เอกสารประกอบการสอน

กระบวนวิชา 206217

(แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์)

สายัญ ปันมา

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

2554

เอกสารประกอบการสอน

กระบวนวิชา 206217

(แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์)

สายัญ ปันมา

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

2554

ภาควิชาคณิตศาสตร์ **คณะวิทยาศาสตร์**

ว.คณ. 217 (206217) **แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์** **3(3/3 - 0/0)**

เงื่อนไขที่ต้องผ่านก่อน ว.คณ. 104 (206104) หรือ ว.คณ. 112 (206112) หรือ ว.คณ. 162 (206162)

คำอธิบายลักษณะกระบวนวิชา

ตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ รวมทั้งหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซตอนันต์และเซตจำกัด เซตนับได้และเซตนับไม่ได้

วัตถุประสงค์กระบวนวิชา

นักศึกษาได้แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์และสามารถพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์บางข้อความได้

เนื้อหากระบวนวิชา	**จำนวนชั่วโมงบรรยาย**
1. ตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์	9
1.1 ประพจน์และตัวเชื่อม	
1.2 ตัวบ่งปริมาณ	
1.3 วิธีการพิสูจน์	
1.4 การพิสูจน์ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ	
1.5 หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	
2. เซต	6
2.1 เซตและเซตย่อย	
2.2 การดำเนินการบนเซตและการพิสูจน์กฎต่างๆ	
2.3 การวางนัยทั่วไปของยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน	
3. ความสัมพันธ์	9
3.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน	
3.2 บทนิยามและกราฟของความสัมพันธ์	
3.3 ความสัมพันธ์สมมูลและผลแบ่งกั้น	
3.4 อันดับบางส่วน อันดับเชิงเส้น และหลักการจัดอันดับดี	

เนื้อหากระบวนวิชา	**จำนวนชั่วโมงบรรยาย**
4. ฟังก์ชัน	9
4.1 บทนิยามของฟังก์ชัน	
4.2 ฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน	
4.3 ภาพและภาพผกผันของฟังก์ชัน	
4.4 ฟังก์ชันทั่วถึง และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง	
4.5 ฟังก์ชันคงสภาพอันดับ	
5. เซตอนันต์และเซตจำกัด	6
5.1 บทนิยามของเซตอนันต์และเซตจำกัด	
5.2 สมบัติของเซตอนันต์และเซตจำกัด	
6. เซตนับได้และเซตนับไม่ได้	6
6.1 บทนิยามของเซตนับได้และเซตนับไม่ได้	
6.2 สมบัติของเซตนับได้	
6.3 ภาวะเชิงการนับ	
รวม	**45**

กระบวนวิชานี้ได้ผ่านความเห็นชอบจากที่ประชุมกรรมการประจำคณะวิทยาศาสตร์ใน คราวประชุมครั้งที่ 16/2548 วันที่ 15 เดือน พฤศจิกายน พ.ศ 2548 กำหนดให้มีผลบังคับใช้ตั้งแต่ภาค การศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2549 เป็นต้นไป

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ดร.มงคล รายะนาคร)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ เดือน พฤศจิกายน พ.ศ 2548

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ ผู้เขียนได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อให้นักศึกษา ใช้ศึกษาประกอบการเรียนรายวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์ (Fundamental Concepts of Mathematics) รหัสวิชา 206217 เป็นรายวิชาในหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต และศึกษาศาสตรบัณฑิต โดยมีเนื้อหาเป็นไปตามที่กำหนดในหลักสูตร และได้แบ่งเวลาที่ใช้ในการสอนในแต่ละบท ดังนี้

	จำนวนชั่วโมง
บทที่ 1 ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์	9
บทที่ 2 เซต	6
บทที่ 3 ความสัมพันธ์	9
บทที่ 4 ฟังก์ชัน	9
บทที่ 5 เซตจำกัดและเซตอนันต์	6
บทที่ 6 เซตนับได้และเซตนับไม่ได้	6
รวม	45

ผู้เขียนหวังว่า เอกสารนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป

สายัญ ปันมา

สารบัญ

หน้า

การจัดการเรียนการสอน

บทที่ 1 เรื่อง ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์

กระบวนวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
(Fundamental Concepts of Mathematics)

ชื่อผู้สอน อาจารย์ ดร. สายัญ ปันมา

เวลาที่ใช้ 9 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถเขียนเค้าโครงการพิสูจน์แบบต่าง ๆ ได้
2. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์บางข้อความได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. แบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัด
3. ตัวแทนแต่ละกลุ่มนำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
2. กระดาษ และปากกา
3. เครื่องฉายทึบแสง

บทที่ 1

ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์ (Logic and Proofs)

ในบทนี้ขั้นแรก เราจะกล่าวถึงธรรมชาติของคณิตศาสตร์ และ ระบบคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นประโยชน์ในการเลือกวิธีการในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสม จากนั้นเราจะกล่าวถึง ประพจน์และตัวเชื่อม ตัวบ่งปริมาณ วิธีการพิสูจน์ การพิสูจน์ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้อ่านเคยทราบมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อชีวิตของมนุษย์เป็นอย่างมาก มนุษย์เริ่มเรียนรู้แนวทางคณิตศาสตร์จากสภาพแวดล้อมหรือธรรมชาติแล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ซึ่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการดำรงชีวิตได้ โดยทั่วไปคนที่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์โดยตรงจะเข้าใจว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องของตัวเลขและการคำนวณเท่านั้น ซึ่งที่จริงแล้วคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่หมายรวมไปถึงการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลด้วย คณิตศาสตร์นับว่าเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาค้นคว้าเพื่อสร้างองค์ความรู้ในศาสตร์อื่น ๆ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ ดังนั้นในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นที่จะต้องรู้และเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์เพื่อประโยชน์ในการเลือกวิธีที่จะศึกษาให้เหมาะสมและสอดคล้องกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ต่อไป

นักคณิตศาสตร์ได้สรุปประเด็นธรรมชาติของคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ๆ ไว้ดังนี้

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด

ในวิชาคณิตศาสตร์มีการสร้างความคิดต่าง ๆ ขึ้นซึ่งความคิดเหล่านี้ได้มาจากการสรุปความคิดเห็นที่เหมือน ๆ กัน ซึ่งอาจจะได้จากประสบการณ์หรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นเรียกว่า **ความคิดรวบยอด** เช่น ความคิดรวบยอดเรื่องการเท่ากันของจำนวน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส การเท่ากันทุกประการ เป็นต้น ซึ่งในแต่ละเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์เมื่อผู้เรียนได้ศึกษาแล้วจะต้องเกิดความคิดรวบยอดขึ้นในเนื้อหานั้น ๆ จึงจะเกิดประโยชน์

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่แสดงความเป็นเหตุเป็นผล

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีการแสดงแนวคิดอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นตอน การสรุปในแต่ละขั้นตอนจะต้องมีการอ้างอิงเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล ทุกขั้นตอนในแต่ละเนื้อหาจะเป็นเหตุเป็นผลต่อกัน มนุษย์จึงสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าองค์ความรู้ใหม่ ๆ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ ได้

คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นสากล

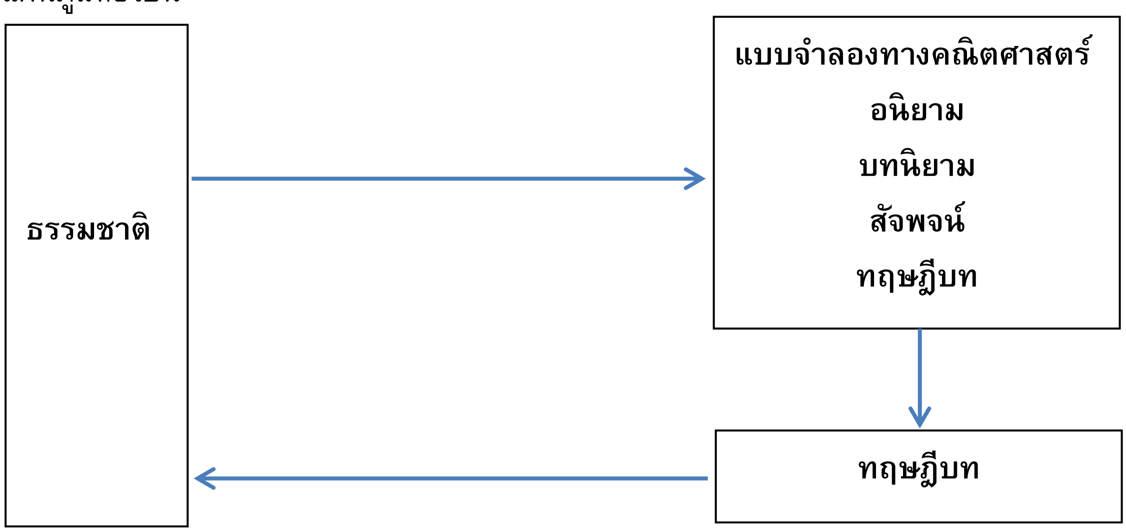
ในวิชาคณิตศาสตร์จะมีการกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นใช้เพื่อสื่อความหมาย ซึ่งทำให้สามารถเขียนข้อความทางคณิตศาสตร์ได้รัดกุม ชัดเจน สื่อความหมายได้ถูกต้อง เกิดความเข้าใจตรงกัน จึงนับได้ว่าคณิตศาสตร์มีภาษาเฉพาะของตัวเอง เป็นภาษาที่ทุกคนที่เรียนคณิตศาสตร์เข้าใจตรงกัน เช่น $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ เป็นต้น

คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์นั้น นักคณิตศาสตร์นอกจากจะเป็นนักคิดแล้วจำเป็นต้องเป็นผู้มีจิตนาการช่างสังเกตมีความละเอียดรอบคอบรู้จักเลือก อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท มาใช้ได้อย่างถูกต้อง ตามลำดับก่อนหลังพร้อมทั้งการให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล รวมถึงการถ่ายทอดสิ่งที่พิสูจน์ได้แล้วออกมาอย่างมีระบบระเบียบ เป็นขั้นเป็นตอนอย่างชัดเจน พอจะสรุปได้ว่าความงามของคณิตศาสตร์อยู่ที่ความมีระเบียบ ความกลมกลืนของแนวคิด ตลอดจนความละเอียดถี่ถ้วนและรอบคอบ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์นั้นมีกำเนิดมาจากธรรมชาติ โดยมนุษย์ได้เฝ้าสังเกตความเป็นไปของธรรมชาติ ซึ่งอาจจะเป็นทางชีววิทยา ฟิสิกส์ จิตวิทยา เศรษฐศาสตร์ ฯลฯ โดยพิจารณาปัญหาต่าง ๆ ของเนื้อหาเหล่านั้นแล้วสรุปในรูปนามธรรม สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเนื้อหานั้น ๆ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย คำอนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท จากนั้นจึงใช้ตรรกศาสตร์สรุปออกมาเป็นกฎหรือทฤษฎีบทใหม่ แล้วนำกฎหรือทฤษฎีบทเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในธรรมชาติต่อไป ด้วยวิธีการดังกล่าวทำให้มนุษย์เข้าใจความเป็นไปของธรรมชาติได้ดียิ่งขึ้นและในขณะที่นำกฎหรือทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติ อาจจะได้ข้อมูลใหม่ก่อให้เกิดการปรับปรุงแก้ไขแบบจำลอง จนกระทั่งอาจจะทำให้ได้กฎหรือทฤษฎีบทที่ดีกว่าเดิม แล้วนำไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติอีกครั้งหนึ่ง ดังแผนภูมิต่อไปนี้



ระบบคณิตศาสตร์

ระบบคณิตศาสตร์มีองค์ประกอบที่สำคัญ 2 ส่วน คือ โครงสร้างของคณิตศาสตร์ และกระบวนการให้เหตุผล

โครงสร้างของคณิตศาสตร์

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ส่วน ดังนี้

พจน์อนิยาม

พจน์อนิยาม (undefined term) คือ คำที่ไม่สามารถให้คำจำกัดความได้ แต่สามารถเข้าใจความหมายได้ โดยอาศัยการรับรู้จากประสบการณ์ ความคุ้นเคยกับสมบัติของสิ่งเหล่านั้น เช่นพจน์อนิยามในเรขาคณิตแบบยุคลิด จุด เส้น มุม ระนาบ เป็นต้น

บทนิยาม

บทนิยาม (definition) คือ การให้คำจำกัดความของคำที่จะใช้ โดยอาศัยพจน์อนิยามหรือบทนิยามที่กำหนดไว้ก่อนหน้านั้น เช่นบทนิยามในเรขาคณิตแบบยุคลิด

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน

สัจพจน์

สัจพจน์ (postulate) คือ ข้อความที่ยอมรับหรือตกลงว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ เช่นสัจพจน์ในเรขาคณิตแบบยุคลิด

เส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

ลากเส้นตรงให้ผ่านจุดสองจุดที่แตกต่างกันได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท (theorem) คือ ข้อความที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง ซึ่งในการพิสูจน์อาจใช้คำอนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทอื่น ๆ ที่ได้พิสูจน์มาแล้ว เช่นทฤษฎีบทในเรขาคณิตแบบยุคลิด

มุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา

เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

กระบวนการให้เหตุผล

กระบวนการให้เหตุผล (reasoning) เป็นเครื่องมือที่มนุษย์ใช้แสวงหาความรู้ใหม่ ๆ โดยการนำเอาความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างในระบบ ซึ่งเรียกว่า **เหตุ**หรือ**ข้อตั้ง (premises)** มาวิเคราะห์แจกแจงแสดงความสัมพันธ์ เพื่อให้เกิดความจริงอันใหม่ขึ้น ซึ่งเรียกว่า **ผล** หรือ **ผลสรุป** หรือ **ข้อยุติ (conclusion)**

กระบวนการให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะดังนี้

การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (inductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือสรุปผลการค้นหาความจริง โดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองหลาย ๆ ตัวอย่าง จากกรณีย่อย ๆ แล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป ซึ่งผลสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนี้ไม่ได้ถูกบังคับจากเหตุที่กำหนดให้ เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่กำหนดให้หรือนำมาอ้างอิงเป็นอิสระต่อกัน

เช่น จงหาพจน์ที่ n ของ 1, 3, 5, 7, 9, …

พิจารณาแต่ละพจน์ของลำดับต่อไปนี้

พจน์ที่ 1 คือ 1

พจน์ที่ 2 คือ 3 เขียนได้เป็น 1 + 2

พจน์ที่ 3 คือ 5 เขียนได้เป็น 1 + 2 + 2

พจน์ที่ 4 คือ 7 เขียนได้เป็น 1 + 2 + 2 + 2

พจน์ที่ 5 คือ 9 เขียนได้เป็น 1 + 2 + 2 + 2 + 2

จากการสังเกตจะเห็นว่า

จำนวนของ 2 ที่บวกกับ 1 น้อยกว่าจำนวนที่แสดงลำดับที่ของพจน์อยู่ 1

ดังนั้นพจน์ที่ 100 คือ 1 บวกด้วย 2 อีก 99 ตัว

นั่นคือ พจน์ที่ 100 คือ $1 + (99 \times 2) = 199$

ดังนั้น พจน์ที่ n หรือรูปทั่วไปของลำดับ จึงหาได้จาก $1 + (n - 1)2 = 2n - 1$

ดังนั้นลำดับ 1, 3, 5, 7, 9, … จึงเขียนเป็น 1, 3, 5, 7, 9, …, $2n - 1$,…

โดยทั่ว ๆ ไป การให้เหตุผลแบบอุปนัย นิยมใช้ในการศึกษาค้นคว้าสมบัติต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ เช่น ข้อสรุปที่ว่า “สารสกัดที่ได้จากสะเดาสามารถใช้เป็นยากำจัดศัตรูพืชได้” เป็นข้อสรุปที่ได้จากการทดลองซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง แล้วได้ผลการทดลองตรงกัน หรือในทางคณิตศาสตร์จะใช้ในเรื่องการสร้างสัจพจน์ เช่นในเรขาคณิตแบบยุคลิด เมื่อทดลองลากเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกัน จะพบว่า เส้นตรงสองเส้นจะตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจะทดลองลากกี่ครั้งก็ตาม จึงสรุปได้ว่า เส้นตรงสองเส้นตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น

การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือ ข้อความจริงใหม่ ซึ่งเรียกว่า **ผลสรุป** ที่เป็นผลมาจากการนำข้อความที่กำหนดให้ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริง ซึ่งเรียกว่า **เหตุ** ถ้าเหตุที่กำหนดให้บังคับให้เกิดผลสรุป แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าว **สมเหตุสมผล (valid)** แต่ถ้าเหตุที่กำหนดให้ไม่สามารถจะบังคับให้เกิดผลสรุปได้ แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าว **ไม่สมเหตุสมผล (invalid)**

เช่น 1. พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1. หมูเป็นสัตว์น้ำ

2. สัตว์น้ำทุกชนิดออกลูกเป็นตัว

ผลสรุป หมูออกลูกเป็นตัว

การให้เหตุผลดังกล่าวเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่นำมาอ้างอิงบังคับให้เกิดผลสรุป

2. พิจารณาให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1. มนุษย์ทุกคนมีสองขา

2. ผู้หญิงทุกคนมีสองขา

ผลสรุป ผู้หญิงทุกคนเป็นมนุษย์

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ผลสรุปเป็นความจริง แต่เป็นการให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล เพราะเหตุที่นำมาอ้างไม่สามารถบังคับให้เกิดผลสรุปดังกล่าวได้ เหตุแต่ละเหตุมีความเป็นอิสระ ไม่สัมพันธ์กันแต่ประการใด

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด มีลักษณะเป็นนามธรรม มีการกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นใช้ซึ่งมีลักษณะเป็นภาษาสากล มีความเป็นศิลปะในตัวเอง และมีโครงสร้างที่ชัดเจนซึ่งประกอบด้วย คำอนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ซึ่งมนุษย์ได้นำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวัน ตลอดถึงการนำไปใช้ในการประกอบอาชีพต่างๆ

ระบบคณิตศาสตร์ประกอบด้วย โครงสร้างของคณิตศาสตร์ และกระบวนการให้เหตุผล ซึ่งเป็นกระบวนการให้เหตุผลเชิงอุปนัย และนิรนัย

1.1. ประพจน์และตัวเชื่อม

ตรรกศาสตร์ เป็นวิชาที่ว่าด้วยกฎเกณฑ์และเหตุผล การได้มาของผลภายใต้กฎเกณฑ์ที่กำหนดถือเป็นสาระสำคัญ ข้อความหรือการให้เหตุผลในชีวิตประจำวันสามารถสร้างเป็นรูปแบบที่ชัดเจนจนใช้ประโยชน์ในการสรุปความ ความสมเหตุสมผลเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวาง

ตรรกศาสตร์เป็นแม่บทของคณิตศาสตร์แขนงต่าง ๆ และการประยุกต์

ประพจน์ (statement) คือประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธ ที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ ดังนั้นประพจน์จะมีค่าความจริงเพียงค่าเดียว คือ **จริง** (จะเขียนแทนด้วย T) หรือ **เท็จ** (จะเขียนแทนด้วย F)

เช่น
1. งานพืชสวนโลกจัดที่จังหวัดเชียงราย (F)
2. สนามบินสุวรรณภูมิเปิดใช้ในเดือนกันยายน 2549 (T)
3. ประเทศไทยเฉลิมฉลอง 60 ปีครองราช 12 มิถุนายน 2549 (T)
4. $\sqrt{9} = 3$ (T)

ประโยคบอกเล่าที่กล่าวข้างต้นเป็นประพจน์

ประโยคที่มีค่าความจริงไม่แน่นอน หรือไม่อาจระบุได้ว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จได้ ไม่เป็นประพจน์

1. คำอุทาน เช่น โธ่เอ๋ยเวรกรรม อุ้ยตาย คุณพระช่วย
2. คำสั่ง เช่น อย่าส่งเสียงดัง จงแสดงวิธีทำ เดินหน้า 2 ก้าว
3. คำขอร้อง เช่น ช่วยด้วย โปรดฟังทางนี้ เห็นใจผมด้วย
4. คำถาม เช่น ทานข้าวแล้วหรือยัง เสื้อตัวนี้ราคาเท่าไร

ประพจน์สามารถใช้สัญลักษณ์แทนได้ เพื่อเข้าใจง่าย และง่ายต่อการเขียน หรือสะดวกต่อการใช้ นิยมใช้อักษรในภาษาอังกฤษแทนประพจน์

เช่น p แทน 2+7 = 9 จะได้ว่า p เป็นประพจน์และมีค่าความจริงเป็น T

q แทน 5+9 = 12 จะได้ว่า q เป็นประพจน์และมีค่าความจริงเป็น F

r แทน จังหวัดสุโขทัยเป็นเมืองหลวงเก่า ได้ว่า r เป็นประพจน์และมีค่าความจริงเป็น T

การเชื่อมประพจน์ ข้อความที่เราใช้ในชีวิตประจำวัน หรือใช้ในวิชาคณิตศาสตร์จะมีประโยคบางประโยคซึ่งเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมเมื่อประโยคนั้นๆถูกเชื่อมด้วย **ตัวเชื่อม (connective)** ซึ่งเป็นคำที่ช่วยในการสร้างประโยคใหม่ ๆ ให้มีความหมายกว้างขวางขึ้นกว่าเดิม

เช่น ถ้าเรามีประโยค 2 ประโยคคือ

p แทน วันนี้อากาศร้อน และ q แทน วันนี้ฝนตก

เราสามารถสร้างประโยคใหม่ด้วยการเชื่อมประโยคเข้าด้วยกันได้ดังนี้

1. วันนี้อากาศร้อน และวันนี้ฝนตก
2. วันนี้อากาศร้อนหรือวันนี้ฝนตก
3. ถ้าวันนี้อากาศร้อนแล้ววันนี้ฝนตก
4. วันนี้อากาศร้อนก็ต่อเมื่อวันนี้ฝนตก

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ"

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ จะเรียกประพจน์ "p และ q " ว่า **ประพจน์ร่วม (conjunction)** ของ p กับ q เขียนแทนด้วย "$p \wedge q$"

เนื่องจากประพจน์ $p \wedge q$ เกิดจากประพจน์ p เชื่อมกับประพจน์ q ซึ่งแต่ละประพจน์อาจจะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ ดังนั้นค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge q$ จะมีกรณีต่าง ๆ ที่อาจเป็นไปได้ 4 กรณี

