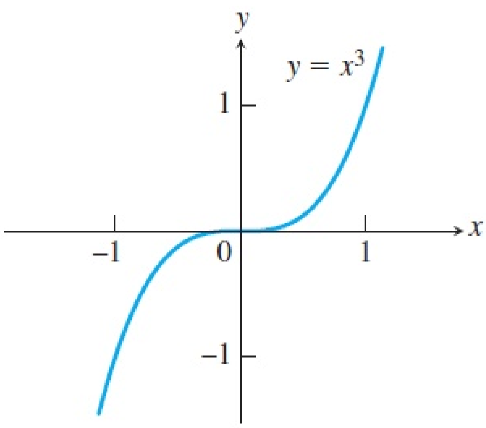
ทฤษฎีบท 1.10.5 (Fermat's Theorem) ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c และ $f'(c)$ หาค่าได้แล้ว จะได้ว่า $f'(c) = 0$

ข้อสังเกต

1. จากทฤษฎีบทของ Fermat จะได้ว่าถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว c จะเป็นค่าวิกฤตของ f

2. บทกลับของทฤษฎีบทของ Fermat ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.10.6 จงหาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

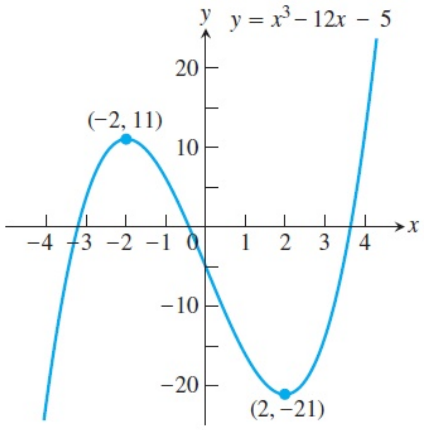


นิยาม 1.10.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และให้ x_1 และ x_2 เป็นสองจุดใดๆ บน I โดยที่ $x_1 < x_2$ เราจะเรียก f ว่าเป็น

(i) **ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง** I ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$

(ii) **ฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง** I ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$

ตัวอย่าง 1.10.8 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูป



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง . . . .

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง . . . .

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 1.10.8 จะเห็นว่าบนช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลดอนุพันธ์ของ f จะมีค่าเป็นลบ นั่นคือ $f'(x) < 0$ และบนช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มอนุพันธ์ของ f จะมีค่าเป็นบวก นั่นคือ $f'(x) > 0$

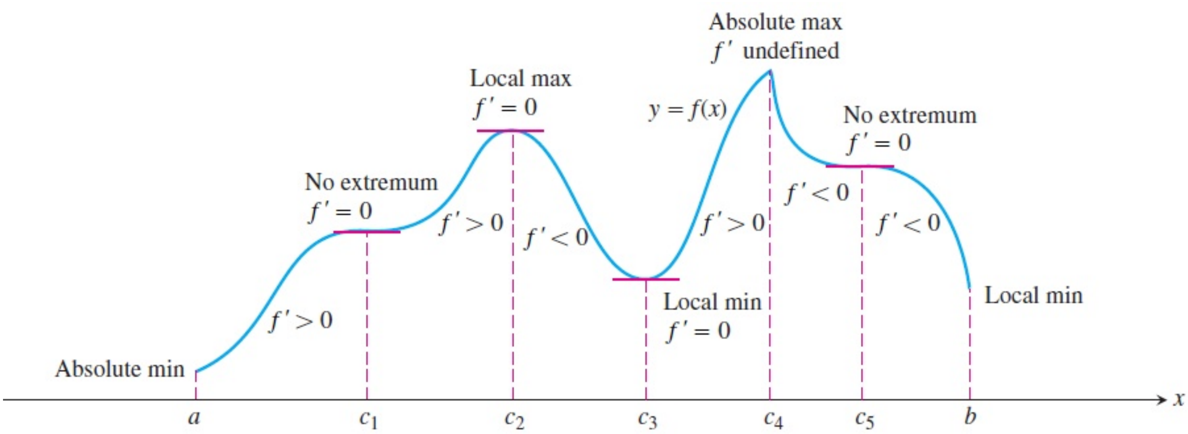


Figure 2: Increasing and decreasing functions

ทฤษฎีบท 1.10.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

(i) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับแต่ละ x ในช่วง (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$

(ii) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับแต่ละ x ในช่วง (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 1.10.10 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดบนช่วงใดบ้าง

(1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

(2) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x - 4)$

เราสามารถนำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันมาช่วยในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้ดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ c เป็นค่าวิกฤตของ f

- ถ้า f' เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบที่ c แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c
- ถ้า f' เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบเป็นบวกที่ c แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c
- ถ้า f' ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายที่ c แล้ว f จะไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c

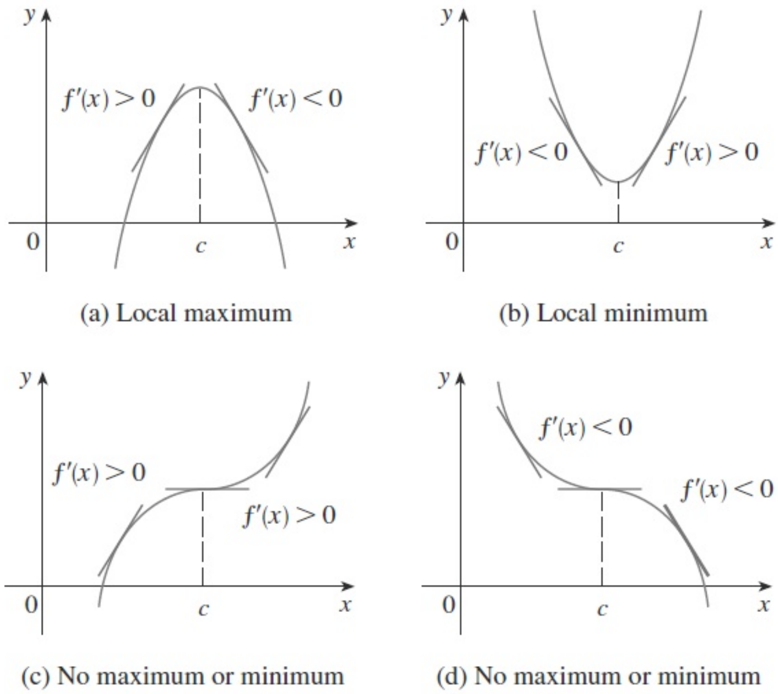


Figure 3: First derivative test for local extreme values

ตัวอย่าง 1.10.11 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

(2) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x - 4)$

(3) $g(x) = x + 2\sin x$

ตัวอย่าง 1.10.12 มีกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 12 นิ้ว $\times$ 12 นิ้ว ต้องการสร้างกล่องกระดาษฝาเปิดโดยการตัดมุมของกระดาษแข็งออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันทุกมุม (ดังรูป) จงหาว่าต้องตัดกระดาษออกมุมละกี่นิ้วเพื่อให้กล่องที่ได้มีปริมาตรมากที่สุด