1.5 อัตราสัมพัทธ์ (Related rates)

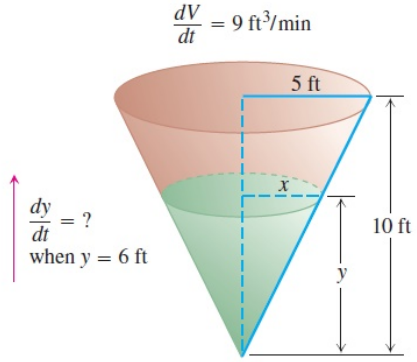
สมมติว่า y เป็นฟังก์ชันของ x ในขณะที่ x เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t เราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ t $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ โดยใช้กฎลูกโซ่ได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

เรียกปัญหาเหล่านี้ว่า **ปัญหาอัตราสัมพัทธ์**

หรือกล่าวได้ว่า ปัญหาอัตราสัมพัทธ์เป็นการศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหนึ่งๆ เมื่ออีกปริมาณหนึ่งที่เกี่ยวข้องก็กำลังเปลี่ยนแปลงไปด้วย

ตัวอย่าง 1.5.1 เปิดน้ำใส่แทงค์น้ำรูปกรวยกลมด้วยอัตราเร็ว 9 ลูกบาศก์ฟุต/นาที สมมติว่าแทงค์น้ำรูปกรวยนี้สูง 10 ฟุตและมีรัศมีปากกรวย 5 ฟุตวางในแนวตั้งดังรูป จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของระดับน้ำที่ความสูง 6 ฟุต

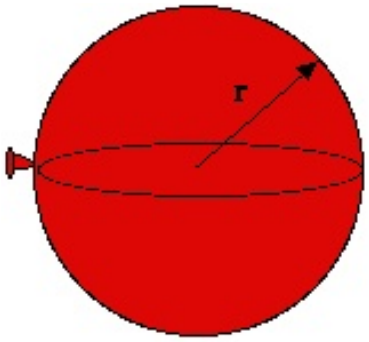


การแก้ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

1. วาดรูปและกำหนดตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง
2. สร้างสมการความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ที่กำหนดขึ้น
3. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างโดยกฎลูกโซ่
4. แก้สมการและแทนค่าเพื่อหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการ

ตัวอย่าง 1.5.2 อนุภาค P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง $y = \sqrt{x^2 - 4}, x \geq 2$ ถ้าอัตราเร็วที่ P เคลื่อนที่ไปในแนวแกน X เป็น 5 หน่วย/วินาที จงหาอัตราเร็วที่ P เคลื่อนที่ไปในแนวแกน Y ในขณะที่ $x = 3$

ตัวอย่าง 1.5.3 ลูกโป่งที่มีลักษณะเป็นทรงกลมถูกเป่าให้ใหญ่ขึ้นโดยที่ลูกโป่งยังคงรักษารูปร่างเป็นทรงกลมอยู่ตลอดเวลา (ปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมี r เท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$)

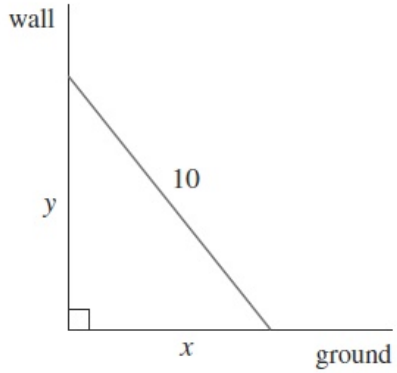


(a) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีของลูกโป่งและปริมาตรของลมในลูกโป่ง

(b) ถ้าต้องการสูบลมเข้าไปในลูกโป่งเพื่อทำให้รัศมีของลูกโป่งขยายขึ้นด้วยอัตราเร็วคงที่เท่ากับ 1 เซนติเมตรต่อวินาที จะต้องสูบลมเข้าลูกโป่งด้วยอัตราคงที่หรือไม่ จงอธิบาย

(c) ในทำนองกลับกัน ถ้าลมถูกอัดเข้าไปในลูกโป่งด้วยอัตราคงที่เท่ากับ 1 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที รัศมีของลูกโป่งจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่หรือไม่ จงอธิบาย

ตัวอย่าง 1.5.4 บันไดยาว 10 เมตรวางพาดกำแพงที่ตั้งฉากกับพื้น ดังรูป ถ้าปลายบันไดด้านที่สัมผัสพื้นขยับออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 1 เมตร/วินาที จงหาอัตราเร็วที่ปลายบันไดด้านที่สัมผัสกำแพงที่กำลังเลื่อนลง เมื่อปลายด้านสัมผัสพื้นห่างจากกำแพง 6 เมตร



ตัวอย่าง 1.5.5 บอลลูนลูกหนึ่งถูกปล่อยจากพื้นในแนวตรง ชายคนหนึ่งยืนสังเกตการเคลื่อนที่ของบอลลูนห่างจากจุดปล่อยบอลลูน 500 ฟุต (ดังรูป) ขณะที่มุมที่ชายคนดังกล่าวมองดูบอลลูนเป็น $\frac{\pi}{4}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมดังกล่าวเป็น 0.14 เรเดียน/นาที จงหาอัตราเร็วที่บอลลูนกำลังลอยขึ้นในขณะนั้น