ค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge q$ เขียนแทนด้วยตาราง ดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T ***
T	F	F
F	T	F
F	F	F

เช่น $2+2 = 4$ และ $2 \times 2 = 4$ (T)

$2 \times 2 = 2$ และ $2+2 = 4$ (F)

$2 \times 0 = 0$ และ ศูนย์เป็นจำนวนเฉพาะ (F)

*** ค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นจริงได้กรณีเดียว คือ ถ้า p เป็นจริง และ q เป็นจริง

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "หรือ"

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ จะเรียกประพจน์ "p หรือ q" ว่า **ประพจน์เลือก (disjunction)** ของ p กับ q เขียนแทนด้วย "$p \vee q$"

ค่าความจริงของประพจน์ $p \vee q$ เขียนแทนด้วยตาราง ดังนี้

P	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F ***

เช่น 2 เป็นจำนวนคู่ หรือ 0 เป็นจำนวนคู่ (T)

2 เป็นจำนวนคู่ หรือ 0 เป็นจำนวนคี่ (T)

0 เป็นจำนวนเต็มบวก หรือ 0 เป็นจำนวนเต็มคู่ (T)

0 เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ 0 เป็นจำนวนเต็มบวก (F)

*** ค่าความจริงของประพจน์ p∨q มีค่าความจริงเป็นเท็จได้กรณีเดียว
คือ ถ้า p เป็นเท็จ และ q เป็นเท็จ

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า.......แล้ว”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ จะเรียกประพจน์ “ ถ้า p แล้ว q ” ว่า **ประพจน์มีเงื่อนไข (conditional)** ของ p กับ q เขียนแทนด้วย “p⟶q”

ค่าความจริงของประพจน์ p⟶q เขียนแทนด้วยตาราง ดังนี้

P	q	p⟶q
T	T	T
T	F	F ***
F	T	T
F	F	T

เช่น ถ้า 2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว 4 เป็นจำนวนคู่ (T)
ถ้า 2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว 3 เป็นจำนวนคู่ (F)
ถ้า 3 เป็นจำนวนคู่แล้ว 2 เป็นจำนวนคู่ (T)
ถ้า 3 เป็นจำนวนคู่แล้ว 2 เป็นจำนวนคี่ (T)

*** ค่าความจริงของประพจน์ p⟶q มีค่าความจริงเป็นเท็จได้กรณีเดียว
คือ ถ้า p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ ....ก็ต่อเมื่อ.......”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ จะเรียกประพจน์ “p ก็ต่อเมื่อ q ” ว่า **ประพจน์แบบเงื่อนไขสองทาง (biconditional)** ของ p กับ q เขียนแทนด้วย “p⟷q”

ค่าความจริงของประพจน์ p⟷q เขียนแทนด้วยตาราง ดังนี้

P	q	p⟷q
T	T	T ***
T	F	F
F	T	F
F	F	T ***

เช่น 4 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 4 หารด้วย 2 ลงตัว (T)
3 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 4 หารด้วย 2 ลงตัว (F)
3 เป็นจำนวน ก็ต่อเมื่อ 3 หารด้วย 2 ลงตัว (F)

3 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 3 หารด้วย 2 ลงตัว (T)

*** ค่าความจริงของประพจน์ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริงเมื่อ ประพจน์ p และ ประพจน์ q มีค่าความจริงเหมือนกัน

นิเสธของประพจน์

ให้ p เป็นประพจน์ **นิเสธ (negation หรือ denial)** ของประพจน์ p คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์ p เขียนแทนด้วย $\sim p$

ค่าความจริงของ $\sim p$ เขียนแทนด้วยตารางดังนี้

p	$\sim p$
T	F
F	T

เช่น

ให้ p แทนประพจน์ วันนี้อากาศร้อน (T)

$\sim p$ แทนประพจน์ วันนี้อากาศไม่ร้อน (F)

ค่าความจริงของประพจน์

เนื่องจากค่าความจริงแต่ละประพจน์เป็นไปได้สองกรณี คือเป็นจริงหรือเป็นเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้นในการหาค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากการใช้ตัวเชื่อมกับประพจน์ย่อย p_1 , p_2 , …, p_n จะต้องพิจารณาทั้งหมด 2^n กรณี

ตัวอย่าง 1.1. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow (p \vee q)$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่าประพจน์ $p \rightarrow (p \vee q)$ เกิดจากประพจน์ p เชื่อมกับประพจน์ q ซึ่งแต่ละประพจน์อาจจะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow (p \vee q)$ จะมีกรณีต่าง ๆ ที่อาจเป็นไปได้ 4 กรณี ดังนี้

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ตัวอย่าง 1.2. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p\vee q)\rightarrow r$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่าประพจน์ $(p\vee q)\rightarrow r$ เกิดจากประพจน์ p , q และ r ซึ่งแต่ละประพจน์อาจมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ซึ่งเป็นไปได้ 2 กรณี เมื่อสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p\vee q)\rightarrow r$ จะมีกรณีต่าง ๆ ซึ่งอาจเป็นไปได้ $2^3 = 8$ กรณี ดังนี้

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

ให้ P และ Q เป็นประพจน์ จะกล่าวว่า P และ Q **สมมูลกัน (equivalent)** ก็ต่อเมื่อทั้งสองประพจน์มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณี เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P\equiv Q$

ให้ P เป็นประพจน์ จะกล่าวว่า P เป็น **สัจนิรันดร์ (tautology)** ถ้า P มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี และจะกล่าวว่า P เป็น **ข้อขัดแย้ง (contradiction)** ถ้า P มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี

ดังนั้น นิเสธของข้อขัดแย้งจะเป็นสัจนิรันดร์ และในทางกลับกันนิเสธของสัจนิรันดร์จะเป็นข้อขัดแย้ง

ทฤษฎีบท 1.3. สำหรับประพจน์ p,q และ r จะได้ว่า

1. $p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$
2. $\sim(p\wedge q) \equiv(\sim p)\vee(\sim q)$
3. $\sim(p\vee q) \equiv(\sim p) \wedge (\sim q)$
4. $p\rightarrow q \equiv(\sim p)\vee q$
5. $\sim(p\rightarrow q)\equiv p\wedge(\sim q)$
6. $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
7. $p\vee (q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

ประโยคเปิด (open sentence)

คือ ข้อความที่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ ที่มีตัวแปรและเมื่อแทนค่าของตัวแปรนั้น จะได้ค่าความจริงแน่นอน หรือเป็นประพจน์

เรียกหมู่ หรือเซตของสิ่งของที่นำมาแทนในประโยคเปิดแล้วมีค่าความจริงแน่นอน หรือเป็นประพจน์ ว่า **เอกภพสัมพัทธ์ (universal)** เขียนแทนด้วย $\mathcal{U}$

เรานิยมใช้ P(x), P(x,y), Q(x,y) แทนประโยคเปิดที่มีตัวแปรระบุในวงเล็บ

เช่น ข้อความต่อไปนี้เป็นประโยคเปิด

เธอเป็นนางสาวไทย

$x+3 \geq 5$ $\quad$ $3x + 2 = 5$

เขาเป็นนายกรัฐมนตรี

ประโยคเปิดเหล่านี้ จะเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงแน่นอนเมื่อแทนค่าตัวแปรแบบเฉพาะเจาะจงลงไป

1.2. **ตัวบ่งปริมาณ(Quantifier)**

ตัวบ่งปริมาณ (quantifier) คือ คำบอกกล่าวกำหนดขีดจำกัดของปริมาณ หรือขอบเขตของตัวแปรในประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณมี 2 แบบ คือ

ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว (universal quantifier)

บอกในรูปคำกล่าว เช่น สำหรับทุกๆค่าของ x ....

สำหรับแต่ละค่าของ x..............

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\forall x$ อ่านว่า for all x

เช่น ให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็ม

จะได้ว่า $\forall x[x > 3]$ ความหมายคือ สมาชิกทุกตัวในเซตของจำนวนเต็มมีค่ามากกว่า 3

ทำให้ $\forall x[x > 3]$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง (existential quantifier)

บอกในรูปคำกล่าว เช่น มีบางตัวของ x ที่..................

มีสมาชิก x บางตัวที่......................

มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวซึ่ง.......................

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\exists x$ อ่านว่า for some x

เช่น ให้เอกภพสัมพัทธ์ คือเซตของจำนวนเต็ม

จะได้ว่า $\exists x[x>3]$ ความหมายคือ มีสมาชิก x บางตัวในเซตของจำนวนเต็มมีค่ามากกว่า 3

ดังนั้น $\exists x[x>3]$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

เมื่อมีการกำหนดเอกภพสัมพัทธ์มาให้ จะเรียกข้อความที่ประกอบด้วยประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณว่า **ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ**

บทนิยาม 1.4. ให้ P(x) เป็นประโยคเปิดที่ x เป็นตัวแปร กำหนด

ประโยค $\forall$x[P(x)] อ่านว่า สำหรับทุก x ซึ่ง P(x)

ประโยค $\exists$x[P(x)] อ่านว่า มี x ซึ่ง P(x)

ดังนั้นประโยค $\forall$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าทุก a ในเอกภพสัมพัทธ์ เมื่อแทนใน P(x) แล้ว P(a) มีค่าความจริงเป็นจริง

และประโยค $\exists$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นจริงถ้ามี a ในเอกภพสัมพัทธ์เมื่อแทนใน P(x) แล้ว P(a) มีค่าความจริงเป็นจริง

สรุปค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เมื่อ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์

ประพจน์	เป็นจริงก็ต่อเมื่อ	เป็นเท็จก็ต่อเมื่อ
$\forall$x[P(x)]	P(a) เป็นจริง สำหรับทุก a ใน $\mathcal{U}$	มี a ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งทำให้ P(a) เป็นเท็จ
$\exists$x[P(x)]	มี a ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งทำให้ P(a) เป็นจริง	P(a) เป็นเท็จสำหรับทุก a ใน $\mathcal{U}$
$\forall$x[~P(x)]	P(a) เป็นเท็จสำหรับทุก a ใน $\mathcal{U}$	มี a ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งทำให้ P(a) เป็นเท็จ
$\exists$x[~P(x)]	มี a ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งทำให้ P(a) เป็นเท็จ	P(a) เป็นจริง สำหรับทุก a ใน $\mathcal{U}$

ข้อสังเกต

1. ~$\exists$x[P(x)] $\equiv$ $\forall$x[~P(x)]
2. ~$\forall$x[P(x)] $\equiv$$\exists$x[~P(x)]

ตัวอย่าง 1.5. ให้เอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

1. $\forall$x[x$\geq$10] เป็นเท็จ เนื่องจากมีจำนวนจริง x มากมายที่ซึ่ง x$\geq$10 ไม่เป็นจริง เช่น 5<10
2. $\forall$x[x+3$\geq$x+1] เป็นจริง เนื่องจาก 3$\geq$1 ดังนั้น x+3$\geq$x+1 สำหรับทุกจำนวนจริง x
3. $\exists$x[x$\geq$-2] เป็นจริง เนื่องจากมีจำนวนจริง a=0 ซึ่ง 0$\geq$-2
4. $\exists$x[x^2 <-2] เป็นเท็จ เนื่องจาก x^2 $\geq$0 > -2 สำหรับทุกจำนวนจริง x

ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณอาจมีตัวเชื่อมอยู่ ในการแปลงประพจน์ที่เป็นข้อความเป็นสัญลักษณ์ต้องระมัดระวังในการใช้ตัวเชื่อมเพื่อให้ได้ความหมายที่ตรงกัน

พิจารณาประโยคต่อไปนี้ จำนวนเต็มคู่ทุกจำนวนหารด้วยสองลงตัว

จะเห็นว่าในประโยคดังกล่าวมีตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัวอยู่ และถ้าเราให้ P(x) แทนประโยค x เป็นจำนวนเต็มคู่ และให้ Q(x) แทนประโยค x หารด้วยสองลงตัว เราจะเขียนรูปสัญลักษณ์ของประโยคข้างต้นได้เป็น $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

** ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว จะใช้ตัวเชื่อมหลักเป็น $\rightarrow$

พิจารณาประโยค มีจำนวนเต็มคู่บางตัวหารด้วยสี่ลงตัว

จะเห็นว่าในประโยคนี้มีตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริงอยู่ และถ้าเราให้ P(x) แทนประโยค x เป็นจำนวนเต็มคู่ และให้ Q(x) แทนประโยค x หารด้วยสี่ลงตัว เราจะเขียนรูปสัญลักษณ์ของประโยคข้างต้นได้เป็น $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$

** ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง จะใช้ตัวเชื่อมหลักเป็น $\wedge$

บทนิยาม 1.6. ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ ให้ P(x) เป็นประโยคเปิด

ประพจน์ในรูปสัญลักษณ์ $\exists! x[P(x)]$ อ่านว่า มี x เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง P(x)

เรียกสัญลักษณ์ $\exists!$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริงได้ตัวเดียว (unique existence quantifier)**

ดังนั้น ประพจน์ $\exists! x[P(x)]$ เป็นจริง เมื่อมี a เพียงตัวเดียวเท่านั้นใน $\mathcal{U}$ ซึ่งทำให้ P(a) เป็นจริง

จะเห็นว่า $\exists! x[P(x)]$ เป็นกรณีเฉพาะของ $\exists x[P(x)]$ เนื่องจาก $\exists x[P(x)]$ เป็นจริงเมื่อมี a อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ P(a) เป็นจริง ในขณะที่ $\exists! x[P(x)]$ เป็นจริงเมื่อมี a เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่งทำให้ P(a) เป็นจริง ดังนั้นเราจึงได้ว่า $\exists! x[P(x)] \equiv \exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x=y)]$

1.3. วิธีการพิสูจน์

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ถือว่าเป็นหัวใจหลักสำคัญในการเรียนรู้วิชาคณิตสาตร์ เป็นการฝึกทักษะในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ โดยนำกฏเกณฑ์ในวิชาตรรกศาสตร์มาประยุกต์ใช้ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

เป้าหมายของการพิสูจน์ ก็คือ ข้อยืนยันที่ทำให้แน่ใจว่า ผลสรุปที่กำหนดมาจากเหตุหรือสมมติฐาน เป็นจริง

การพิสูจน์ในทางคณิตศาสตร์ เหตุที่นำมาอ้างอิงเพื่อให้ได้ผลสรุป นั้นมาจากทฤษฎีบทที่เคยทราบมาก่อน หรือบทนิยาม หรือสัจพจน์ เป็นต้น แต่มักจะมีปัญหาว่าเหตุที่นำมาอ้างอิงดังกล่าวนั้นมีมากมาย เป็นการยากที่จะเลือกใช้ ดังนั้นผู้เรียนควรจะศึกษาการพิสูจน์หลาย ๆ แบบ เพื่อจะช่วยเพิ่มทักษะในการพิสูจน์ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงวิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ ดังนี้

1.3.1 การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$

การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$ คือการแสดงว่า $p \rightarrow q$ เป็นการอ้างเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล นั่นคือจะแสดงว่า ข้อตั้ง หรือ เหตุ p มีผลบังคับให้เกิด ข้อสรุป หรือ ผล q
ในที่นี้เราจะกล่าวถึงวิธีการพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$ 2 วิธีดังนี้

วิธีที่ 1 การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยวิธีพิสูจน์ตรง (directed proof)

เนื่องจาก $p \rightarrow q$ เป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวคือ กรณีที่ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง เราต้องแสดงว่าไม่เกิดกรณีที่ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ นั่นคือเราต้องแสดงว่า ถ้าเราให้ p เป็นจริงแล้ว q ต้องเป็นจริง

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ p
⋮
เพราะฉะนั้น q
ดังนั้น $p \rightarrow q$

บทนิยาม 1.7. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม จะกล่าวว่า

1. n เป็นจำนวนคู่ (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง n=2k
2. n เป็นจำนวนคี่ (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง n=2k+1
3. m หาร n ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง n=km เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ m|n

ตัวอย่าง 1.8. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า
ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a+4 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ กำหนด a เป็นจำนวนเต็ม และ a เป็นจำนวนคู่
จะได้ว่า a=2k สำหรับบางจำนวนเต็ม k
ดังนั้น a+4 = 2k+4 = 2(k+2)
เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น k+2 เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ a+4 เป็นจำนวนคู่
ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a+4 เป็นจำนวนคู่ ❑

ตัวอย่าง 1.9. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า
ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 1.10. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

พิสูจน์ กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

ให้ a|b และ b|c จะได้ว่า b = am และ c = bn สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ n

ดังนั้น c = (am)n = a(mn)

เนื่องจาก m และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า mn เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ a|c

ดังนั้น ถ้า a|b และ b|c แล้ว a|c ❑

วิธีที่ 2 การพิสูจน์ $p \to q$ โดยใช้การแย้งสลับที่ (contrapositive)

เนื่องจาก $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ ดังนั้น ในการพิสูจน์ว่า $p \to q$ เป็นจริง เราจะพิสูจน์ $\sim q \to \sim p$ เป็นจริงแทน โดยใช้วิธีพิสูจน์ตรง การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\sim q$

$\vdots$

เพราะฉะนั้น $\sim p$

ดังนั้น $\sim q \to \sim p$

นั่นคือ $p \to q$

ตัวอย่าง 1.11. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ จะพิสูจน์ข้อความ " ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่ " โดยใช้การแย้งสลับที่ นั่นคือจะพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

กำหนด a เป็นจำนวนเต็ม และ a เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น a = 2n สำหรับบางจำนวนเต็ม n จะได้ว่า $a^2 = (2n)^2 = 4n^2$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2n^2$ เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ a^2 เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่ ❑

ตัวอย่าง 1.12. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $4|a^2$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 1.13. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

ถ้า ab เป็นจำนวนคู่ แล้ว a หรือ b เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ จะพิสูจน์ข้อความ "ถ้า ab เป็นจำนวนคู่ แล้ว a หรือ b เป็นจำนวนคู่"
โดยใช้การแย้งสลับที่ นั่นคือจะพิสูจน์ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว ab เป็นจำนวนคี่
กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ a และ b เป็นจำนวนคี่
จะได้ว่า $a = 2n + 1$ และ $b = 2m + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n และ m
ดังนั้น $ab = (2n + 1)(2m + 1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) +1$
เนื่องจาก n และ m เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $2nm + n + m$ เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น ab เป็นจำนวนเต็มคี่
นั่นคือ ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว ab เป็นจำนวนคี่
สรุปได้ว่า ถ้า ab เป็นจำนวนคู่ แล้ว a หรือ b เป็นจำนวนคู่ ❑

1.3.2. การพิสูจน์ประพจน์ p โดยข้อขัดแย้ง (contradiction)

เนื่องจากประพจน์ $p \equiv \sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่าประพจน์ p เป็นจริง เราจะพิสูจน์ประพจน์ $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$ แทน ซึ่งจะได้ผลสรุปเป็นข้อขัดแย้งกัน

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\sim p$
$\vdots$
เพราะฉะนั้น q
$\vdots$
เพราะฉะนั้น $\sim q$
ดังนั้น $q \wedge \sim q$ เกิดข้อขัดแย้ง
นั่นคือ p

บทนิยาม 1.14. ให้ x เป็นจำนวนจริง

จะเรียก x ว่า **จำนวนตรรกยะ (rational number)** ถ้ามีจำนวนเต็ม m และ $n \neq 0$ ซึ่ง $x=m/n$
และ จะเรียก x ว่า **จำนวนอตรรกยะ(irrational number)** ถ้า x ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 1.15. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ จำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์ สมมติว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ
ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ โดยนิยามของจำนวนตรรกยะ และ $\sqrt{2} > 0$ จะได้ว่า

$\sqrt{2} = x/y$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกที่มี 1 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่หาร x และ y ลงตัว ดังนั้น $2=x^2/y^2$ จะได้ว่า $2y^2=x^2$ ดังนั้น x^2 เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า x เป็นจำนวนคู่
ให้ x=2m โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม
จะได้ว่า $2y^2=(2m)^2$ นั่นคือ $y^2=2m^2$ ดังนั้น y^2 เป็นจำนวนคู่ จะได้ y เป็นจำนวนคู่
นั่นคือ 2 หาร x และ y ลงตัว เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\sqrt{2}$ จำนวนอตรรกยะ ❑

ตัวอย่าง 1.16. จงพิสูจน์ว่า $\log 2$ จำนวนอตรรกยะ
พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.3.3. การพิสูจน์ประพจน์ p⟶q โดยข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์ประพจน์ p⟶q โดยข้อขัดแย้งพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกับหัวข้อที่ผ่านมา โดยเราจะสมมติให้ ~(p⟶q) เป็นจริงแล้วหาข้อขัดแย้ง เนื่องจาก $\sim(p\longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ ดังนั้นขั้นแรกเราจึงสมมุติให้ $p \wedge \sim q$ เป็นจริงแล้วจึงหาข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ p และ ~q
⋮
เพราะฉะนั้น r
⋮
เพราะฉะนั้น ~r
ดังนั้น $r \wedge \sim r$ เกิดข้อขัดแย้ง
นั่นคือ p⟶q

ตัวอย่าง 1.17. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า
ถ้า m^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่
พิสูจน์ กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็ม โดยที่
m^2 เป็นจำนวนคี่ และ m เป็นจำนวนคู่
ดังนั้น m = 2k สำหรับบางจำนวนเต็ม k
ทำให้ $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2k^2$ เป็นจำนวนเต็ม
ทำให้ m^2 เป็นจำนวนคู่ ขัดแย้งกับ m^2 เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น m เป็นจำนวนคี่

นั่นคือ ถ้า m^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่ ❑

ตัวอย่าง 1.18. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $x=\sqrt{2x+3}$ แล้ว $x=3$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.3.4. การพิสูจน์ประพจน์ $p \leftrightarrow q$ (If and only if)

เนื่องจาก $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ ดังนั้น

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ประพจนดังนี้

(i) พิสูจน์ $p \to q$

(ii) พิสูจน์ $q \to p$

ดังนั้น $p \leftrightarrow q$

หมายเหตุ การพิสูจน์ $p \to q$ และ $q \to p$ จะพิสูจน์โดยการพิสูจน์ตรง หรือ โดยการแย้งสลับที่ หรือ โดยข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 1.19. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a+1 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

(i) จะพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a+1 เป็นจำนวนคู่

ให้ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า a = 2m + 1 สำหรับบางจำนวนเต็ม m

ทำให้ a + 1 = (2m + 1) + 1 = 2m + 2 = 2(m+1)

เนื่องจาก m เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น m+1 เป็นจำนวนเต็ม

ทำให้ a + 1 เป็นจำนวนคู่

สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a+1 เป็นจำนวนคู่

(ii) จะพิสูจน์ว่า ถ้า a+1 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

ให้ a+1 เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า a + 1 = 2n สำหรับบางจำนวนเต็ม n

ทำให้ a = 2n – 1 = 2n – 2 + 1 = 2(n-1) + 1

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น n – 1 เป็นจำนวนเต็ม

ทำให้ a เป็นจำนวนคี่

สรุปได้ว่า ถ้า a+1 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a+1 เป็นจำนวนคู่ ❑

ตัวอย่าง 1.20. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

ถ้า m^2 เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ m เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.3.5. การพิสูจน์ประพจน์ $p \vee q \rightarrow r$

เนื่องจาก $p \vee q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ ดังนั้น

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

(i) พิสูจน์ $p \rightarrow r$

(ii) พิสูจน์ $q \rightarrow r$

ดังนั้น $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

นั่นคือ $p \vee q \rightarrow r$

หมายเหตุ การพิสูจน์แบบนี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า การพิสูจน์โดยการแจงกรณี

ทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ประพจน์ $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \rightarrow r$ ได้เช่นกัน

โดยมีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

กรณีที่ 1 พิสูจน์ $p_1 \rightarrow r$

กรณีที่ 2 พิสูจน์ $p_2 \rightarrow r$

$\vdots$

กรณีที่ n พิสูจน์ $p_n \rightarrow r$

ดังนั้น $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \rightarrow r$

ตัวอย่าง 1.21. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า a เป็นจำนวนคู่ หรือจำนวนคี่

ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่ ต้องพิสูจน์ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 พิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 พิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

รายละเอียดการพิสูจน์ของทั้งสองกรณีเป็นดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $a = 2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

ดังนั้น $3a + a^2 = 3(2n) + (2n)^2 = 6n + 4n^2 = 2(3n + 2n^2)$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ $3n + 2n^2$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 ให้ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $a = 2n + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

ดังนั้น $3a + a^2 = 3(2n + 1) + (2n + 1)^2 = (6n + 3) + (4n^2 + 4n + 1)$

$= 4n^2 + 10n + 4 = 2(2n^2 + 5n + 2)$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ $2n^2 + 5n + 2$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่ ❑

ตัวอย่าง 1.22. สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)** ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$

นิยามโดย $|x|=\begin{cases} x & ,x \ge 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$ จงพิสูจน์ว่า $|-x|=|x|$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.3.6. การพิสูจน์ประพจน์ $p\vee q$

เนื่องจาก $p\vee q\equiv\sim p\rightarrow q$ ดังนั้น ในการพิสูจน์ว่า $p\vee q$ เป็นจริง เราจะพิสูจน์ประพจน์ $\sim p\rightarrow q$ เป็นจริงแทน

ดังนั้นการพิสูจน์ประพจน์ $p\vee q$ วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\sim p$

⋮

เพราะฉะนั้น q

ดังนั้น $\sim p\rightarrow q$

นั่นคือ $p\vee q$

ตัวอย่างที่ 1.23. กำหนดให้ **x** เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x^2-4x+3>0$

จงพิสูจน์ว่า $x>3$ หรือ $x<1$

พิสูจน์ กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x^2-4x+3>0$

จะแสดงว่า $x<1$ หรือ $x>3$

นั่นคือเราจะแสดงว่า ถ้า $x\not>3$ แล้ว $x<1$

สมมติว่า $x\not>3$ ดังนั้น $x\leq 3$ จาก $x^2-4x+3>0$ จะได้ว่า $(x - 1)(x - 3) > 0$

ดังนั้น $x > 1$ และ $x > 3$ หรือ $x < 1$ และ $x < 3$

จะได้ว่า $x > 3$ หรือ $x < 1$ เนื่องจาก $x \leq 3$ ดังนั้น $x < 1$

ดังนั้น ถ้า $x \ngtr 3$ แล้ว $x<1$ นั่นคือ $x<1$ หรือ $x>3$ ❑

ตัวอย่าง 1.24. สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $n^3-n<m$ แล้ว n เป็นจำนวนคี่ หรือ $m>6$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.4. การพิสูจน์ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

ทฤษฎีบทส่วนใหญ่ทางคณิตศาสตร์ เป็นประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการพิสูจน์ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ ดังนี้

14.1. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $\exists x[p(x)]$ โดยตรง

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

เลือก a ในเอกภพสัมพัทธ์

⋮

p(a)เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x[p(x)]$

ตัวอย่าง 1.25. จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2=x+x$

พิสูจน์ เลือก x = 2 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม และได้ว่า $x^2 = 2^2 = 4 = 2 + 2 = x + x$

สรุปว่า มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2=x+x$ ❑

ตัวอย่าง 1.26. จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง x ซึ่ง $3x=1$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.4.2. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $\forall x[p(x)]$ โดยตรง

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

ให้ a เป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์

⋮

ดังนั้น p(a) เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x[p(x)]$

ตัวอย่าง 1.27. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4|a^2$ และ a^2 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จะพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4|a^2$ และ a^2 เป็นจำนวนคู่

ให้ a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $a = 2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

ดังนั้น $a^2 = (2n)^2 = 4(n^2) = 2(2n^2)$ เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า n^2 และ $2n^2$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $4|a^2$ และ a^2 เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4|a^2$ และ a^2 เป็นจำนวนคู่ ❑

ตัวอย่าง 1.28. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

จะได้ว่า a^2-a เป็นจำนวนคู่ และ a^2+a+3 เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.4.3. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $\forall x[p(x)]$ โดยข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติว่ามี t เป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ ซึ่ง $\sim p(t)$

$\vdots$

เพราะฉะนั้น $Q \wedge Q$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\forall x[p(x)]$

ตัวอย่าง 1.29. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ สมมติว่า มีจำนวนจริง t ซึ่ง t เป็นจำนวนคี่ และ t^2 เป็นจำนวนคู่

จาก t เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $t = 2n + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

ดังนั้น $t^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $2n^2 + 2n$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น t^2 เป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับที่ t^2 เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นสรุปได้ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่ ❑

ตัวอย่าง 1.30. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.4.4. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $\forall x[p(x)]$ ว่าเป็นเท็จ

การพิสูจน์ $\forall x[p(x)]$ ว่าเป็นเท็จ จะต้องแสดงว่ามี t ที่เป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ซึ่งทำให้ $p(t)$ เป็นเท็จ ดังนั้นจะได้ว่า $\forall x[p(x)]$ เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 1.31. จงพิสูจน์ว่า $\forall x$[ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว $x^2 > x$] เป็นเท็จ

พิสูจน์ ข้อความนี้เป็นเท็จ เพราะมี $x = 1/2$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x^2 = (1/2)^2 = 1/4 < 1/2 = x$ ❑

ตัวอย่าง 1.32. จงพิสูจน์ว่า $\forall x$[ถ้า x เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว x เป็นจำนวนคี่] เป็นเท็จ

พิสูจน์ ข้อความนี้เป็นเท็จ เพราะมี $x = 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง 2 เป็นจำนวนคู่ ❑

1.4.5. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $\exists!x[p(x)]$

การพิสูจน์ ประพจน์ในรูป $\exists!x[p(x)]$ คือการพิสูจน์ว่า มี a เพียงตัวเดียวเท่านั้นในเอกภพสัมพัทธ์ซึ่ง p(a) เป็นจริง

การพิสูจน์วิธีนี้มีเค้าโครงการพิสูจน์ดังนี้

(i) พิสูจน์ว่า $\exists x[p(x)]$ เป็นจริง

(ii) สมมติว่ามี t_1 และ t_2 ในเอกภพสัมพัทธ์ซึ่งทำให้ $p(t_1)$ และ $p(t_2)$ เป็นจริง

$\vdots$

เพราะฉะนั้น $t_1 = t_2$

ดังนั้น $\exists!x[p(x)]$

ตัวอย่าง 1.33. จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ n เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $n^2=9$

พิสูจน์ รูปสัญลักษณ์ของประพจน์นี้คือ $\exists!$(n เป็นจำนวนนับ และ $n^2=9$)

(i) เลือก $n = 3$ จะเห็นว่า 3 เป็นจำนวนนับ และ $n^2 = 3^2 = 9$

(ii) ให้ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนนับ และ $n_1^2 = 9$ และ $n_2^2 = 9$

ดังนั้น $n_1^2 = n_2^2$

เนื่องจาก n_1 และ n_2 เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า $n_1 = n_2$

จาก (i) และ (ii) สรุปได้ว่า มีจำนวนนับ n เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $n^2=9$ ❑

ตัวอย่าง 1.34. ให้ x เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

มีจำนวนเต็ม y เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x-y=10$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.4.6. การพิสูจน์ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณมากกว่าหนึ่งตัว

การพิสูจน์ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณมากกว่าหนึ่งตัวนั้นใช้หลักการเดียวกับการพิสูจน์ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณหนึ่งตัว โดยพิสูจน์ตามลำดับของตัวบ่งปริมาณที่ปรากฏในข้อความนั้น

ตัวอย่าง 1.35. จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ x ถ้า $|x-2|<\delta$ แล้ว $|3x-6|<0.0001$

พิสูจน์ ให้ $\delta = 0.00003$ ดังนั้น $\delta>0$ เป็นจริง และให้ $|x-2|<\delta$

ดังนั้น $|x-2|< 0.00003 = 3(0.00003)/3 = (0.00009)/3 < (0.0001)/3$ ทำให้ $3|x-2|< 0.0001$

เนื่องจาก $3|x-2|= |3x-6|$ ดังนั้น $|3x-6|<0.0001$

สรุปได้ว่า มีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ x ถ้า $|x-2|<\delta$ แล้ว $|3x-6|<0.0001$ ❑

ตัวอย่าง 1.36. จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะมีจำนวนเต็มบวก m ซึ่งทำให้ $2n<m$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.5. หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction)

ให้ n_0 เป็นจำนวนนับใด ๆ

การพิสูจน์วิธีนี้เป็นการพิสูจน์ประโยคเปิด p(n) ว่าเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n\geq n_0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ $1+2+\ldots+n=(n(n+1))/2$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 1$

การที่จะแสดงว่าข้อความดังกล่าวเป็นจริง เราจะต้องนำจำนวนนับ n ทุกจำนวนแทนค่าในสมการ แล้วก็พิจารณาว่าสมการเป็นจริงหรือไม่ ซึ่งเราไม่สามารถทำเช่นนั้นได้เพราะว่าจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 มีจำนวนเป็นอนันต์

นักคณิตศาสตร์จึงได้คิดวิธีพิสูจน์ขึ้นมา เพื่อแสดงว่าข้อความดังกล่าวเป็นจริง ซึ่งเรียกว่า “หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์”

1.5.1. หลักการที่หนึ่งของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The First Principle of Mathematical Induction)

ให้ n_0 เป็นจำนวนนับใด ๆ และให้ p(n) แทนประโยคเปิดที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n

ถ้า 1) $p(n_0)$ เป็นจริง (ขั้นฐาน)

2) ให้ k เป็นจำนวนนับ และ $k\geq n_0$ ถ้า p(k) เป็นจริง แล้ว p(k+1) เป็นจริง (ขั้นอุปนัย)

แล้ว p(n) ว่าเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n ที่มากกว่าหรือเท่ากับ n_0

หมายเหตุ

กรณีที่ n_0=1 หมายถึงการพิสูจน์ว่า p(n) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 1.37. จงพิสูจน์ว่า $1+3+...+(2n-1)=n^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกจำนวน

พิสูจน์ ให้ p(n) แทนข้อความ $1+3+...+(2n-1)=n^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกจำนวน

<u>ขั้นฐาน</u> ถ้า n =1 แล้ว p(1) แทนข้อความ $1=1^2$ เป็นจริง

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $p(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $p(k+1)$ เป็นจริง

จาก $p(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า $1+3+...+(2k-1)=k^2$ พิจารณา

$$1+3+...+(2(k+1)-1)=1+3+...+(2k+1)=1+3+...+(2k-1)+(2k+1)$$
$$=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

ดังนั้น $p(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่หนึ่งของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า

$1+3+...+(2n-1)=n^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกจำนวน ❑

ตัวอย่าง 1.38. จงพิสูจน์ว่า 2+4+...+2n=n(n+1) สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

1.5.2. หลักการที่สองของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Second Principle of Mathematical Induction)

ให้ n_0 เป็นจำนวนนับใด ๆ และให้ p(n) แทนประโยคเปิดที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n

ถ้า 1) $p(n_0)$ เป็นจริง (ขั้นฐาน)

2) ถ้า p(t) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n_0 \leq t \leq k$ แล้ว p(k+1)เป็นจริง

(ถ้า $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …,p(k) เป็นจริง แล้ว p(k+1) เป็นจริง) (ขั้นอุปนัย)

แล้ว p(n) ว่าเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ที่มากกว่าหรือเท่ากับ n_0

หมายเหตุ

กรณีที่ n_0=1 หมายถึงการพิสูจน์ว่า p(n) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 1.39. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ

กำหนดความสัมพันธ์ $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ โดยที่ a_0=1 และ a_1=6

จงพิสูจน์ว่า $a_n = 3^n + n3^n$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

พิสูจน์ ให้ p(n) แทนข้อความ $a_n = 3^n + n3^n$

<u>ขั้นฐาน</u> ถ้า n =2 จะได้ว่า $a_2 = 6a_1 - 9a_0 = 6(6) - 9(1) = 36 - 9 = 27 = 9 + 18 = 3^2 + 2 \times 3^2$

ดังนั้น p(2) เป็นจริง

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ p(k)เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n_0 \le t \le k$ จะแสดงว่า p(k+1) เป็นจริง

พิจารณา

$$a_{k+1}=6a_{(k+1)-1}-9a_{(k+1)-2}=6a_k-9a_{k-1}=6(3^k+k3^k)-9(3^{k-1}+(k-1)3^{k-1})$$
$$=2(3\times3^k+3k3^k)-3^2 3^{k-1}-3^2(k-1)3^{k-1}=2(3^{k+1}+k3^{k+1})-3^{k+1}-(k-1)3^{k+1}$$
$$=3^{k+1}(2+2k-1-k+1)=3^{k+1}(2+k)=3^{k+1}(1+(k+1))=3^{k+1}+(k+1)3^{k+1}$$

ดังนั้น p(k+1) เป็นจริง

โดยหลักการที่สองของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $a_n=3^n+n3^n$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 ❑

ตัวอย่าง 1.40. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า n=1 หรือ n เป็นจำนวนเฉพาะหรือผลคูณของจำนวนเฉพาะ

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์โดยการพิสูจน์ตรง ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว a+b เป็นจำนวนคี่
2. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่ว่า ถ้า $4|a^2$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่
3. จงพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งว่า $\log 2$ จำนวนอตรรกยะ
4. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งว่า ถ้า $x=\sqrt{2x+3}$ แล้ว $x=3$
5. .กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า m^2 เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ m เป็นจำนวนคี่
6. สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ นิยามโดย $|x|=\begin{cases} x & ,x \geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$ จงพิสูจน์โดยการแจงกรณีว่า $|-x|=|x|$
7. สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $n^3-n<m$ แล้ว n เป็นจำนวนคี่ หรือ m>6
8. จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง x ซึ่ง 3x=1
9. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จะได้ว่า a^2-a เป็นจำนวนคู่ และ a^2+a+3 เป็นจำนวนคี่
10. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่
11. จงพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่
12. ให้ x เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็ม y เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ x-y=10
13. จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะมีจำนวนเต็มบวก m ซึ่งทำให้ 2n<m
14. จงพิสูจน์ว่า 2+4+...+2n=n(n+1) สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$
15. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า n=1 หรือ n เป็นจำนวนเฉพาะ หรือผลคูณของจำนวนเฉพาะ

เอกสารอ้างอิงบทที่ 1

1. รุ่งนภา ภักดีสู่สุข, แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
2. Krantz, S.G., The Elements of Advanced Mathematics, CRC Press, Inc.,1995.
3. Smith, D., Eggen, M., Andre, R. St., A Transition to Advanced Mathematics, 4th edition, Brooks / Cole Publishing Company, 1997.
4. Stewart ,T. , The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.
5. Sundstrom, T., Mathematical Reasoning Writing and Proof, Prentice Hall, Inc., 2001.
6. Wohlgemuth, Introduction to Proof in Abstract Mathematics, Saunders College Publishing,1990.

การจัดการเรียนการสอน

บทที่ 2 เรื่อง เซต

กระบวนวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
(Fundamental Concepts of Mathematics)

ชื่อผู้สอน อาจารย์ ดร. สายัญ ปันมา

เวลาที่ใช้ 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถพิสูจน์กฎพื้นฐานเกี่ยวกับเซตได้
2. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ข้อความที่เป็นการวางนัยทั่วไปของยูเนียนและอินเอตร์เซกชันได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. แบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัด
3. ตัวแทนแต่ละกลุ่มนำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
2. กระดาษ และปากกา
3. เครื่องฉายทึบแสง

บทที่ 2

เซต (Sets)

ในบทนี้เราจะให้นิยามเซตและเซตย่อย และศึกษาการดำเนินการบนเซตและพิสูจน์กฎพื้นฐานต่าง ๆ และพิสูจน์การวางนัยทั่วไปของยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน ซึ่งจะเป็นความรู้ในการพิสูจน์ในบทต่อไป

2.1. เซตและเซตย่อย (Sets and Subsets)

เซต เป็น กลุ่มของสิ่งของ(รูปหรือนาม) ที่ต่างกันซึ่งจะต้องมีการกำหนดอย่างชัดเจน เพื่อให้ตัดสินได้ว่าสิ่งใดสิ่งหนึ่งเป็นสมาชิกของเซตที่กำลังพิจารณาหรือไม่

สัญลักษณ์ $a \in S$ อ่านว่า a เป็นสมาชิกของเซต S

$a \notin S$ อ่านว่า a ไม่เป็นสมาชิกของเซต S

ปกติจะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่แทนเซต และอักษรตัวเล็กแทนสมาชิกของเซต

** **ข้อควรระวัง** ในการนิยามเซตอาจเกิดปัญหาเป็นข้อขัดแย้งในเชิงตรรกศาสตร์ขึ้น ถ้าเรากำหนดประโยคเปิด P(x) ในเซต $\{x \mid P(x)\}$ ไม่ระมัดระวัง

เช่น การพบปฏิทรรศน์รัสเซลล์ (Russell’s Paradox) โดย เบอร์แทรนด์ รัสเซลล์ (Bertrand Russell) ได้แสดงให้เห็นว่า ไม่จริงที่ว่าสำหรับทุกประโยคเปิด P(x) จะมีเซต $\{x \mid P(x)\}$ เกิดขึ้นเสมอ นั่นคือถ้าเราให้ $A=\{x \mid x \notin x\}$ เราจะพบว่า

ถ้า $A \in A$ แล้ว $A \notin A$ และ ถ้า $A \notin A$ แล้ว $A \in A$

ทำให้สรุปได้ว่า $A \in A$ และ $A \notin A$ พร้อมกัน ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น A ไม่เป็นเซต

บทนิยาม 2.1. 1. เรียกเซตของสิ่งของทั้งหมดที่เรากำลังกล่าวถึงหรือสนใจอยู่ว่า **เอกภพสัมพัทธ์ (universal set)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{U}$

2. เรียกเซตซึ่งไม่มีสมาชิก ว่า **เซตว่าง (empty set)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\varnothing$

บทนิยาม 2.2. ให้ A และ B เป็นเซต จะกล่าวว่า

A เป็น **เซตย่อย (subset)** ของ B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$

ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B

นั่นคือ $$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

A ไม่เป็นเซตย่อยของ B เขียนแทนด้วย $A \not\subseteq B$

ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกบางตัวของ A ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B

นั่นคือ $$A \not\subseteq B \leftrightarrow \exists x[x \in A \wedge x \notin B]$$

ตัวอย่าง 2.3. ให้ A={1,2,3} และ B={1,2,3,4,5} จะได้ว่า

$A \subseteq B$ เพราะว่า 1 2 และ 3 ที่เป็นสมาชิกทั้งหมดของ A เป็นสมาชิกของ B

แต่ $B \not\subseteq A$ เพราะว่า มี 4 ที่เป็นสมาชิกของ B แต่ 4 ไม่เป็นสมาชิกของ A

การพิสูจน์ตรงว่า $A \subseteq B$ มีเค้าโครงดังนี้

ให้ $x \in A$

$\vdots$

$x \in B$

ดังนั้น $A \subseteq B$

ทฤษฎีบท 2.4. ให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $\varnothing \subseteq A$ 2. $A \subseteq A$

พิสูจน์ 1. ให้ A เป็นเซต และให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ

เนื่องจากข้อความ $x \in \varnothing$ เป็นเท็จเสมอ

ดังนั้น ประพจน์มีเงื่อนไข "$x \in \varnothing \rightarrow x \in A$" เป็นจริงเสมอ ทำให้ $\varnothing \subseteq A$

2. ให้ A เป็นเซต

และให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ดังนั้น ประพจน์มีเงื่อนไข "$x \in A \rightarrow x \in A$" เป็นจริงเสมอ

ดังนั้น $A \subseteq A$ ❑

ทฤษฎีบท 2.5. ให้ A B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

พิสูจน์ กรณี $A = \varnothing$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $A \subseteq C$

กรณี $A \neq \varnothing$ ให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ สมมติว่า $x \in A$

เนื่องจาก $A \subseteq B$ จะได้ว่า $x \in B$ และเนื่องจาก $B \subseteq C$ จะได้ว่า $x \in C$ ดังนั้น $A \subseteq C$ ❑

บทนิยาม 2.6. ให้ A และ B เป็นเซต

จะกล่าวว่า A เท่ากับ B เขียนแทนด้วย A = B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

นั่นคือ $A=B \leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$

ดังนั้น $A=B \leftrightarrow [x \in A \leftrightarrow x \in B]$

การพิสูจน์ตรงว่า $A=B$ มีเค้าโครงดังนี้

(i) พิสูจน์ว่า $A \subseteq B$
(ii) พิสูจน์ว่า $B \subseteq A$
ดังนั้น $A = B$

ตัวอย่าง 2.7. ให้ A = {x | x เป็นจำนวนจริงและเป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 4 = 0$} และ B = {2,-2} จงพิสูจน์ A = B

พิสูจน์ เราต้องแสดงว่า (i) $A \subseteq B$ และ (ii) $B \subseteq A$

(i) จะแสดงว่า $A \subseteq B$ ให้ $t \in A$ ดังนั้น t เป็นคำตอบสมการ $x^2 - 4 = 0$
นั่นคือ $t^2 - 4 = 0$ จะได้ว่า $(t + 2)(t - 2) = 0$
ทำให้ $t + 2= 0$ หรือ $t - 2 = 0$ ดังนั้น $t = -2$ หรือ $t = 2$ นั่นคือ $t \in B$ ดังนั้น $A \subseteq B$
(ii) จะแสดงว่า $B \subseteq A$ โดยการแทนค่าจะเห็นว่า 2 และ -2 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 4 = 0$
ดังนั้น $2,-2 \in A$ ทำให้ $B \subseteq A$
จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า A = B ❑

บทนิยาม 2.8. ให้ A และ B เป็นเซต จะกล่าวว่า A เป็น **เซตย่อยแท้ (proper subset)** ของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตย่อยของ B และ A ไม่เท่ากับ B
นั่นคือ $A \subset B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

ตัวอย่าง 2.9. ให้ S = { x | x เป็นจำนวนเต็ม และ 6 | x } และ T = { x | x เป็นจำนวนเต็มคู่}
จะได้ว่า $S \subseteq T$ และ $S \neq T$ ดังนั้น $S \subset T$

บทนิยาม 2.10. ให้ A เป็นเซต
เซตกำลัง หรือ**เพาเวอร์เซต (power set)** ของ A คือ เซตซึ่งสมาชิกเป็นเซตย่อยของ A เขียนด้วย P(A) ดังนั้น $P(A)=\{ X \mid X \subseteq A \}$

ตัวอย่าง 2.11. ให้ A={1,2} จะได้ว่า $P(A)=\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

ทฤษฎีบท 2.12. ให้ A และ B เป็นเซต จะได้ $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subseteq P(B)$
พิสูจน์ (i) จะแสดงว่า ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $P(A) \subseteq P(B)$
สมมติให้ $A \subseteq B$ และให้ $X \in P(A)$ ดังนั้น $X \subseteq A$

จาก $A \subseteq B$ โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่า $X \subseteq B$ นั่นคือ $X \in P(B)$

ดังนั้น $P(A) \subseteq P(B)$

(ii) จะแสดงว่า ถ้า $P(A) \subseteq P(B)$ แล้ว $A \subseteq B$

สมมติให้ $P(A) \subseteq P(B)$ เนื่องจาก $A \subseteq A$ ดังนั้น $A \in P(A)$

จาก $P(A) \subseteq P(B)$ ทำให้ $A \in P(B)$ นั่นคือ $A \subseteq B$

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subseteq P(B)$ ❑

2.2. การดำเนินการบนเซตและการพิสูจน์กฎต่าง ๆ

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการสร้างเซตใหม่จากเซตเดิมที่กำหนดให้ และกฎต่าง ๆ ใน ทฤษฎีเซต

บทนิยาม 2.13. ให้ A และ B เป็นเซต กำหนด

$A \cup B = \{ x / x \in A$ หรือ $x \in B \}$ เรียกว่า **ยูเนียน (union)** ของ A และ B

$A \cap B = \{ x / x \in A$ และ $x \in B \}$ เรียกว่า **อินเตอร์เซกชัน (intersection)** ของ A และ B

$A - B = \{ x / x \in A$ และ $x \notin B \}$ เรียกว่า **ผลต่าง (difference)** ของ A และ B

จากบทนิยามจะได้ว่า

1. $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A$ หรือ $x \in B$

   $x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A$ และ $x \notin B$
2. $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A$ และ $x \in B$

   $x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A$ หรือ $x \notin B$
3. $x \in A - B \leftrightarrow x \in A$ และ $x \notin B$

   $x \notin A - B \leftrightarrow x \notin A$ หรือ $x \in B$

** ในกรณีที่ $A \cap B = \varnothing$ เราจะกล่าวว่า A และ B **ไม่มีส่วนร่วม (disjoint)**

** กำหนดสัญลักษณ์แทนเซตของจำนวนดังต่อไปนี้

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ แทนเซตของจำนวนนับ

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Q}$ แทน เซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{R}$ แทน เซตของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.14. ให้ $A=\{1,2,3,4\}$ และ $B=\{x\in\mathbb{R}|3\leq x<5\}=[3,5)$ และ $C=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 6\}=[6,\infty)$

จะได้ว่า $A \cup B = \{1,2\} \cup [3,5)$

$B \cup C = [3,\infty)$

$A \cap C = \varnothing$

$A - B = \{1,2\}$

ทฤษฎีบท 2.15. ให้ A, B และ C เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \subseteq A\cup B$ และ $B \subseteq A\cup B$
2. $A\cap B\subseteq A$ และ $A\cap B\subseteq B$
3. $A\cup\varnothing=A$ และ $A\cap\varnothing=\varnothing$
4. $A\cup A=A$ และ $A\cap A=A$
5. $A\cup B=B\cup A$ และ $A\cap B=B\cap A$
6. $A-\varnothing=A$ และ $\varnothing-A=\varnothing$
7. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ และ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
8. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
9. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)$
10. $A\subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A\cup B=B$
11. $A\subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A\cap B=A$
12. ถ้า $A\subseteq B$ แล้ว $A\cup C \subseteq B\cup C$ และ $A\cap C \subseteq B\cap C$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เพียงข้อ 1 3 5 และ 10 ที่เหลือให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

1. จะแสดงว่า $A \subseteq A\cup B$ ให้ $x\in A$

จะได้ว่าข้อความ "$x\in A \rightarrow x\in A \vee x\in B$" เป็นจริงเสมอ

ดังนั้น $A \subseteq A\cup B$ ในทำนองเดียวกัน จะแสดงได้ว่า $B \subseteq A\cup B$

3. จะแสดงว่า $A\cup\varnothing=A$

นั่นคือจะแสดงว่า (i) $A\cup\varnothing \subseteq A$ และ (ii) $A \subseteq A\cup\varnothing$

(i) ให้ $x \in A\cup\varnothing$ จะได้ว่า $x \in A$ หรือ $x \in \varnothing$
เนื่องจาก ข้อความ " $x \in \varnothing$ " เป็นเท็จเสมอ ดังนั้น $x \in A$
นั่นคือ $A\cup\varnothing \subseteq A$

(ii) โดยข้อ 1. จะได้ว่า $A \subseteq A\cup\varnothing$

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า $A\cup\varnothing=A$

ต่อไปจะแสดงว่า $A\cap\varnothing = \varnothing$

นั่นคือจะแสดงว่า (i) $A\cap\varnothing \subseteq \varnothing$ และ (ii) $\varnothing \subseteq A\cap\varnothing$

(i) ให้ $x \in A\cap\varnothing$ จะได้ว่า $x \in A$ และ $x \in \varnothing$

เนื่องจาก ข้อความ " $x \in \varnothing$ " เป็นเท็จเสมอ

ทำให้ ข้อความ "$x \in A \wedge x \in \varnothing$ " เป็นเท็จ

ดังนั้น ข้อความ "$x \in A \wedge x \in \varnothing \rightarrow x \in \varnothing$ " เป็นจริงเสมอ

ทำให้ $A\cap\varnothing \subseteq \varnothing$

(ii) โดย ทฤษฎีบท 2.4 ข้อ 1 จะได้ว่า $\varnothing \subseteq A\cap\varnothing$

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า $A\cap\varnothing = \varnothing$

5. จะแสดงว่า $A\cup B=B\cup A$

ให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x \in A\cup B &\leftrightarrow x \in A \text{ หรือ } x \in B \\
&\leftrightarrow x \in B \text{ หรือ } x \in A \\
&\leftrightarrow x \in B\cup A
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $A\cup B=B\cup A$

ในทำนองเดียวกัน จะแสดงได้ว่า $A\cap B=B\cap A$

10. จะแสดงว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A\cup B = B$

นั่นคือจะแสดงว่า (i) ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A\cup B = B$ และ (ii) ถ้า $A\cup B = B$ แล้ว $A \subseteq B$

(i) ให้ $A \subseteq B$ จะแสดงว่า $A\cup B = B$

โดยข้อ 1 จะได้ว่า $B \subseteq A\cup B$ ต่อไปจะแสดงว่า $A\cup B \subseteq B$

ให้ $x \in A\cup B$ ดังนั้น $x \in A$ หรือ $x \in B$

ถ้า $x \in A$ จาก $A \subseteq B$ ทำให้ $x \in B$ ดังนั้น $A\cup B \subseteq B$

ถ้า $x \in B$ จะได้ว่า $A\cup B \subseteq B$

สรุปได้ว่า $A\cup B = B$

(ii) ให้ $A\cup B = B$ จะแสดงว่า $A \subseteq B$

ให้ $x \in A$ สมมติว่า $x\notin B$

จาก $A\cup B = B$ ทำให้ $x\notin A\cup B$

ดังนั้น $x\notin A$ เกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ $x\in B$

สรุปได้ว่า $A \subseteq B$

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A\cup B = B$ ❏

บทนิยาม 2.16. ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A เป็นเซต

คอมพลีเมนต์ (complement) ของ A แทนด้วย A^c

คือ ผลต่างของ $\mathcal{U}$ และ A

นั่นคือ $A^c = \mathcal{U} - A$ หรือ $A^c = \{x | x \notin A\}$

ดังนั้น $x \in A^c \leftrightarrow x \notin A$

$x \notin A^c \leftrightarrow x \in A$

ตัวอย่าง 2.17. ให้ $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ และ $A=\{1,2,3,4\}$ จะได้ว่า $A^c = \{5,6, \ldots\}$

ทฤษฎีบท 2.18. ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A,B เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \cup A^c = \mathcal{U}$
3. $A \cap A^c = \varnothing$
4. $A - B = A \cap B^c$
5. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $B^c \subseteq A^c$
6. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
7. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. $A \cap B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B^c$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เพียงข้อ 1 2 4 และ 6 ส่วนที่เหลือให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

1. ให้ $x \in \mathcal{U}$ จะได้ว่า $x \in (A^c)^c \leftrightarrow x \notin A^c \leftrightarrow x \in A$

ดังนั้น $(A^c)^c = A$

2. เนื่องจาก $A \subseteq \mathcal{U}$ และ $A^c \subseteq \mathcal{U}$ ดังนั้น $A \cup A^c \subseteq \mathcal{U}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathcal{U} \subseteq A \cup A^c$ ให้ $x \in \mathcal{U}$ ดังนั้น $x \in A$ หรือ $x \notin A$

นั่นคือ $x \in A$ หรือ $x \in A^c$ ดังนั้น $x \in A \cup A^c$ ทำให้ $\mathcal{U} \subseteq A \cup A^c$

สรุปได้ว่า $\mathcal{U} = A \cup A^c$

4. ให้ $x \in \mathcal{U}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x \in A-B &\leftrightarrow x \in A \text{ และ } x \notin B \\ &\leftrightarrow x \in A \text{ และ } x \in B^c \\ &\leftrightarrow x \in A \cap B^c \end{aligned}$$

ดังนั้น $A-B = A \cap B^c$

6. ให้ $x \in \mathcal{U}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x \in (A\cup B)^c &\leftrightarrow x \notin A\cup B \\
&\leftrightarrow x \notin A \text{ และ } x \notin B \\
&\leftrightarrow x \in A^c \text{ และ } x \in B^c \\
&\leftrightarrow x \in A^c \cap B^c
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ ❑

2.3. การวางนัยทั่วไปของยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน

(Generalization of Unions and Intersections)

ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเซต

เราเรียก $\{1, 2, \dots, n\}$ เป็น **เซตดรรชนี (indexed set)** และเรียกสมาชิกใน $\{1, 2, \dots, n\}$ ว่า ดรรชนี **(indices)** เซตดรรชนีอาจเป็นเซตอื่นซึ่งไม่ใช่เซต $\{1, 2, \dots, n\}$ ก็ได้

เช่น พิจารณา $I=\{a,b,c\}$ และเซต X_a, X_b, X_c เป็นเซต

ในกรณีนี้เราเรียก I เป็นเซตดรรชนีเช่นกัน

บทนิยาม 2.19. ให้ $I \neq \emptyset$ เป็นเซต และสำหรับแต่ละ $i\in I$ มี B_i เป็นเซต

เราจะเรียก I ว่า **เซตดรรชนี** และเรียก i ว่า **ดรรชนี**

ตัวอย่าง 2.20. ให้ $I=\{1,2,3,4\}$ และสำรับแต่ละ $i\in I$ ให้ $B_i=\{0, i^2\}$

จะได้ว่า I เป็นเซตดรรชนี และ $B_1=\{0,1\}$ $B_2=\{0,4\}$ $B_3=\{0,9\}$ $B_4=\{0,16\}$

บทนิยาม 2.21. ให้ $J \neq\emptyset$ เป็นเซตดรรชนี และ B_α เป็นเซตทุก $\alpha\in J$

และให้ X เป็นหมู่ของเซต B_α ทุก $\alpha\in J$ นั่นคือ $X =\{ B_\alpha \mid \alpha\in J \}$ กำหนด

$\cup X = \cup_{\alpha\in J}B_\alpha=\{x \mid x\in B_\varphi$ บาง $\varphi\in J\}$ และ $\cap X = \cap_{\alpha\in J}B_\alpha=\{x \mid x\in B_\alpha$ ทุก $\alpha\in J \}$

** ถ้า $J =\{j\}$ แล้ว $\cup X= B_j$ และ $\cap X= B_j$ ถ้า $J =\{i,j\}$ แล้ว $\cup X= B_i\cup B_j$ และ $\cap X= B_i\cap B_j$

ทฤษฎีบท 2.22. ให้ $J \neq\emptyset$ เป็นเซตดรรชนี และ $X =\{ B_\alpha \mid \alpha\in J \}$ และ $B\neq\emptyset$ เป็นเซต

จะได้ว่า

1. $B_\beta\subseteq\cup_{\alpha\in J}B_\alpha$ ทุก $\beta\in J$
2. $\cap_{\alpha\in J}B_\alpha \subseteq B_\beta$ ทุก $\beta\in J$
3. ถ้า $B_\alpha\subseteq B$ ทุก $\alpha\in J$ แล้ว $\cup_{\alpha\in J}B_\alpha\subseteq B$

4. ถ้า $B \subseteq B_\alpha$ ทุก $\alpha \in J$ แล้ว $B \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha$

พิสูจน์ 1. ให้ $\beta \in J$ และ $x \in B_\beta$

นั่นคือ $x \in B_\beta$ บาง $\beta \in J$ ดังนั้น $x \in \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha$ ดังนั้น $B_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด

3. สมมติให้ $B_\alpha \subseteq B$ ทุก $\alpha \in J$ และให้ $x \in \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha$ จะได้ว่า $x \in B_\beta$ บาง $\beta \in J$

จาก $B_\beta \subseteq B$ จะได้ว่า $x \in B$ ดังนั้น $\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha \subseteq B$

4. ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

หมายเหตุ กรณีที่เซตดรรชนีคือ $\mathbb{N}$ และ $X=\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ นิยมเขียน $\cup X = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ และ $\cap X = \cap_{i=1}^{\infty} B_i$ และในกรณีที่ $J=\{1,2,\ldots,n\}$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$ เป็นเซตดรรชนี เราจะเขียน $\cup X = \cup_{i=1}^{n} B_i$ และ $\cap X = \cap_{i=1}^{n} B_i$

ตัวอย่าง 2.23. ให้ $\mathbb{N}$ เป็นเซตดรรชนี $B_i=[i,i+1]$ และ $X=\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ จะได้ว่า

1. $\cup X = \cup_{i=1}^{\infty} B_i = [1,\infty)$
2. $\cap X = \cap_{i=1}^{\infty} B_i = \varnothing$
3. $\cup_{i=1}^{5} B_i = [1,6]$
4. $\cap_{i=1}^{5} B_i = \varnothing$
5. $\cap_{i=4}^{5} B_i = \{5\}$

ทฤษฎีบท 2.24. การวางนัยทั่วไปของกฎเดอร์มอร์แกน

(Generalized de Morgan's Laws)

ให้ $X = \{ B_\alpha \mid \alpha \in J \}$ จะได้ว่า

1. $(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in J} (B_\alpha)^c$
2. $(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in J} (B_\alpha)^c$

พิสูจน์ 1. ให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x \in (\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha)^c &\leftrightarrow x \notin \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha \\ &\leftrightarrow x \notin B_\alpha \text{ ทุก } \alpha \in J \\ &\leftrightarrow x \in (B_\alpha)^c \text{ ทุก } \alpha \in J \\ &\leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in J} (B_\alpha)^c \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in J} (B_\alpha)^c$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

บทนิยาม 2.25. ให้ J เป็นเซตดรรชนี และ X ={ B_α | $\alpha\in$J }
จะกล่าวว่า X เป็นหมู่ของเซตที่ไม่มีส่วนร่วมกันทุกคู่ (pairwise disjoint)
ก็ต่อเมื่อ $B_\alpha \cap B_\beta=\varnothing$ ทุก $\alpha,\beta\in J$

ตัวอย่าง 2.26. ให้ $n\in\mathbb{N}$ กำหนด $A_n=\{x\in\mathbb{R} | n\leq x<n+1\}=[n,n+1)$

จะได้ว่า $X=\{A_n | n\in\mathbb{N}\}$ ไม่มีส่วนร่วมกันทุกคู่

พิสูจน์ ให้ $i,j \in\mathbb{N}$ และ $i\neq j$ สมมติว่า $i>j$ ดังนั้น $i = j +k$ สำหรับบางค่า $k\in\mathbb{N}$

จะแสดงว่า $A_i \cap A_j = \varnothing$ ให้ $x\in A_j$ ดังนั้น $j\leq x\leq j + 1\leq j + n$ ทุก $n\in\mathbb{N}$

ดังนั้น $x \notin [i, i + 1)= A_i$ ดังนั้นสรุปได้ว่า ถ้า $x\in A_j$ แล้ว $x\notin A_i$ ทำให้ $A_i \cap A_j = \varnothing$ ❑

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

   1.1 $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ 1.2 $\varnothing \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

   1.3 $\{\varnothing\} \subseteq A$ ทุกเซต A 1.4 $\{1,2,3,4,5\} \subseteq \{1,2,3,4,\{5\}\}$

2. จงยกตัวอย่างที่ทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับบางเซต A B และ C (ถ้ามี)

   2.1 $A \subseteq B$ $B \not\subset C$ และ $A \subseteq C$

   2.2 $A \subseteq B$ $B \subseteq C$ และ $C \subseteq A$

   2.3 $A \not\subset B$ $B \not\subset C$ และ $C \subseteq A$

   2.4 $A \subseteq B$ $B \not\subset C$ และ $A \not\subset C$

3. จงเขียนเพาเวอร์เซต P(X) เมื่อกำหนด X ดังนี้

   3.1 $X = \{S,\{S\}\}$ เมื่อ S เป็นเซต 3.2 $X = \{a,\{a,\{b\}\}\}$

4. ให้ $A = \{x \mid P(x)\}$ และ $B = \{x \mid Q(x)\}$

   4.1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ แล้ว $A \subseteq B$

   4.2 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\forall x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$ แล้ว $A=B$

5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x \notin B$ และ $A \subseteq B$ แล้ว $x \notin A$

6. ให้ $X = \{x \mid P(x)\}$ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

   6.1 ถ้า $a \in X$ แล้ว P(a)

   6.2 ถ้า P(a) แล้ว $a \in X$

   6.3 ถ้า $\sim P(a)$ แล้ว $a \notin X$

7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ และ $C \subseteq A$ แล้ว $A=B$ และ $B=C$

8. ให้ $X = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $|x| \leq 2\}$ และ $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จงพิสูจน์ว่า $X=Y$

9. ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า

   9.1 $A \cap B \subseteq A$ และ $A \cap B \subseteq B$

   9.2 $A \cup A = A$ และ $A \cap A = A$

   9.3 $A - \varnothing = A$ และ $\varnothing - A = \varnothing$

   9.4 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ และ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   9.5 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   9.6 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$

   9.7 $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

   9.8 ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cup C \subseteq B \cup C$ และ $A \cap C \subseteq B \cap C$

10. ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A,B เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า

10.1 $A \cap A^c = \varnothing$

10.2 $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $B^c \subseteq A^c$

10.3 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

10.4 $A \cap B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B^c$

11. ให้ $J \neq \varnothing$ เป็นเซตดรรชนี และ $X = \{ B_\alpha \mid \alpha \in J \}$ และ $B \neq \varnothing$ เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า

11.1 $\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha \subseteq B_\beta$ ทุก $\beta \in J$

11.2 ถ้า $B \subseteq B_\alpha$ ทุก $\alpha \in J$ แล้ว $B \subseteq \bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha$

12. ให้ J เป็นเซตดรรชนี และ $X = \{ B_\alpha \mid \alpha \in J \}$ และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

12.1 $B \cap (\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} (B \cap B_\alpha)$

12.2 $B \cup (\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J} (B \cup B_\alpha)$

13. ให้ J เป็นเซตดรรชนี และ $X = \{ B_\alpha \mid \alpha \in J \}$ จงพิสูจน์ว่า $\bigcap X \subseteq \bigcup X$

14. ให้ I และ J เป็นเซตดรรชนี และ $X = \{ B_\alpha \mid \alpha \in J \}$ จงพิสูจน์ว่า

14.1 $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$

14.2 $\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$

15. ให้ $X = \{ B_\alpha \mid \alpha \in J \}$ จงพิสูจน์ว่า $(\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in J} (B_\alpha)^c$

เอกสารอ้างอิงบทที่ 2

1. รุ่งนภา ภักดีสู่สุข, แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
2. Krantz, S.G., The Elements of Advanced Mathematics, CRC Press, Inc.,1995.
3. Pinter, C.C., Set Theory, Addison – Wesley Publishing Company, Inc., 1971.
4. Smith, D., Eggen, M., Andre, R. St., A Transition to Advanced Mathematics, 4th edition, Brooks / Cole Publishing Company, 1997.
5. Stewart ,T. , The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.
6. Sundstrom, T., Mathematical Reasoning Writing and Proof, Prentice Hall, Inc., 2001.
7. Wohlgemuth, Introduction to Proof in Abstract Mathematics, Saunders College Publishing,1990.

การจัดการเรียนการสอน

บทที่ 3 เรื่อง ความสัมพันธ์

กระบวนวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
(Fundamental Concepts of Mathematics)

ชื่อผู้สอน อาจารย์ ดร. สายัญ ปันมา

เวลาที่ใช้ 9 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถพิสูจน์กฎพื้นฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ได้
2. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นความสมมูล อันดับบางส่วน อันดับเชิงเส้นได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. แบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัด
3. ตัวแทนแต่ละกลุ่มนำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
2. กระดาษ และปากกา
3. เครื่องฉายทึบแสง

บทที่ 3

ความสัมพันธ์ (Relations)

ในบทนี้เรากล่าวถึง ผลคูณคาร์ทีเซียน บทนิยามและกราฟของความสัมพันธ์ ความสัมพันธ์สมมูลและผลแบ่งกั้น อันดับบางส่วน อันดับเชิงเส้น และหลักการจัดอันดับดี

3.1. ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Products)

บทนิยาม 3.1. ให้ $A\neq\emptyset$ และ $B\neq\emptyset$ และ ให้ $a\in A$ และ $b\in B$

คู่อันดับ (a,b) กำหนดให้เป็นเซต $\{\{a\},\{a,b\}\}$

นั่นคือ $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

จะเรียก a ว่า **พิกัดที่หนึ่ง (first coordinate)**

และเรียก b ว่า **พิกัดที่สอง (second coordinate)**

ให้ $a,c\in A$ และ $b,d\in B$ โดยบทนิยาม จะได้ว่า

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$$
$$\Leftrightarrow \{a\}=\{c\} \text{ และ } \{a,b\}=\{c,d\}$$
$$\Leftrightarrow a=c \text{ และ } b=d$$

บทนิยาม 3.2. ให้ A และ B เป็นเซต **ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A\times B$ คือเซตของคู่อันดับทั้งหมดซึ่งพิกัดที่หนึ่งของคู่อันดับเป็นสมาชิกของ A และพิกัดที่สองของคู่อันดับเป็นสมาชิกของ B นั่นคือ $A\times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ และ } b\in B\}$

ข้อสังเกต

1. ถ้า A มีสมาชิก m ตัวและ B มีสมาชิก n ตัว แล้ว $A\times B$ จะมีสมาชิก $m\times n$ ตัว
2. $A\times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$

ทฤษฎีบท 3.3. ให้ A, B, C และ D เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
3. $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$
4. $(A\times B)\cup(C\times D) \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$
5. ถ้า $A\neq\emptyset$ และ $A\times B = A\times C$ แล้ว $B = C$

พิสูจน์ 1. ให้ (x,y) เป็นคู่อันดับใด ๆ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in A\times(B\cup C) &\leftrightarrow x\in A \text{ และ } y\in B\cup C \\
&\leftrightarrow x\in A \text{ และ } (y\in B \text{ หรือ } y\in C) \\
&\leftrightarrow (x\in A \text{ และ } y\in B) \text{ หรือ } (x\in A \text{ และ } y\in C) \\
&\leftrightarrow (x, y)\in A\times B \text{ หรือ } (x, y)\in A\times C \\
&\leftrightarrow (x, y)\in (A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $A\times(B \cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด

3. ให้ (x,y) เป็นคู่อันดับใด ๆ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in (A\times B) \cap(C\times D) &\leftrightarrow (x,y)\in A\times B \text{ และ } (x,y)\in C\times D \\
&\leftrightarrow (x\in A \text{ และ } y\in B) \text{ และ } (x\in C \text{และ } y\in D) \\
&\leftrightarrow (x\in A \text{ และ } x\in C) \text{ และ } (y\in B \text{ และ } y\in D) \\
&\leftrightarrow x\in A\cap C \text{ และ } y\in B\cap D \\
&\leftrightarrow (x, y)\in (A\cap C)\times(B\cap D)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(A\times B) \cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

4.ทำเป็นแบบฝึกหัด

5.ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

ข้อควรระวัง

ข้อความต่อไปนี้ไม่จริง

1. $A\times B = B\times A$
2. $A\cap(B\times C) = (A\cap B)\times(A\cap C)$
3. $A\cup(B\times C) = (A\cup B)\times(A\cup C)$

3.2. บทนิยามและกราฟของความสัมพันธ์ (Definition and Graph of Relations)

บทนิยาม 3.4. ให้ A และ B เป็นเซต

จะเรียก r ว่าเป็น **ความสัมพันธ์ (relation)** จาก A ไป B เมื่อ $r \subseteq A\times B$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ $(a,b)\in r$ จะเขียนแทนด้วย arb

อ่านว่า a สัมพันธ์ r กับ b

และในกรณีที่ $(a,b)\notin r$ จะเขียนแทนด้วย $a \not r\, b$

ข้อสังเกต

1. $\varnothing$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B (เนื่องจาก $\varnothing \subseteq A\times B$)

2. ถ้า $A\times B$ มีสมาชิก n ตัว จากความรู้เรื่องเซต จะได้ว่ามีเซตย่อยของ $A\times B$ อยู่ 2^n เซตย่อย ดังนั้นจะมีความสัมพันธ์อยู่ 2^n ความสัมพันธ์

   ** ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A แล้วจะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์บน A

บทนิยาม 3.5. ให้ A และ B เป็นเซต และ $r \subseteq A\times B$

โดเมน (domain) ของ r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D_r

คือเซตของพิกัดที่หนึ่งของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r นั่นคือ $D_r = \{\, a \mid (a,b) \in r \,\} \subseteq A$

เรนจ์ (range) ของ r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R_r

คือเซตของพิกัดที่สองของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r นั่นคือ $R_r = \{\, b \mid (a,b) \in r \,\} \subseteq B$

ตัวอย่าง 3.6. ให้ A={1,3} และ B={2,4,6} และ $r = \{(x,y) \in A\times B \mid x + y \leq 5\}$ และ $s = \{(x,y) \in A\times B \mid x$ หาร y ลงตัว$\}$ จะได้ว่า r และ s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

และ r = {(1,2), (1,4), (3,2)} และ s = {(1,2), (1,4), (1,6), (3,6)}

ดังนั้น $D_r = \{1,3\}$ และ $R_r = \{2,4\}$

$D_s = \{1,3\}$ และ $R_s = \{2,4,6\}$

จะเห็นว่า $r \cap s = \{(1,2),(1,4)\} \subseteq A\times B$ และ

$r \cup s = \{(1,2),(1,4),(3,2),(1,6),(3,6)\} \subseteq A\times B$

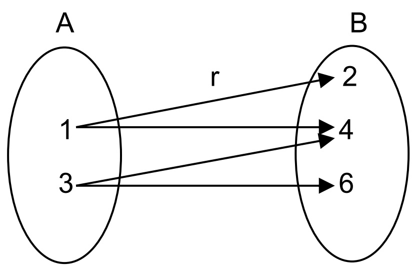
ดังนั้น $r \cap s$ และ $r \cap s$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดยทั่วไปถ้า r และ s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว $r \cup s$ และ $r \cap s$ ยังคงเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

เราสามารถแทนความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้หลายวิธี

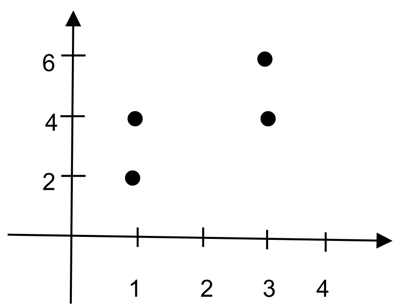
ตัวอย่าง 3.7. ให้ $A = \{1, 3\}$ และ $B = \{2, 4, 6\}$ และ $r = \{(1,2), (1,4), (3,4), (3,6)\}$

เราสามารถเขียนแผนภาพแทนความสัมพันธ์ r ดังรูป 3.1



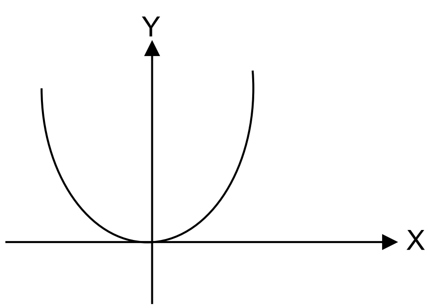
รูป 3.1

หรือเราอาจใช้กราฟในระบบพิกัดเชิงตั้งฉากแทนความสัมพันธ์จาก A ไป B ถ้า A และ B เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ดังรูป 3.2



รูป 3.2

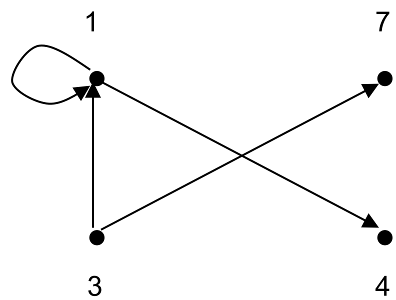
ตัวอย่าง 3.8. ให้ $f = \{(x,y) \mid y = x^2\} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ได้ว่า f เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}$ และ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \{ y\in\mathbb{R} \mid y\geq 0\}$ ได้กราฟของ f ดังรูป 3.3



รูป 3.3

หรือเราอาจใช้กราฟอีกชนิดหนึ่งแทนความสัมพันธ์บน A เรียกกราฟชนิดนี้ว่า **ไดกราฟ (digraph)** โดยให้สมาชิกของ A แทน **จุดยอด (vertices)** และสมาชิกของ r ซึ่งเป็นความสัมพันธ์บน A แทน **เส้นเชื่อม (edge)** จุดยอด โดยที่เส้นเชื่อมมีทิศทางกำหนดดังนี้ ถ้า $(x,y) \in r$ จะได้ว่ามีเส้นเชื่อมซึ่งเป็นลูกศรพุ่งจาก x ไป y

ตัวอย่าง 3.9. ให้ $A = \{1, 3, 4, 7\}$ และ $r = \{(1,1), (1,4), (3,1), (3,7)\}$ เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ไดกราฟที่สมนัยกับ r ดังรูป 3.4



รูป 3.4

3.3. ความสัมพันธ์สมมูลและผลแบ่งกั้น (Equivalence Relations and Partitions)

ความสัมพันธ์บนเซต A มีได้หลายชนิดซึ่งถูกกำหนดขึ้นด้วยสมบัติบางประการดังนี้

บทนิยาม 3.10. ให้ A เป็นเซต และ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะกล่าวว่า r มีสมบัติ

1. **สะท้อน (reflexive)** ก็ต่อเมื่อ $x\,r\,x$ ทุก $x \in A$
2. **สมมาตร (symmetric)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y \in A$ ถ้า $x\,r\,y$ แล้ว $y\,r\,x$
3. **ถ่ายทอด (transitive)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in A$ ถ้า $x\,r\,y$ และ $y\,r\,z$ แล้ว $x\,r\,z$
4. **ปฏิสมมาตร (antisymmetric)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y \in A$ ถ้า $x\,r\,y$ และ $y\,r\,x$ แล้ว $x=y$

ตัวอย่าง 3.11.

1. ให้ $A=\{0,3,6,9\}$ และ $r=\{(0,0),(3,3),(3,6),(6,3),(3,9),(6,6),(9,9)\}$

จะเห็นว่า r มีสมบัติสะท้อน เนื่องจาก 0r0 3r3 6r6 และ 9r9

เนื่องจาก 3r9 แต่ $9 \not r\, 3$ ดังนั้น r ไม่มีสมบัติสมมาตร

จะเห็นว่า r ไม่มีสมบัติถ่ายทอด เพราะว่า 6r3 และ 3r9 แต่ $6 \not r\, 9$

และ ว่า r ไม่มีสมบัติปฏิสมมาตร เพราะว่า 6r3 และ 3r6 แต่ $6 \neq 3$

2. ให้ $B \neq \emptyset$ กำหนดความสัมพันธ์บน P(B) ดังนี้
   $r = \{(X,Y) | X \subseteq Y\}$ จะได้ว่า r มีสมบัติ สะท้อน ถ่ายทอด และปฏิสมมาตร
   แต่ไม่มีสมบัติสมมาตร

บทนิยาม 3.12. ให้ n เป็นจำนวนนับ a และ b เป็นจำนวนเต็ม
เราจะกล่าวว่า **a คอนกรูเอนท์กับ b มอดูโล n (a is congruence to b modulo n)**
ก็ต่อเมื่อ n หาร a-b ลงตัว
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \equiv b \pmod{n}$ อ่านว่า a คอนกรูเอนท์ b มอด n

** $a \equiv b \pmod{n} \leftrightarrow n|(a-b) \leftrightarrow a-b=nk \ \exists k \in \mathbb{Z}$

เช่น $7 \equiv 1 \pmod{2}$ $15 \equiv 0 \pmod{5}$ และ $5 \equiv -2 \pmod{3}$

ตัวอย่าง 3.13. ให้ n เป็นจำนวนนับ และ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ดังนี้ a r b ก็ต่อเมื่อ $a \equiv b$(mod

n)
จะได้ว่า r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

พิสูจน์ ให้ a, b, c $\in \mathbb{Z}$

1. จะแสดงว่า r มีสมบัติสะท้อน เนื่องจาก a-a = 0 = n0 ดังนั้น n หาร a-a ลงตัว
   นั่นคือ $a \equiv a \pmod{n}$ ดังนั้น ara
2. จะแสดงว่า r มีสมบัติสมมาตร ให้ arb จะได้ว่า $a \equiv b \pmod{n}$ นั่นคือ n หาร a-b ลงตัว
   เนื่องจาก b-a = (-1)(a-b) ดังนั้น n หาร b-a ลงตัว นั่นคือ $b \equiv a \pmod{n}$ ดังนั้น bra
3. จะแสดงว่า r มีสมบัติถ่ายทอด ให้ arb และ brc ดังนั้น $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$
   นั่นคือ n หาร a-b ลงตัว และ n หาร b-c ลงตัว
   เนื่องจาก a-c = (a-b) + (b-c) ดังนั้น n หาร a-c ลงตัว นั่นคือ $a \equiv c \pmod{n}$ ดังนั้น arc

จาก 1 2 และ 3 จะได้ว่า r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด ❑

บทนิยาม 3.14. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A
จะกล่าวว่า r เป็น **ความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation)** บน A ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด
เช่น ความสัมพันธ์ r ในตัวอย่าง 3.13

บทนิยาม 3.15. ให้ $A \neq \varnothing$ และ J เป็นเซตดรรชนี และ

$P=\{ A_i \mid A_i \neq \varnothing$ และ $A_i \subseteq A$ ทุก $i \in J \}$

จะกล่าวว่า P เป็น **ผลแบ่งกัน (partition)** ของ A ก็ต่อเมื่อ

1. $A = \bigcup_{i\in J} A_i$ และ
2. สำหรับทุก $i,j \in J$ ได้ว่า $A_i \cap A_j = \varnothing$ หรือ $A_i = A_j$

บทนิยาม 3.16. ให้ $A \neq \varnothing$ และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูล บน A และ $a \in A$

ชั้นสมมูล (equivalence class) ของ a เขียนแทนด้วย [a]

หมายถึง เซตของสมาชิกทั้งหมดใน A ที่มีความสัมพันธ์ r กับ a

นั่นคือ $[a] = \{ x \in A \mid a\ r\ x\}$

ให้ $A_{|r}$ แทนเซตของชั้นสมมูลทั้งหมดที่เกิดจากความสัมพันธ์ r

นั่นคือ $A_{|r} = \{ [a] \mid a \in A \}$

ตัวอย่าง 3.17.

1. ให้ A={a, b, c} และ r = {(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)}

   จะได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

   [a] = {a,c}

   [b] = {b}

   [c] = {a,c}

   $A_{|r} = \{[a], [b]\}$

   $A = [a] \cup [b]$

2. ให้ B={a, b, c, d} และ s = {(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b)}

   จะได้ว่า s เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน B

   [a] = {a,d}

   [b] = {b,c}

   [c] = {b,c}

   [d] = {a,d}

   $B_{|s} = \{[a], [b]\}$

   $B = [a] \cup [b]$

ทฤษฎีบท 3.18. ให้ $A \neq \varnothing$ และ และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A จะได้ว่า $A_{/r}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ A

พิสูจน์ ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A และ $A_{/r} = \{ [a] \mid a \in A \}$

เนื่องจาก $[a] \subseteq A$ ทุก $a \in A$ จะได้ว่า $\cup_{a\in A}[a] \subseteq A$

ให้ $a \in A$ เนื่องจาก r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A จะได้ว่า ara นั่นคือ $a \in [a]$ ทำให้ $a \in \cup_{a\in A}[a]$

ดังนั้น $A = \cup_{a\in A}[a]$

ให้ $a,b \in A$ จะแสดงว่า $[a]=[b]$ หรือ $[a] \cap [b] = \varnothing$

สมมติว่า $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ จะได้ว่ามี $x \in [a] \cap [b]$ ดังนั้น $x \in [a]$ และ $x \in [b]$

นั่นคือ arx และ brx และยังได้อีกว่า xra และ xrb ทำให้ arb และ bra

จะแสดงว่า $[a]=[b]$

ให้ $t \in [a]$ จะได้ว่า tra จาก arb ดังนั้น trb นั่นคือ $t \in [b]$ ทำให้ $[a] \subseteq [b]$

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $[b] \subseteq [a]$ สรุปได้ว่า $[a]=[b]$

ดังนั้น $A_{/r}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ A ❑

ทฤษฎีบทต่อไปเป็น ทฤษฎีบทขั้นตอนการหาร ซึ่งสามารถดูการพิสูจน์ได้ในหนังสือทฤษฎีจำนวนทั่วไป

ทฤษฎีบท 3.19. ให้ $a,b \in \mathbb{Z}$ และ $a \neq 0$ จะได้ว่ามี $q,r \in \mathbb{Z}$ เพียงคู่เดียวเท่านั้นที่ทำให้ $b = aq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |a|$ เรียก q ว่าผลหาร เรียก r ว่าเศษเหลือ

ตัวอย่าง 3.20. ให้ n เป็นจำนวนนับ และ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ดังนี้ a r b ก็ต่อเมื่อ

$a \equiv b \pmod{n}$ โดยตัวอย่าง 3.13 จะได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$

ดังนั้น ชั้นสมมูลของ a คือ $[a] = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n} \}$

ให้ $\mathbb{Z}_n$ แทนเซตของชั้นสมมูลทั้งหมดที่ได้จากความสัมพันธ์ r นั่นคือ $\mathbb{Z}_n = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$

จงแสดงว่า $\mathbb{Z}_n = \{ [0], [1], ..., [n-1] \}$

พิสูจน์ ให้ $x \in \mathbb{Z}$ จะแสดงว่า $[x] \in \mathbb{Z}_n$ นั่นคือจะแสดงว่า $[x]=[k]$ สำหรับบาง $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

พิจารณาจำนวนเต็ม x และจำนวนเต็มบวก n โดยทฤษฎีบท 3.19 จะได้ว่า มี $q\in \mathbb{Z}$ และ

$k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ ที่ทำให้ x = nq + k หรือ x-k = nq นั่นคือ n หาร x-k ลงตัว

ดังนั้น $x \equiv k(\text{mod } n)$ และ $k \equiv x(\text{mod } n)$

ต่อไปจะแสดงว่า [x]=[k]

ให้ $a\in[x]$ ดังนั้น $a \equiv x(\text{mod } n)$ จาก $x \equiv k(\text{mod } n)$ จะได้ว่า $a \equiv k(\text{mod } n)$ นั่นคือ $a\in[k]$

ดังนั้น $[x]\subseteq[k]$ ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $[k]\subseteq[x]$ สรุปได้ว่า [x]=[k]

ต่อไปจะแสดงว่า [0], [1], ..., [n-1] ไม่เท่ากันทุกเซต

สมมติว่ามี $k,m \in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ ซึ่ง [k] = [m] และ $k\leq m$

ดังนั้น $k\in[m]$ นั่นคือ $m \equiv k(\text{mod } n)$ ดังนั้น n หาร m-k ลงตัว

เนื่องจาก $0\leq m-k \leq n-1 < n$ ดังนั้น m-k = 0 ทำให้ m = k

สรุปได้ว่า $\mathbb{Z}_n = \{ [0], [1], ..., [n-1] \}$ ❑

3.4. เซตอันดับบางส่วน เซตอันดับเชิงเส้น และหลักการจัดอันดับดี

(Partially ordered set, Linearly ordered set and The well-ordering principle)

ความสัมพันธ์ที่มีความสำคัญมากทางคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่งคือ **อันดับบางส่วน (partial order)** ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ที่ทำให้เกิดการเปรียบเทีย[สมาชิกในเซตได้ ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ดังกล่าว

บทนิยาม 3.21. ให้ $A \neq \phi$ และ r เป็นความสัมพันธ์บน A
จะกล่าวว่า r เป็น **อันดับบางส่วน** บน A
ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด
และเรียก (A,r) ว่า **เซตอันดับบางส่วน (partially ordered set)** หรือ **โพเซต (poset)**

เช่น 1. $\leq$ เป็นอันดับบางส่วนบน $\mathbb{N}$

2. $\subseteq$ เป็นอันดับบางส่วนบน P(B) เมื่อ B เป็นเซต

3. การหารลงตัว เป็นอันดับบางส่วนบน $\mathbb{N}$

หมายเหตุ สำหรับ เซตอันดับบางส่วนใด ๆ
สมาชิกในเซตอาจเปรียบเทียบกันไม่ได้
เช่น ให้ B={1,2,3} จะได้ว่า (P(B), $\subseteq$) เซตอันดับบางส่วน

จะเห็นว่า {1,2},{1,3}$\in$ P(B) แต่ {1,2} $\not\subseteq$ {1,3} และ{1,3}$\not\subseteq${1,2}

บทนิยาม 3.22. ให้ (A,r) เป็นเซตอันดับบางส่วน และ x,y$\in$ A
จะกล่าวว่า x และ y **เปรียบเทียบกันได้ (comparable)** ถ้า x r y หรือ y r x
และกล่าวว่า x และ y **เปรียบเทียบกันไม่ได้ (non-comparable)** ถ้า x $\not r$ y และ y $\not r$ x

หมายเหตุ ถ้า (A,r) เป็นเซตอันดับบางส่วน และ (x,y)$\in$ r แล้ว

เราจะกล่าวว่า x น้อยกว่าหรือเท่ากับ y เขียนแทนด้วย x $\preceq$ y

และถ้า (x,y)$\notin$ r หมายความว่า x $\npreceq$ y

ถ้าเขียน x $\prec$ y อ่านว่า x น้อยกว่า y หมายความว่า x $\preceq$ y และ x $\neq$ y

บทนิยาม 3.23. ให้ (A,r) เป็นเซตอันดับบางส่วน และ B$\subseteq$A

ถ้าสมาชิกทุกตัวใน B เปรียบเทียบกันได้ นั่นคือ ทุก x,y$\in$ B ได้ว่า x $\preceq$ y หรือ y $\preceq$ x

แล้วเราจะเรียก (B,r) ว่า **เซตย่อยอันดับเชิงเส้น (linearly ordered subset)** ของ A
หรือเรียก B ว่า **เป็นลูกโซ่ (chain)** ของ A

และถ้าทุกสมาชิกใน A เปรียบเทียบกันได้ นั่นคือ ทุก x,y$\in$ A ได้ว่า x $\preceq$ y หรือ y $\preceq$ x

แล้วเราจะเรียก (A,r) **เซตอันดับเชิงเส้น (linearly ordered set)**

เช่น ($\mathbb{R}$, $\leq$), ($\mathbb{Z}$, $\leq$), ($\mathbb{N}$, $\leq$) เป็นอันดับเชิงเส้น (P($\mathbb{R}$), $\subseteq$) ไม่เป็นอันดับเชิงเส้น

($\mathbb{N}$, การหารลงตัว) ไม่เป็นอันดับเชิงเส้น

หมายเหตุ 1. ให้ (A,r) เซตอันดับเชิงเส้น จะได้ว่า สำหรับทุก x,y$\in$ A
ถ้า x $\neq$ y แล้ว x $\prec$ y หรือ y$\prec$ x เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น
2. เราอาจกล่าวว่า (A,r) เป็น **เซตอันดับ (ordered set)**
ถ้า (A,r) เป็นเซตอันดับบางส่วน

บทนิยาม 3.24. ให้ (A,r) เป็นเซตอันดับบางส่วน และ $m,n \in A$ จะกล่าวว่า

1. m เป็น **สมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม (maximal element)** ของ A ก็ต่อเมื่อ

   ทุก $x \in A$ ถ้า $m \preceq x$ แล้ว $x = m$ (นั่นคือ ไม่มีสมาชิกตัวไหนของ A ที่มากกว่า m)

2. n เป็น **สมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม (minimal element)** ของ A ก็ต่อเมื่อ

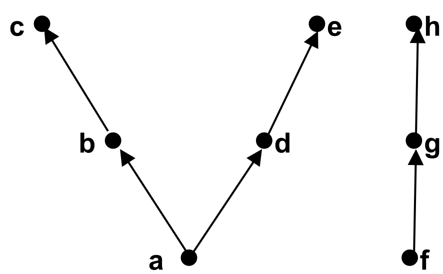
   ทุก $x \in A$ ถ้า $x \preceq n$ แล้ว $x = n$ (นั่นคือ ไม่มีสมาชิกตัวไหนของ A ที่น้อยกว่า n)

ตัวอย่าง 3.25. ให้ A = {a,b,c,d,e,f,g,h} และ $r \subseteq A \times A$ โดยที่

$r = \{(x,x) \mid x \in A\} \cup \{(a,b),(a,c),(b,c),(a,d),(a,e),(d,e)\} \cup \{(f,g),(f,h)(g,h)\}$

จะได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วน

ซึ่งถ้านำ r เขียน ไดกราฟโดยไม่สนใจเส้น (x,x) ทุก $x \in A$ จะได้แผนภาพดังรูป 3.5



รูป 3.5

จะเห็นว่า a และ f เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่มของ A

c, e และ h เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ A

บทนิยาม 3.26. ให้ (A,r) เป็นเซตอันดับบางส่วน และ $B \subseteq A$ และ $m \in A$ จะกล่าวว่า

1. m เป็น **ขอบเขตบน (upper bound)** ของ B ถ้า ทุก ๆ $b \in B$ ได้ว่า $b \preceq m$

2. m เป็น **ขอบเขตบนน้อยสุด** (**least upper bound** หรือ **supremum**) ของ B

   ถ้า m เป็นขอบเขตบนของ B และ $m \preceq x$ สำหรับทุก x ที่เป็นขอบเขตบนของ B

   และเขียน sup B แทนขอบเขตบนน้อยสุดของ B

3. m เป็น **ขอบเขตล่าง (lower bound)** ของ B ถ้า ทุก ๆ $b \in B$ ได้ว่า $m \preceq b$

4. m เป็น **ขอบเขตล่างมากสุด** (**greatest lower bound** หรือ **infimum**) ของ B

ถ้า m เป็นขอบเขตล่างของ B และ $x \preceq m$ สำหรับทุก x ที่เป็นขอบเขตล่างของ B

และเขียน inf B แทนขอบเขตล่างมากสุดของ B

ตัวอย่าง 3.27. ให้ A = {a,b,c,d,e,g} ดังนั้น (P(A), $\subseteq$) เป็นเซตอันดับบางส่วน

ให้ B={{a,b}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,b,e}}$\subseteq$P(A)

จะเห็นว่า D = {a,b,c,d,e} เป็นขอบเขตบนของ B เพราะว่าทุก ๆ X$\in$B ได้ว่า X$\subseteq$D

และ E = {a,b} เป็นขอบเขตล่างของ B เพราะว่าทุก ๆ X$\in$B ได้ว่า E$\subseteq$X

ยิ่งไปกว่านั้นยังได้อีกว่า sup B = D และ inf B = E

ทฤษฎีบท 3.28. ให้ r เป็นอันดับบางส่วนบน A และ B$\subseteq$A จะได้ว่า

ถ้า B มีขอบเขตบนน้อยสุด(ขอบเขตล่างมากสุด)

แล้ว ขอบเขตบนน้อยสุด(ขอบเขตล่างมากสุด) ของ B มีเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ ให้ x และ y เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ B

ดังนั้น x เป็นขอบเขตบนของ B และ y = sup B ทำให้ $y \preceq x$ นั่นคือ yrx

และ y เป็นขอบเขตบนของ B และ x = sup B ทำให้ $x \preceq y$ นั่นคือ xry

จาก r มีสมบัติปฏิสมมาตร จะได้ว่า x = y ดังนั้น ขอบเขตบนน้อยสุดของ B มีเพียงค่าเดียว

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า ขอบเขตล่างมากสุดของ B มีเพียงค่าเดียว ❏

บทนิยาม 3.29. ให้ r เป็นอันดับบางส่วนบน A และ B$\subseteq$A

1. ถ้า m เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ B และ m$\in$B

   แล้ว จะเรียก m ว่า **ค่าสูงสุด** หรือ**สมาชิกมากสุด** (**maximum** หรือ **largest element**) ของ B

2. ถ้า m เป็นขอบเขตล่างมากสุดของ B และ m$\in$B

   แล้ว จะเรียก m ว่า **ค่าต่ำสุด** หรือ**สมาชิกน้อยสุด** (**minimum** หรือ **smallest element**) ของ B

บทนิยาม 3.30. ให้ r เป็นอันดับเชิงเส้นบน A จะกล่าวว่า A เป็น **เซตอันดับดี (well ordered set)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ A บรรจุสมาชิกน้อยสุด

ทฤษฎีบท 3.31. หลักการจัดอันดับดี (The well-ordered principle)

ทุกเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{N}$ มีสมาชิกน้อยสุดเสมอ ($\mathbb{N}$ เป็นเซตอันดับดี)

พิสูจน์ ให้ $A \subseteq \mathbb{N}$ และ $A \neq \varnothing$ จะแสดงว่า A มีสมาชิกน้อยสุด

ให้ $K = \{ k \in \mathbb{N} \mid k \leq m$ ทุก $m \in A\}$ เนื่องจาก $1 \in \mathbb{N}$ และ $1 \leq m$ ทุก $m \in A$ ดังนั้น $1 \in K$

จาก $A \neq \varnothing$ ให้ $t \in A$ เนื่องจาก $t < t + 1$ ดังนั้น $t + 1 \notin K$ แต่ $t + 1 \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $K \neq \mathbb{N}$

ดังนั้นจะมี $p \in K$ แต่ $p + 1 \notin K$ เพราะฉะนั้น จะมี $m_0 \in A$ ซึ่ง $p + 1 > m_0$ ดังนั้น $p \geq m_0$

จาก $p \in K$ และ $m_0 \in A$ จะได้ว่า $p \leq m_0$ สรุปได้ว่า $p = m_0$

ดังนั้น $p \in A \cap K$ และ $p \leq m$ ทุก $m \in A$ นั่นคือ p เป็นสมาชิกน้อยสุดของ A

สรุป A มีสมาชิกน้อยสุด ❑

ตัวอย่าง 3.32. เซตของจำนวนเต็มบวกคี่ เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{N}$

และมี 2 เป็นสมาชิกน้อยสุด

ตัวอย่าง 3.33. จงพิสูจน์ว่า ไม่มีจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1

พิสูจน์ ให้ $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 1\}$ จะได้ว่า $T \subseteq \mathbb{N}$

จะแสดงว่า $T = \varnothing$ สมมติว่า $T \neq \varnothing$ โดย ทฤษฎีบท 3.31. จะได้ว่า T มีสมาชิกน้อยสุด m

ดังนั้น $0 < m < 1$ ทำให้ $0 < m^2 < m < 1$ และ $m^2 \in T$ ขัดแย้งกับที่ m เป็นสมาชิกน้อยสุดใน T

ดังนั้น $T = \varnothing$ นั่นคือ ไม่มีจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1 ❑

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. กำหนดเซต A และ B ต่อไปนี้ จงเขียน $A \times B$ และ $B \times A$ แบบแจกแจงสมาชิก

   1.1 $A = \{a,b,\{c\}\}$ และ $B = \{0,2\}$

   1.2 $A = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$ และ $B = \{7,6\}$

2. ให้ $A \neq \varnothing$ และ $B \neq \varnothing$ จงพิสูจน์ $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

3. ให้ A, B, C และ D ไม่เป็นเซตว่าง จงพิสูจน์ว่า

   3.1 $A \times (B-C) = (A \times B)-(A \times C)$

   3.2 ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $(A \times C) \cap (B \times C) = \varnothing$

   3.3 $A \subseteq B$ และ $C \subseteq D$ ก็ต่อเมื่อ $A \times C \subseteq B \times D$

   3.4 $A \times B = C \times D$ ก็ต่อเมื่อ $A = C$ และ $B = D$

   3.5 $(A \times B) \cap (A^c \times D) = \varnothing$

4. จงยกตัวอย่างค้านของ A, B และ C ซึ่งทำให้

   4.1 $(C \times C)-(A \times B) \neq (C-A) \times (C-B)$

   4.2 $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

5. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{R}$ ต่อไปนี้

   5.1 xry ก็ต่อเมื่อ $y = \sqrt{x-3}$

   5.2 xry ก็ต่อเมื่อ $y \leq x^2$

   5.3 xry ก็ต่อเมื่อ $y \neq x + 1$

   5.4 xry ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ หรือ $|y| \leq 1$

6. จะเขียนกราฟของความสัมพันธ์ในข้อ 5

7. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r บนเซตซึ่งกำหนดให้ต่อไปนี้ ความสัมพันธ์ใดมีสมบัติสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ปฏิสมมาตร

   7.1 r คือความสัมพันธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับ บน $\mathbb{N}$

   7.2 xry ก็ต่อเมื่อ $x + y = 10$ บน $\mathbb{N}$

   7.3 xry ก็ต่อเมื่อ $xy > 0$ บน $\mathbb{Z}$

   7.4 xry ก็ต่อเมื่อ $|x-y| = 3$ บน $\mathbb{R}$

   7.5 $(a,b)r(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \leq c$ บน $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

7.6 (a,b)r(c,d) ก็ต่อเมื่อ a-c = b-d บน $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

7.7 xry ก็ต่อเมื่อ $x^2 = y^2$ บน $\mathbb{Z}$

8. ความสัมพันธ์ใดในข้อ 7 เป็นความสัมพันธ์สมมูล

9. ให้ A = { a, b, c, d} จงยกตัวอย่างความสัมพันธ์บน A ที่มีสมบัติดังนี้

9.1 สะท้อนและสมมาตร แต่ไม่ถ่ายทอด

9.2 สะท้อนและถ่ายทอด แต่ไม่สมมาตร

9.3 สมมาตรและถ่ายทอด แต่ไม่สะท้อน

10. จงยกตัวอย่างเซต $A\neq\emptyset$ และความสัมพันธ์ r บน A ซึ่งมีสมบัติปฏิสมมาตร

11. ให้ $A\neq\emptyset$ และ r_1 , r_2 เป็นความสัมพันธ์บน A ซึ่ง $r_1 \subseteq r_2$

จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

11.1 ถ้า r_1 มีสมบัติสะท้อน แล้ว r_2 มีสมบัติสะท้อน

11.2 ถ้า r_2 มีสมบัติสะท้อน แล้ว r_1 มีสมบัติสะท้อน

12. ให้ $A\neq\emptyset$ และ r เป็นความสัมพันธ์บน A ซึ่งมีสมบัติสะท้อน จงพิสูจน์ว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A ก็ต่อเมื่อ ทุก $a,b,c \in A$ ถ้า arb และ arc แล้ว brc

13.ให้ s และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือไม่ เพราะเหตุใด

13.1 $s\cap r$ 13.2 $s\cup r$

14. การหารลงตัวเป็นอันดับบางส่วนบน $\mathbb{Z}$ หรือไม่ จงให้เหตุผลประกอบ

15. ให้ A = {1,2,6,30,210} และ r = $\{(a,b)\in A\times A \mid$ a หาร b ลงตัว$\}$ เป็นความสัมพันธ์บน A จงพิสูจน์ว่า (A,r) เป็นอันดับเชิงเส้นหรือไม่เพราะเหตุใด

16. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{N}$ กำหนดโดย arb ก็ต่อเมื่อ $b = a^k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k\geq 0$

จงแสดงว่า r เป็นอันดับบางส่วนบน $\mathbb{N}$

17. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ โดยที่ (x,y)r(a,b) ก็ต่อเมื่อ $x\leq a$ และ $y\leq b$

จงแสดงว่า r เป็นอันดับบางส่วนบน $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

18. ให้ $A\neq\emptyset$ และ $(P(A),\subseteq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้ $\emptyset \neq X \subseteq P(A)$

จงพิสูจน์ว่า $\sup X = \cup X$ และ $\inf X = \cap X$

19. กำหนดความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{N}$ ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นอันดับเชิงเส้น พร้อมทั้งพิสูจน์

19.1 $m r n$ ก็ต่อเมื่อ $m < 2n$

19.2 $m r n$ ก็ต่อเมื่อ (i) m เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคู่
หรือ (ii) m และ n เป็นจำนวนคู่ และ $m<n$
หรือ (iii) m และ n เป็นจำนวนคี่ และ $m<n$

19.3 $r = \{(m,n)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m\leq n$ และ $m\neq 5\}\cup\{(m,5) \mid m\in\mathbb{N}\}$

เอกสารอ้างอิงบทที่ 3

1. รุ่งนภา ภักดีสู่สุข, แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
2. Krantz, S.G., The Elements of Advanced Mathematics, CRC Press, Inc.,1995.
3. Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, 3rd edition, McGraw – Hill Book Company,1976.
4. Smith, D., Eggen, M., Andre, R. St., A Transition to Advanced Mathematics, 4th edition, Brooks / Cole Publishing Company, 1997.
5. Stewart ,T. , The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.
6. Sundstrom, T., Mathematical Reasoning Writing and Proof, Prentice Hall, Inc., 2001.
7. Wohlgemuth, Introduction to Proof in Abstract Mathematics, Saunders College Publishing,1990.

การจัดการเรียนการสอน

บทที่ 4 เรื่อง ฟังก์ชัน

กระบวนวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
(Fundamental Concepts of Mathematics)

ชื่อผู้สอน อาจารย์ ดร. สายัญ ปันมา

เวลาที่ใช้ 9 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถพิสูจน์กฎพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันได้
2. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันคงสภาพอันดับได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. แบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัด
3. ตัวแทนแต่ละกลุ่มนำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
2. กระดาษ และปากกา
3. เครื่องฉายทึบแสง

บทที่ 4

ฟังก์ชัน (Functions)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงบทนิยาม และพิสูจน์สมบัติต่างๆ ของฟังก์ชัน ฟังก์ชันประกอบ และฟังก์ชันผกผัน อิมเมจและอินเวอร์สอิมเมจของฟังก์ชันฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันคงสภาพ

4.1.บทนิยามของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์จากเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง โดยกำหนดว่า สำหรับสมาชิกในเซตแรกจับคู่กับสมาชิกเพียงตัวเดียวในเซตที่สอง ซึ่งเราสามารถนิยามในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

บทนิยาม 4.1. ให้ A และ B เป็นเซต และ $f \subseteq A \times B$ เรากล่าวว่า

1. f เป็น **ฟังก์ชันหรือการส่ง(function** หรือ **mapping**) ก็ต่อเมื่อ
   สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $y, z \in B$ ถ้า $(x , y) , (x , z) \in f$ แล้ว $y = z$
2. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ
   (i) สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $y, z \in B$ ถ้า $(x , y) , (x , z) \in f$ แล้ว $y = z$
   (ii) $D_f = A$

** กำหนดสัญลักษณ์ $f : A \rightarrow B$ แทน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ตัวอย่าง 4.2. ให้ A = {1,2,3} และ B = {a,b,c,d} และ

f = {(1,a),(1,b),(2,c)}

g = {(1,a),(2,a)}

h = {(1,a),(2,a),(3,b)}

จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ (1,a), (1,b)$\in$f แต่ $a \neq b$

g เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B เพราะว่า $D_g \neq A$

h เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

บทนิยาม 4.3. ให้ $f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $(x , y) \in f$ แล้วเราจะเขียน $y = f(x)$

ตัวอย่าง 4.4. ให้ $f = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = x^2+2\}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ และจงหา R_f

1) จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

จาก $f \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ทำให้ $D_f \subseteq \mathbb{R}$

ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่ามี $y = x^2+2 \in \mathbb{R}$ นั่นคือ $(x,y) \in f$ ทำให้ $x \in D_f$

ดังนั้น $\mathbb{R} \subseteq D_f$ จะได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$

ให้ $(x,y),(x,z)\in f$ ดังนั้น $y = x^2+2$ และ $z = x^2+2$ ทำให้ $y = z$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

2) ให้ $y \in R_f$ ดังนั้นจะมี $x\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $(x,y)\in f$ นั่นคือ $y = x^2+2$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ ทุก $x\in\mathbb{R}$ ดังนั้น $y \geq 2$ ทำให้ $y\in[2, \infty)$

จะได้ว่า $R_f \subseteq [2, \infty)$ ในทางกลับกัน ถ้าให้ $y\in[2, \infty)$

จะได้ว่า $y \geq 2$ หรือ $y-2 \geq 0$ เลือก $x = \sqrt{y-2}$

จะได้ว่า $x^2 = y - 2$ นั่นคือ $y = x^2+2$ ทำให้ $(x,y) \in f$

ดังนั้น $y\in R_f$ สรุปได้ว่า $[2, \infty)\subseteq R_f$ ดังนั้น $R_f = [2, \infty)$ ❑

** 1. ให้ $A\neq\varnothing$ จะเรียก $f : A \to \mathbb{R}$ ว่า **ฟังก์ชันค่าจริง (real- valued function)**

และถ้า $A \subseteq \mathbb{R}$ จะเรียก $f : A \to \mathbb{R}$ ว่า **ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง**

(real- valued function of real variable)

2. การกำหนด $f \subseteq A \times B$ โดยกำหนด f(x) ในรูปพีชคณิตของ x ใน A
ถ้าตรวจสอบได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน แล้วเราจะกล่าวว่า การกำหนด f เป็นไปอย่าง
แจ่มชัด (well - defined)

ตัวอย่าง 4.5. ให้ $\mathbb{Q}$ เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ กำหนด $f = \{(m/n, y) \in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z} \mid y = m-n\}$ จงตรวจสอบว่า การกำหนด f เป็นไปอย่างแจ่มชัดหรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า มี $(1/3, -2), (3/9, -6)\in f$ ซึ่ง $1/3 = 3/9$ แต่ $-2 \neq -6$
ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ f ไม่เป็นไปอย่างแจ่มชัด

ตัวอย่าง 4.6. ให้ $k \in \mathbb{R}$ และ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = k$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่เป็นไปอย่างแจ่มชัด เรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันคงตัว (constant function)**

ตัวอย่าง 4.7 ให้ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ $A \subseteq \mathcal{U}$ นิยาม $\chi_A : \mathcal{U} \to \{0,1\}$ โดยที่

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in A \\ 0 & ,x \in \mathcal{U}\text{-}A \end{cases}$$

เราเรียก χ_A ว่า **ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (the characteristic function)** ของ A

เช่น ให้ $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ และ $A = [0,1)$ จะได้ ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ A

$\chi_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ โดยที่ $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in [0,1) \\ 0 & ,x \notin [0,1) \end{cases}$

ตัวอย่าง 4.8. ให้ $x \in \mathbb{R}$

กำหนดสัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ คือ จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ x

และ $\lfloor x \rfloor$ คือ จำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

เช่น $\lceil 2.5 \rceil = 3$ และ $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$

แต่ละ $x \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $f(x) = \lceil x \rceil$ จะได้ว่า $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

และกำหนดให้ $g(x) = \lfloor x \rfloor$ จะได้ว่า $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

จะเรียก f ว่า **เพดาน (ceiling)** และเรียก g ว่า **พื้น (floor)**

ตัวอย่าง 4.9. ให้ $A \neq \varnothing$ และแต่ละ $x \in A$ กำหนดให้ $i_A(x) = x$

จะได้ว่า $i_A : A \to A$ เรียก i_A ว่า **ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)** บน A

บทนิยาม 4.10. จะเรียกฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ $\mathbb{N}$ ว่า **ลำดับ (sequences)** และเรียกฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ $\mathbb{N}$ และมีเรนจ์เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ว่า **ลำดับของจำนวนจริง (sequences of real number)**

บทนิยาม 4.11. ให้ $A \neq \varnothing$ จะเรียก $f : A \times A \to A$ ว่า **การดำเนินการทวิภาค (binary operation)** บน A

ตัวอย่าง 4.12. กำหนด f : $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ โดยที่ f(a,b) = a + b

จะได้ว่า f เป็นไปอย่างแจ่มชัด นั่นคือ f เป็น การดำเนินการทวิภาค บน $\mathbb{Z}$

ทฤษฎีบท 4.13. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน
จะได้ว่า f = g ก็ต่อเมื่อ $D_f = D_g$ และ f(x) = g(x) ทุก $x\in D_f$
พิสูจน์ ($\Longrightarrow$)สมมติให้ f = g จะแสดงว่า $D_f = D_g$ และ f(x) = g(x) ทุก $x\in D_f$
ให้ $x\in D_f$ จะได้ว่ามี y ซึ่ง $(x,y)\in f$ จาก f = g จะได้ว่า $(x,y)\in g$ ทำให้ $x\in D_g$ ดังนั้น $D_f\subseteq D_g$
ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $D_g\subseteq D_f$ ดังนั้น $D_f = D_g$
จาก $(x,y)\in f$ และ $(x,y)\in g$ จะได้ว่า f(x) = y และ g(x) = y ทำให้ f(x) = g(x)
($\Longleftarrow$) สมมติให้ $D_f = D_g$ และ f(x) = g(x) ทุก $x\in D_f$ จะแสดงว่า f = g
ให้ $(x,y)\in f$ ดังนั้น f(x) = y และ $x\in D_f$ ทำให้ y = f(x) = g(x) ดังนั้น $(x,y)\in g$ ทำให้ $f\subseteq g$
ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $g\subseteq f$ ดังนั้น f = g ❑

ตัวอย่าง 4.14. ให้ f และ g เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ และเป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$f(x) =1/(x - 1)$ และ $g(x) =(x+1)/(x^2-1)$ จงแสดงว่า f = g

วิธีทำ จะเห็นว่า $D_f = D_g = \mathbb{N}$-{1} และ แต่ละ $n\in\mathbb{N}$-{1} จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g(n) &=(n+1)/(n^2-1) \\ &= (n+1)/((n-1)(n+1)) \\ &= 1/(n-1) \\ &= f(n) \end{aligned}$$

ดังนั้น f = g

ตัวอย่าง 4.15. ให้ f และ g เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ และเป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$f(x) = x+1$ และ $g(x) = (x^2 -1)/(x - 1)$
จงพิจารณาว่า f = g หรือไม่เพราะเหตุใด

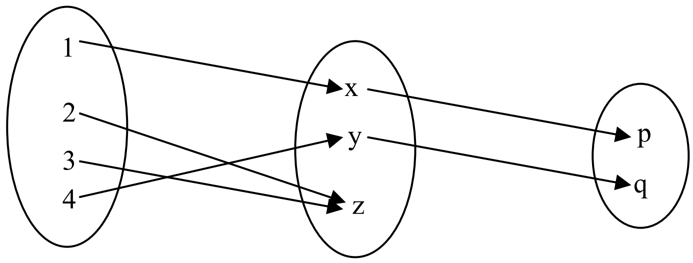
วิธีทำ เนื่องจาก $D_f = \mathbb{R}$ แต่ $D_g = \mathbb{R}$-{1} ดังนั้น $D_f\neq D_g$ ทำให้ $f\neq g$

4.2. ฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน (Composite Function and Inverse Function)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันที่กำหนดให้

บทนิยาม 4.16. ให้ $r \subseteq A \times B$ และ $s \subseteq B \times C$ และ $R_r \cap D_s \neq \emptyset$
กำหนด **ความสัมพันธ์ประกอบ (composite relation)** ของ r และ s เขียนแทนด้วย sor คือเซตของคู่อันดับ
ที่กำหนดโดย $sor = \{(a,c) \in A \times C \mid$ มี $b \in B$ ที่ทำให้ $(a,b) \in r$ และ $(b,c) \in s\}$
ดังนั้น sor จะเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป C
โดยที่ $D_{sor} = \{a \in A \mid$ มี $c \in C$ ซึ่ง $(a,c) \in sor\}$
หมายเหตุ $D_{sor} \subseteq D_r$ แต่ ไม่จริงเสมอไปที่ $D_{sor} = D_r$

ตัวอย่าง 4.17. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$ และ $C = \{p, q\}$
กำหนดความสัมพันธ์ $r \subseteq A \times B$ และ $s \subseteq B \times C$ ดังแผนภาพในรูป 4.1. จงหา D_{sor}



รูป 4.1.

วิธีทำ จากรูป จะได้ว่า $r = \{(1,x),(2,z),(3,z),(4,y)\}$ และ $s = \{(x,p),(y,q)\}$

และ $D_r = \{1,2,3,4\}$

และ $sor = \{(1,p),(4,q)\} \subseteq A \times B$

จะเห็นว่า $D_{sor} = \{1,4\} \neq D_r$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ sor ถือ ลำดับเป็นสำคัญ
ดังนั้น ถ้าเราพิจารณา $(a,b) \in sor$ นั่นหมายความว่า จะต้องมี $x \in B$ ซึ่งทำให้
$(a,x) \in r$ และ $(x,b) \in s$

หมายเหตุ ถ้า s และ r ในบทนิยาม 4.16 เป็นฟังก์ชัน แล้ว sor จะเป็นฟังก์ชัน

พิสูจน์ ให้ $(a,c),(a,d) \in$ sor จะแสดงว่า $c = d$

จาก $(a,c) \in$ sor จะว่ามี $b_1 \in B$ ซึ่ง $(a,b_1) \in r$ และ $(b_1,c) \in s$

จาก $(a,d) \in$ sor จะว่ามี $b_2 \in B$ ซึ่ง $(a,b_2) \in r$ และ $(b_2,d) \in s$

จาก r เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $b_1 = b_2$

และจาก s เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $c = d$ ❑

บทนิยาม 4.18. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ จะเรียก gof ว่าเป็น **ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ของ f และ g

ให้ $(a,c) \in$ gof นั่นคือ gof(a) = c

จาก $(a,c) \in$ gof จะได้ว่ามี $b \in B$ ซึ่ง $(a,b) \in f$ และ $(b,c) \in g$

นั่นคือ f(a)=b และ g(b)=c ดังนั้น c=g(b)=g(f(a))

สรุปได้ว่า gof(a) = g(f(a))

ตัวอย่าง 4.19. ให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x+3\}$ และ $g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2+1\}$

จงหา gof และ fog

วิธีทำ เนื่องจาก $D_f = D_g = \mathbb{R}$ จะได้ว่า $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f$ และ $f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}$ และ $f(x) \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R}$

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $D_{fog} = \mathbb{R}$

สำหรับ $x \in D_{gof}$ จะได้ว่า $gof(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10$

ดังนั้น $gof = \{(x,y) \mid y = x^2 + 6x + 10\}$

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $fog = \{(x,y) \mid y = x^2 + 4\}$ ❑

บทนิยาม 4.20. ให้ $r \subseteq A \times B$ **ความสัมพันธ์ผกผัน (inverse relation)** ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A ซึ่งกำหนดโดย $r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}$

เช่น ให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b,c,d\}$ และ $r = \{(1,a),(2,a),(3,d)\}$

จะได้ว่า $r^{-1} = \{(a,1),(a,2),(d,3)\}$

จะเห็นว่า r เป็นฟังก์ชัน แต่ r^{-1} ไม่เป็นต้องเป็นฟังก์ชัน และ $D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$

** ถ้า r เป็นฟังก์ชันแล้ว r^{-1} ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.21. ให้ $f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน และ f^{-1} เป็นความสัมพันธ์ผกผันของ f ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชันแล้วจะเรียก f^{-1} ว่าเป็น **ฟังก์ชันผกผัน (inverse function)** ของ f

ทฤษฎีบท 4.22. ให้ $r \subseteq A \times B$ $s \subseteq B \times C$ และ $t \subseteq C \times D$ จะได้ว่า

1. $to(sor) = (tos)or$ 2. $i_B or = r$ และ $roi_A = r$
3. $(r^{-1})^{-1} = r$ 4. $(sor)^{-1} = r^{-1} o\, s^{-1}$
5. $D_{r^{-1}} = R_r$ 6. $R_{r^{-1}} = D_r$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เพียงข้อ 4 ที่เหลือให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

4. จะแสดงว่า $(sor)^{-1} = r^{-1} o\, s^{-1}$

ให้ (x,y) เป็นคู่อันดับใด ๆ จะได้ว่า

$(x,y) \in (sor)^{-1} \leftrightarrow (y,x) \in sor$

$\leftrightarrow$ มี $b \in B$ ซึ่ง $(y,b) \in r$ และ $(b,x) \in s$

$\leftrightarrow$ มี $b \in B$ ซึ่ง $(b,y) \in r^{-1}$ และ $(x,b) \in s^{-1}$

$\leftrightarrow$ มี $b \in B$ ซึ่ง $(x,b) \in s^{-1}$ และ $(b,y) \in r^{-1}$

$\leftrightarrow (x,y) \in r^{-1} o\, s^{-1}$

ดังนั้น $(sor)^{-1} = r^{-1} o\, s^{-1}$ ❑

ตัวอย่าง 4.23. ให้ A = {1, 2, 3, 4}, B ={x, y, z} และ C ={ p, q}

และให้ $r \subseteq A \times B$ และ $s \subseteq B \times C$ โดยที่

r = { (1,x),(2,y),(3,y), (3,z)} และ s = { (x,p),(y,p),(z,q)}

จะได้ว่า r^{1} = {(x,1),(y,2),(y,3),(z,3)} และ s^{-1} = {(p,x),(p,y),(q,z)}

และ sor = {(1,p),(2,p),(3,p),(3,q)}

ดังนั้น $(sor)^{-1}$ = {(p,1),(p,2)(p,3),(q,3)} = $r^{1} o\, s^{-1}$

ทฤษฎีบท 4.24. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก R_f ไป A แล้วจะได้ว่า

1. $f^{-1} of = i_A$ 2. $fof^{-1} = i_{R_f}$

พิสูจน์ ให้ $f : A \to B$ และ $f^{-1} : R_f \to A$

1. $D_{f^{-1} of} = \{x \in A \mid x \in D_f$ และ $f(x) \in D_{f^{-1}}\} = A$

ให้ $x \in A$ จะแสดงว่า $f^{-1} of\,(x) = i_A(x)$

สมมติว่า $f^{-1} of\,(x) = y$ ดังนั้น $f^{-1}(f(x)) = y$ นั่นคือ $(f(x),y) \in f^{-1}$

จาก $(x,f(x)) \in f$ ดังนั้น $(f(x),x) \in f^{-1}$

เนื่องจาก f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น x=y นั่นคือ $f^{-1} of\,(x) = i_A(x) = x$

สรุปได้ว่า $f^{-1}of = i_A$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

** โดยทฤษฎีบท 4.24 จะได้ว่า ถ้า f: $A \rightarrow B$ และ $f^{-1}: R_f \rightarrow A$ แล้ว

1. แต่ละ $x \in A$ ได้ว่า $f^{-1}of(x) = x$
2. แต่ละ $y \in R_f$ ได้ว่า $f^{-1}of(y) = y$

ตัวอย่าง 4.25. 1. ให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1/(x+2)\}$

จงแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน และจงหาค่า $f^{-1}(x)$ ทุก $x \in D_{f^{-1}}$

2. ให้ $g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x+(1/x)\}$

จงหา g^{-1} และจงพิจารณาว่า g^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ 1. ให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1/(x+2)\}$ จะได้ว่า $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\} = \mathbb{R}-\{2\}$

และ $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid$ มี $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $(x,y) \in f\}$

ให้ $y \in R_f$ จะได้ว่ามี $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $(x,y) \in f$ นั่นคือ $y = 1/(x+2)$ จะได้ $x = (1-2y)/y$ โดยที่ $y \neq 0$

ในทางกลับกัน ถ้า $y \neq 0$ เลือก $x = (1-2y)/y$ จะได้ $xy = 1 - 2y$ นั่นคือ $y = 1/(x+2)$ โดยที่ $x \neq 0$

ดังนั้น $R_f = \mathbb{R}-\{0\}$ จะได้ว่า $f : \mathbb{R}-\{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $f^{-1} \subseteq R_f \times D_f$

ต่อไปจะแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

เนื่องจาก $(x,y) \in f^{-1} \leftrightarrow (y,x) \in f \leftrightarrow x = 1/(y+2)$ จะได้ว่า $y = (1-2x)/x$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = y = (1-2x)/x$ โดยที่ $x \neq 0$ และ $f^{-1} : \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

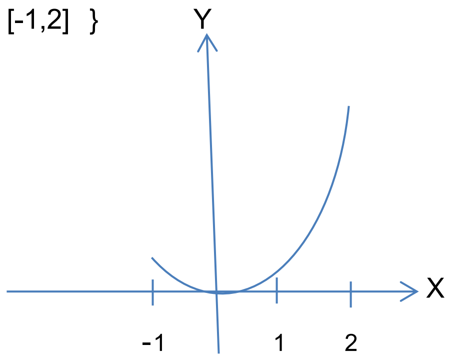
2. ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

บทนิยาม 4.26. ให้ f: $A \rightarrow B$ และ $D \subseteq A$ **การกำกัด (restriction)** ของ f บน D เขียนแทนด้วย $f_{|D}$ คือเซตของคู่อันดับที่กำหนดโดย $f_{|D} = \{(x,y) \in f \mid x \in D\}$ และเราจะเรียก f ว่าเป็น **ภาคขยาย (extension)** ของ $f_{|D}$

ตัวอย่างให้ 4.27. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x^2$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

จงเขียนกราฟของ $f_{|D}$เมื่อ $D=[-1,2]$

วิธีทำ ได้ $f_{|D}=\{(x,y) \in f \mid x \in [-1,2]\}$



รูป 4.2.

4.3. ฟังก์ชันทั่วถึง และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(Onto Functions and One-to-One Functions)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันที่มีลักษณ์พิเศษเรียกว่าฟังก์ชันทั่วถึง และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งจะเป็นส่วนสำคัญในการศึกษาเซตจำกัดและเซตอนันต์ในบทต่อไป

บทนิยาม 4.28. ให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันทั่วถึง** (**onto function** หรือ **surjection**) ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ f เท่ากับ B นั่นคือ $R_f = B$

เนื่องจาก $R_f \subseteq B$ ดังนั้นจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $B \subseteq R_f$

นั่นคือในการพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เราจะแสดงว่า สำหรับทุก $y \in B$ จะมี $x \in A$ ซึ่ง $(x,y) \in f$

ตัวอย่าง 4.29. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x)= 6x-5$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

พิสูจน์ ให้ $y \in \mathbb{R}$ จะหา $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $y = 6x -5$ เลือก $x = (y+5)/6$ จะได้ว่า $x \in \mathbb{R}$ และ $f(x) = 6((y+5)/6) = y$ ดังนั้น $y \in R_f$ ทำให้ $B \subseteq R_f$ สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ❑

ตัวอย่าง 4.30. ให้ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $g(x) = |x +1|$

จงแสดงว่า g ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

พิสูจน์ จะเห็นว่า $|x+1| \geq 0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ เลือก $y = -1 \in \mathbb{R}$ ได้ว่า $|x+1|>-1$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $g(x) = |x+1| \neq -1$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า g ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ❑

ตัวอย่าง 4.31. ให้ $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $g(x,y) = |x+y|$ จงแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

บทนิยาม 4.32. ให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** หรือ **ฟังก์ชัน 1-1 (one-to-one function หรือ injection)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, w \in A$ และทุก $y \in B$ ถ้า $(x,y) \in f$ และ $(w,y) \in f$ แล้ว $x = w$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, w \in A$ ถ้า $f(x)=f(w)$ แล้ว $x=w$

ตัวอย่าง 4.33. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = 6x-5$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ $x,w \in \mathbb{R}$ และ $f(x)=f(w)$

จะได้ว่า $6x-5 = 6w-5$ ดังนั้น $x = w$ สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ❑

** จากนิยาม 4.32. สำหรับ $f : A \to B$ จะได้ว่า

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, w \in A$ ถ้า $x \neq w$ แล้ว $f(x) \neq f(w)$
2. f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มี $x, w \in A$ ซึ่ง $x \neq w$ แต่ $f(x)=f(w)$

ตัวอย่าง 4.34. ให้ $g : \mathbb{R} \to (0,1]$ กำหนดโดย $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

จงแสดงว่า g ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ เลือก $x=1$ และ $y=-1$ จะได้ว่า $x \neq y$ แต่ $g(x)=g(1)=1/2=g(-1)=g(y)$

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ❑

ตัวอย่าง 4.35. ให้ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ กำหนดโดย $g(x) = (x,0)$ จงแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

ทฤษฎีบท 4.36. ให้ f : A→B จะได้ว่า

1. f^{-1}:R_f →A ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. ถ้า f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ 1. ให้ f : A→B

(→) สมมติให้ f^{-1}:R_f →A จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ (x,y),(w,y)∈f ดังนั้น (y,x),(y,w) ∈f^{-1} เนื่องจาก f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

จะได้ว่า x=w ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(←) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ให้ (x,y),(x,z)∈f^{-1} ดังนั้น (y,x),(z,x)∈f เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะได้ว่า y=z ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

2. ให้ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน จะแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ (x,y),(w,y)∈f^{-1} ดังนั้น (y,x),(y,w) ∈f^{-} เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า x=w

สรุปได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ❑

บทแทรก 4.37. ถ้า f : A→B เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และหนึ่งต่อหนึ่ง

แล้ว f^{-1}: B →A เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ f : A→B เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า R_f = B

โดย ทฤษฎีบท 4.36. ข้อ 1 จะได้ว่า f^{-1}:R_f →A นั่นคือ f^{-1}: B→A

ดังนั้น f : A→B และ f^{-1}: B→A โดยทฤษฎีบท 4.36. ข้อ 2

ทำให้ได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จาก D_f = $R_{f^{-1}}$ ดังนั้น $R_{f^{-1}}$=A นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ❑

ทฤษฎีบท 4.38.

1. ถ้า f : A→B เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ g: B→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
   แล้ว gof: A→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

2. ถ้า f : A→B และ g: B→C และ gof: A→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
   แล้ว g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

พิสูจน์ 1. ให้ f : A→B เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ g: B→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จะแสดงว่า gof: A→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ c∈C จาก g: B→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้นจะมี b∈B ซึ่ง g(b)=c

และจาก f : A→B เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี a∈A ซึ่ง f(a)=b

ดังนั้นจะมี a∈A ซึ่ง gof(a)=g(f(a))=g(b)=c ทำให้ gof: A→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

2. ให้ f : A→B และ g: B→C และ gof: A→C เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จะแสดง g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $c \in C$ จาก $gof: A \to C$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $a \in A$ ซึ่ง $gof(a)= c$

นั่นคือ $g(f(a))=c$ จาก $f : A \to B$ ทำให้ $f(a) \in B$

จะได้ว่า $b = f(a) \in B$ ซึ่ง $g(b)=g(f(a))=c$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ❑

ทฤษฎีบท 4.39.

1. ถ้า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน1-1 และ $g: B \to C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
   แล้ว $gof: A \to C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า $f : A \to B$ และ $g: B \to C$ และ $gof: A \to C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
   แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

ทฤษฎีบท 4.40. ให้ $f : A \to B$ และ $g: B \to A$ จะได้ว่า

$$g = f^{-1} \text{ ก็ต่อเมื่อ } gof = i_A \text{ และ } fog = i_B$$

พิสูจน์ ให้ $f : A \to B$ และ $g: B \to A$

($\to$) สมมติให้ $g = f^{-1}$ จะแสดงว่า $gof = i_A$ และ $fog = i_B$

จาก $g = f^{-1}$ จะได้ว่า $D_{gof} = D_f = A$ ให้ $x \in A$ จะได้ว่า $(x,f(x)) \in f$ ทำให้ $(f(x),x) \in f^{-1}$

ดังนั้น $(f(x),x) \in g$ ทำให้ $g(f(x))=x$ ดังนั้น $gof(x)=g(f(x))=x=i_A(x)$ สรุปได้ว่า $gof = i_A$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $fog = i_B$

($\leftarrow$)สมมติให้ $gof = i_A$ และ $fog = i_B$ จะแสดงว่า $g = f^{-1}$

โดยจะแสดงว่า $D_g = D_{f^{-1}}$ และ $g(s)= f^{-1}(s)$ ทุก $s \in D_g = B$

เราจะเริ่มต้นโดยการแสดงว่า $D_g = D_{f^{-1}}$

ให้ $x \in D_g = B$ จะได้ว่ามี $w \in A$ ซึ่ง $g(x)=w$ และ $fog(x)=i_B(x)=x$ นั่นคือ $f(g(x))=x$

จะได้ว่า $f(w)=x$ ดังนั้น $(x,w) \in f^{-1}$ ได้ว่า $x \in D_{f^{-1}}$ สรุปได้ว่า $D_g \subseteq D_{f^{-1}}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $D_{f^{-1}} \subseteq D_g$ ดังนั้น $D_g = D_{f^{-1}}$

ต่อไปจะแสดงว่า $g(s)= f^{-1}(s)$ ทุก $s \in D_g$

ให้ $s \in D_g = B$ จะได้ว่ามี $t \in A$ ซึ่ง $g(s)=t$ ดังนั้น $fog(s)=i_B(s)=s$

นั่นคือ $f(t)=s$ จะได้ว่า $(t,s) \in f$ ทำให้ $(s,t) \in f^{-1}$ นั่นคือ $f^{-1}(s)=t=g(s)$

สรุปได้ว่า $g = f^{-1}$ ❑

ตัวอย่าง 4.41. ให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = \frac{x}{2}$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $g = f^{-1}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = \frac{x}{2}$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ จะแสดงว่า $g = f^{-1}$

โดยทฤษฎีบทที่ 4.40. เราจะแสดงว่า $gof = i_A$ และ $fog = i_B$ โดยที่ $A=B=\mathbb{R}$

ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $gof(x)=g(f(x))=g(2x)=(2x)/2=x$

และ $fog(x)=f(g(x))=f(x/2)=2(x/2)=x$

จะได้ว่า $gof = i_A$ และ $fog = i_B$ สรุปว่า $g = f^{-1}$

ตัวอย่าง 4.42. ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{if } x \le 0 \\ 1-x^2 & \text{if } x > 0 \end{cases}$ และ

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{if } x \ge 1 \\ \sqrt{1-x} & \text{if } x < 1 \end{cases}$ จงแสดงว่า $g = f^{-1}$

วิธีทำ ทำเป็นแบบฝึกหัด

บทนิยาม 4.43. ให้ $f : A \rightarrow B$

จะกล่าวว่า f เป็น **การสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง** หรือ **หนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง**

(one - to- one correspondece หรือ bijection) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึง

ตัวอย่าง 4.44. ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x)= 6x-5$

วิธีทำ จากตัวอย่าง **4.27** และ **4.31** จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึง
ดังนั้น f เป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 4.45. ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งและ $g : B \rightarrow C$ เป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วจะได้ว่า 1. $gof : A \rightarrow C$ เป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

2. $f^{-1} : B \rightarrow A$ เป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ ใช้บทแทรก 4.37. และ ทฤษฎีบท 4.38. และ 4.39. ❑

4.4. อิมเมจ และอินเวอร์สอิมเมจของฟังก์ชัน

(Image and Inverse Image of Functions)

บทนิยาม 4.46. ให้ $f : A \to B$ และ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq B$

อิมเมจของ X ภายใต้ f (image of X under f) เขียนแทนด้วย f(X) คือเซต

$f(X) = \{ b \in B \mid \exists\, x \in X$ ซึ่ง $f(x) = b\}$

อินเวอร์สอิมเมจของ Y ภายใต้ f (inverse image of Y under f) เขียนแทนด้วย $f^{-1}(Y)$

คือเซต $f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$

ดังนั้นจะได้ว่า $f(X) \subseteq R_f$ และ $f(A) = R_f$ และ $f^{-1}(Y) \subseteq D_f$ และ $f^{-1}(B) = A$

ตัวอย่าง 4.47. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x)= |x+1|-1$ และให้ X=[-2,3] และ Y=[-1,0]

จงหา f(X), $f^{-1}(Y)$, f({2,-4}) และ $f^{-1}(\{-\frac{1}{2}\})$

วิธีทำ ให้ $b \in f(X)$ จะได้ว่ามี $x \in X=[-2,3]$ ซึ่ง $f(x)=b$ นั่นคือ $|x+1|-1=b$

พิจารณาแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1. $-1 \le x \le 3$ จะได้ว่า $b=|x+1|-1=x+1-1=x$ ดังนั้น $b \in [-1,3]$

กรณีที่ 2. $-2 \le x < -1$ จะได้ว่า $b=|x+1|-1= -x-1-1 = -x-2$ ดังนั้น $b \in (-1,0]$

นั่นคือ $b \in [-1,3] \cup (-1,0]= [-1,3]$ จะได้ว่า $f(X) \subseteq [-1,3]$

ในทางกลับกันให้ $b \in [-1,3]$ จะได้ว่า $f(b)=|b+1|-1=b$ ดังนั้น $b \in f(X)$ ทำให้

$[-1,3] \subseteq f(X)$ สรุปได้ว่า $f(X) = [-1,3]$ ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $f^{-1}(Y)=[-2,0]$

และ $f(\{2,- 4\})=\{f(2),f(-4)\}=\{2\}$ และ $f^{-1}(\{-\frac{1}{2}\})=\{(-1)/2, (-3)/2\}$ ❑

ทฤษฎีบท 4.48. กำหนดให้ $f : A \to B$

1. ถ้า $E \subseteq F \subseteq A$ แล้ว $f(E) \subseteq f(F)$ 2. ถ้า $C \subseteq D \subseteq B$ แล้ว $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

พิสูจน์ ให้ $f : A \to B$

1. สมมติให้ $E \subseteq F \subseteq A$ จะแสดงว่า $f(E) \subseteq f(F)$

ให้ $y \in f(E)$ จะได้ว่ามี $x \in E$ ซึ่ง $f(x)=y$

เนื่องจาก $E \subseteq F$ ดังนั้น $x \in F$ และ $y \in f(F)$ ได้ว่า $f(E) \subseteq f(F)$

2. สมมติให้ $C \subseteq D \subseteq B$ จะแสดงว่า $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

ให้ $x \in f^{-1}(C)$ ดังนั้น $f(x) \in C \subseteq D$ จะได้ว่า $x \in f^{-1}(D)$

สรุปได้ว่า $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$ ❑

ทฤษฎีบท 4.49. กำหนดให้ $f : A \to B$ และสำหรับแต่ละ $\alpha \in I$ ให้ $A_\alpha \subseteq A$ จะได้ว่า

1. $f(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
2. $f(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

พิสูจน์ ให้ $f : A \to B$ และสำหรับแต่ละ $\alpha \in I$ ให้ $A_\alpha \subseteq A$

1. จะแสดงว่า $f(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

ให้ y เป็นสมาชิกใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) &\leftrightarrow \text{ มี } x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \text{ ซึ่ง } f(x)=y \\ &\leftrightarrow \text{ มี } x \in A_\beta \text{ สำหรับบาง } \beta \in I \text{ ซึ่ง } f(x)=y \\ &\leftrightarrow y=f(x) \in f(A_\beta) \text{ สำหรับบาง } \beta \in I \\ &\leftrightarrow y \in \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $f(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

ทฤษฎีบท 4.50. กำหนดให้ $f : A \to B$ และสำหรับแต่ละ $\alpha \in I$ ให้ $B_\alpha \subseteq B$ จะได้ว่า

1. $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$
2. $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$

พิสูจน์ ให้ $f : A \to B$ และสำหรับแต่ละ $\alpha \in I$ ให้ $B_\alpha \subseteq B$

1. จะแสดงว่า $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$

ให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) &\leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \\ &\leftrightarrow f(x) \in B_\beta \text{ สำหรับบาง } \beta \in I \\ &\leftrightarrow x \in f^{-1}(B_\beta) \text{ สำหรับบาง } \beta \in I \\ &\leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

4.5. ฟังก์ชันคงสภาพอันดับ (Order Preserving Functions)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเซตอันดับสองเซต

บทนิยาม 4.51. ให้ $(A,\leq)$ และ $(B,\preceq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้ $f:A\longrightarrow B$ จะกล่าวว่า

1. f เป็น **ฟังก์ชันคงสภาพอันดับ(order preserving functions)** หรือ **ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing functions)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x, y ใด ๆ ใน A ถ้า $x\leq y$ แล้ว $f(x)\preceq f(y)$
2. f เป็น **ฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing functions)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x, y ใด ๆ ใน A ถ้า $x<y$ แล้ว $f(x)\prec f(y)$

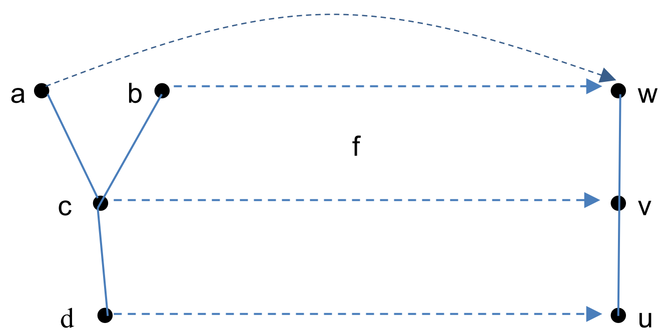
ตัวอย่าง 4.52. ให้ A={a,b,c,d} และ B={u,v,w} และกำหนด

$\leq$ = {(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(c,a),(c,b),(d,c),(d,a),(d,b)}$\subseteq A\times A$

$\preceq$= {(u,u),(v,v),(w,w),(u,w),(u,v),(v,w)}$\subseteq B\times B$

จะได้ว่า $\leq$ เป็นอันดับบางส่วนบน A และ $\preceq$เป็นอันดับบางส่วนบน B

กำหนด f ={(a,w),(b,v),(c,u),(d,u)} จะได้ว่า $f:A\longrightarrow B$ ดังรูป 4.3.



รูป 4.3.

จะเห็นว่า สำกรับ x, y ใด ๆ ใน A ถ้า $x\leq y$ แล้ว $f(x)\preceq f(y)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ

ตัวอย่าง 4.53. ให้ A={a,b,c} และ B={u,v,w}

$\leq$ ={(a,a),(b,b), (c,c),(c,a),(c,b)}

$\preceq$ ={(u,u),(v,v), (w,w),(w,u),(w,v)}

จะได้ว่า $(A, \leq)$ และ $(B, \preceq)$ เป็นอันดับบางส่วน

ให้ $f:A \rightarrow B$ ที่กำหนดโดย $f=\{(a,v),(b,c),(c,w)\}$
จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง และเป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ
และมีสมบัติว่า สำกรับ x, y ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x)\preceq f(y)$ แล้ว $x\leq y$

บทนิยาม 4.54. ให้ $(A,\leq)$ และ $(B,\preceq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้ $f:A\rightarrow B$
จะกล่าวว่า f เป็น **สมสัณฐานอันดับ (order isomorphism)** ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทั่วถึง
และ สำหรับ x, y ใด ๆ ใน A ถ้า $x\leq y$ แล้ว $f(x)\preceq f(y)$
และในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า A **สมสัณฐานอันดับ (order isomorphic)** กับ B
เขียนแทนด้วย $A\cong B$

ตัวอย่าง 4.55. ให้ $P=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{N}\}$และกำหนด $\preceq$ บน P ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $(a,b), (c,d)\in P$ $(a,b)\preceq(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a+d\leq b+c$

จะได้ว่า $(P,\preceq)$ เป็นอันดับบางส่วน

พิจารณาอันดับบางส่วน $(\mathbb{Z},\leq)$ และกำหนด $f:P\rightarrow\mathbb{Z}$ ดังนี้ $f((a,b))=a-b$
จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทั่วถึง
และ สำหรับ x, y ใด ๆ ใน A ถ้า $x\leq y$ แล้ว $f(x)\preceq f(y)$
ดังนั้น f เป็นสมสัณฐานอันดับ และ $P\cong A$

ทฤษฎีบท 4.56. ให้ $(A,\leq)$ และ $(B,\preceq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้ $f:A\rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง จะได้ว่า f เป็นสมสัณฐานอันดับ ก็ต่อเมื่อ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ

พิสูจน์ ให้ $(A,\leq)$ และ $(B,\preceq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน และให้ $f:A\rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง จะได้ว่า $f^{-1}(f(x))=x$ ทุก $x\in A$
$(\rightarrow)$ สมมติให้ f เป็นสมสัณฐานอันดับ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ
จะแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ ให้ $x,y\in B$ และ $x\preceq y$ จะแสดงว่า $f^{-1}(x)\leq f^{-1}(y)$
จาก $f:A\rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่า มี $u,v\in A$ ซึ่ง $f(u)=x$ และ $f(v)=y$

ดังนั้น f(u) $\preceq$f(v) จาก f เป็นสมสัณฐานอันดับ ทำให้ u$\leq$v

ดังนั้น $f^{-1}(x) = f^{-1}(f(u)) = u \leq v = f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(y)$ นั่นคือ $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$
สรุปได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ

($\leftarrow$) สมมติให้ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ

จะแสดงว่า f เป็นสมสัณฐานอันดับ ให้ x,y$\in$A จะได้ว่า x$\leq$y ก็ต่อเมื่อ f(x)$\preceq$f(y)

ดังนั้น f เป็นสมสัณฐานอันดับ ❑

ทฤษฎีบท 4.57. ให้ A, B และ C เป็นเซตอันดับบางส่วน จะได้ว่า
1. i_A เป็นสมสัณฐานอันดับ
2. ถ้า f:A$\rightarrow$B เป็นสมสัณฐานอันดับ แล้ว f^{-1}:B$\rightarrow$A เป็นสมสัณฐานอันดับ
3. ถ้า f:A$\rightarrow$B และ g:B$\rightarrow$C เป็นสมสัณฐานอันดับ แล้ว g$\circ$f :A$\rightarrow$C เป็นสมสัณฐานอันดับ

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาโดเมนและเรจน์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งให้เหตุผลว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

    1.1 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| = 1\}$

    1.2 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 \leq x\}$

    1.3 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 2x\}$

    1.4 $r = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x = y^2 + 1\}$

    1.5 $r = \{(\varnothing,\{\varnothing\}), (\{\varnothing\},\varnothing), (\varnothing,\varnothing)\}$

2. จงแสดงว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันพร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

    2.1 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{2-x}\}$

    2.2 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x/(x-1)\}$

    2.3 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x+1|\}$

3. ให้ $A = \{-1,0,1\}$ และ $B = \{2,4\}$ จงยกตัวอย่างความสัมพันธ์ $\varnothing \neq r \subseteq A \times B$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

    3.1 r ไม่เป็นฟังก์ชัน

    3.2 r เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

    3.3 r เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B โดยที่ $R_r = B$

    3.4 r เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B โดยที่ $R_r \neq B$

4. จงแสดงว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ไม่เป็นฟังก์ชัน

    4.1 $r = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 = y^2\}$

    4.2 $r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (y-8)^2 = x-1\}$

5. ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $\varnothing \neq A \subseteq \mathcal{U}$ และ χ_A เป็นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะบน A จงหา

    5.1 $\{x \in \mathcal{U} \mid \chi_A(x) = 1\}$

    5.2 $\{x \in \mathcal{U} \mid \chi_A(x) = 0\}$

    5.3 $\{x \in \mathcal{U} \mid \chi_A(x) = 2\}$

6. ให้ $f,g \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ จงอธิบายว่าทำไมฟังก์ชัน $f \neq g$ เมื่อกำหนดให้

    $f(x) = (1-x^2)/((x^2+1)(x+1))$ และ $g(x) = (1-x)/(x^2+1)$

7. จงหา fog และ gof สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนของฟังก์ชันประกอบด้วย

7.1 $f(x) = 2x+7$ และ $g(x) = 7-5x$

7.2 $f(x) = (x+1)/(x+2)$ และ $g(x) = x+1$

8. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ และกำหนด f+g และ fg ดังนี้

$f+g = \{(a,c+d) \mid (a,c)\in f$ และ $(a,d)\in g\}$ และ

$fg = \{(a,cd) \mid (a,c)\in f$ และ $(a,d)\in g\}$

จงพิสูจน์ว่า 8.1 $f + g$ และ fg เป็นฟังก์ชัน

8.2 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ และ $(fg)(x) = f(x)g(x)$

9. จงยกตัวอย่างฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 ฟังก์ชัน f และ g ที่ซึ่ง $fog(x) = (3x-6)^3$

9.2 ฟังก์ชัน f และ g ที่ซึ่ง $fog(x) = \cos(x^3+1)$

10. ให้ $g = \{(x,y)\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x+(1/x)\}$

จงหา g^{-1} และจงพิจารณาว่า g^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

11. ให้ $f(x) = 2-(1/x)$ ทุก $x\in\mathbb{R}$ จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f|_{[1,3]}$ และ $f|_{\{1,3\}}$

12. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $f\cap g \neq \varnothing$ แล้ว $f\cap g$ เป็นฟังก์ชัน

13. ให้ $f : A\rightarrow B$ และ $g : C\rightarrow D$ และ $A\cap C = E$

จงพิสูจน์ว่า $f\cup g$ เป็นฟังก์ชันจาก $A\cup C$ ไป $B\cup D$ ก็ต่อเมื่อ $f|_E = g|_E$

14. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง พร้อมทั้งพิสูจน์

14.1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x)=(x/2) +3$

14.2 $f : \mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ โดยที่ $f(x)= -x +10$

14.3 $f : \mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ โดยที่ $f(x)=(x,x+1)$

14.4 $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x,y) = x+y$

14.5 $f : \mathbb{R}\rightarrow[2,\infty)$ โดยที่ $f(x) = x^2+2$

14.6 $f : [2,3)\rightarrow[0,\infty)$ โดยที่ $f(x) = (x-2)/(3-x)$

15. ให้ $f : A\rightarrow B$ $g : C\rightarrow A$ และ $h : C\rightarrow A$ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $fog = foh$ แล้ว $g = h$

16. ให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

16.1 ถ้า $gof : A \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

16.2 ถ้า $gof : A \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

17. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $h : A \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $g : B \longrightarrow D$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $h \cup g : A \cup B \longrightarrow C \cup D$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

18. จงพิสูจน์ว่าถ้า $h : A \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและ $g : B \longrightarrow D$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $A \cap B = \varnothing$ และ $C \cap D = \varnothing$ แล้ว $h \cup g : A \cup B \longrightarrow C \cup D$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

19. จงยกตัวอย่างเซต A เซต B ฟังก์ชัน $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow A$ ที่ซึ่ง $gof = i_A$ และ $g \neq f^{-1}$

20. ให้ $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง จงพิสูจน์ว่า ถ้า $gof = i_A$ หรือ $fog = i_B$ แล้ว $g = f^{-1}$

21. 21.1 ให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $T \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$

21.2 ยกตัวอย่างค้านซึ่ง $T \not\subset f(f^{-1}(T))$

22. 22.1 ให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $S \subseteq A$ จงพิสูจน์ว่า $S \subseteq f^{-1}(f(S))$

22.2 ยกตัวอย่างค้านซึ่ง $f^{-1}(f(S)) \not\subseteq S$

23. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าเท็จให้ยกตัวอย่างค้าน

23.1 ถ้า $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $T \subseteq B$ แล้ว $f(f^{-1}(T)) = T$

23.2 ถ้า $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $S \subseteq A$ แล้ว $S = f^{-1}(f(S))$

24. ให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $C \subseteq A$ และ $D \subseteq A$ จงพิสูจน์ว่า $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

25. ให้ $(A, \leq)$ และ $(B, \preceq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน จงพิสูจน์

ถ้า $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

26. ให้ $(A, \leq)$ และ $(B, \preceq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน จงพิสูจน์

ถ้า $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ และ $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ แล้ว gof เป็นฟังก์ชันคงสภาพอันดับ

เอกสารอ้างอิงบทที่ 4

1. รุ่งนภา ภักดีสู่สุข, แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
2. Krantz, S.G., The Elements of Advanced Mathematics, CRC Press, Inc.,1995.
3. Smith, D., Eggen, M., Andre, R. St., A Transition to Advanced Mathematics, 4th edition, Brooks / Cole Publishing Company, 1997.
4. Stewart ,T. , The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.
5. Sundstrom, T., Mathematical Reasoning Writing and Proof, Prentice Hall, Inc., 2001.
6. Wohlgemuth, Introduction to Proof in Abstract Mathematics, Saunders College Publishing,1990.

การจัดการเรียนการสอน

บทที่ 5 เรื่อง เซตจำกัดและเซตอนันต์

กระบวนวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
(Fundamental Concepts of Mathematics)

ชื่อผู้สอน อาจารย์ ดร. สายัญ ปันมา

เวลาที่ใช้ 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถพิสูจน์สมบัติเบื้องต้นของเซตจำกัดและเซตอนันต์ได้
2. นักศึกษาสามารถตรวจสอบว่าเซตที่กำหนดให้เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์ได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. แบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัด
3. ตัวแทนแต่ละกลุ่มนำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
2. กระดาษ และปากกา
3. เครื่องฉายทึบแสง

บทที่ 5

เซตจำกัดและเซตอนันต์ (Finite and Infinite Sets)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึง บทนิยามของเซตจำกัดและเซตอนันต์ ซึ่งเป็นการแบ่งเซตออกเป็น 2 ชนิดคือ เซตจำกัดและเซตอนันต์ จากนั้นเราจะศึกษาสมบัติของเซตจำกัดและเซตอนันต์ ดังกล่าว

5.1. บทนิยามของเซตจำกัดและเซตอนันต์ (Definitions of Finite and Infinite Sets)

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาการเปรียบเทียบเซตในรูปของการเท่ากัน นั่นคือ $A=B \leftrightarrow [x \in A \leftrightarrow x \in B]$ ส่วนการเปรียบเทียบเซตสองเซตอีกแบบหนึ่ง คือการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งมีนิยามดังนี้

บทนิยาม 5.1. ให้ A และ B เป็นเซต จะกล่าวว่า

1. A **สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence)** กับ B
   ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน f จาก A ไป B ที่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทั่วถึง
   เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \approx B$
   นั่นคือ $A \approx B \leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทั่วถึง
2. A มี **จำนวนเชิงการนับ (cardinal number)** เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $A \approx B$

** A ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับ B ก็ต่อเมื่อ ไม่มีฟังก์ชัน f จาก A ไป B ที่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทั่วถึง
เขียนแทนด้วย $A \not\approx B$

ตัวอย่าง 5.2. พิจารณาเซตต่อไปนี้

1. $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b,c,d\}$
   ให้ $f : A \rightarrow B$ กำหนดโดย $f(1)=a$ $f(2)=b$ $f(3)=c$ และ $f(4)=d$
   จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง ดังนั้น $A \approx B$
2. $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b,c\}$
   จะเห็นว่า ถ้า $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
   ดังนั้น $A \not\approx B$
3. $A=\{1,2,3,4,...,20\}$ $B=\{2,4,6,8,...,40\}$
   ให้ ให้ $f : A \rightarrow B$ กำหนดโดย $f(n)=2n$ จะได้ว่า เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง
   ดังนั้น $A \approx B$

ตัวอย่าง 5.3. ให้ E เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกคู่ จงแสดงว่า $\mathbb{N} \approx E$

วิธีทำ ให้ E เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกคู่

กำหนด f : $\mathbb{N} \to E$ โดยที่ $f(n)=2n$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

นั่นคือ $f(1)=2\times1=2$

$f(2)=2\times2=4$

$f(3)=2\times3=6$

$\vdots$

$f(n)=2n$

$\vdots$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $m,n \in \mathbb{N}$ และ $f(m)=f(n)$ จะได้ว่า $2m=2n$ ทำให้ $m=n$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $y \in E$ จะได้ว่า y เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $y=2k$

นั่นคือจะมี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $f(k)=2k=y$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ❏

** ทำนองเดียวกันถ้าให้ D เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ แล้ว $\mathbb{N} \approx D$

ตัวอย่าง 5.4. **1.** ให้ r เป็นจำนวนจริง และ $r>0$ และให้ $g:(0,1) \to (0, r)$
โดยที่ $g(x)=rx$ ทุก $x \in (0,1)$
จงแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง (นั่นคือ $(0,1) \approx (0, r)$ ทุก $r \in R^+$)

วิธีทำ ให้ r เป็นจำนวนจริง และ $r>0$ และให้ $g:(0,1) \to (0, r)$ โดยที่ $g(x)=rx$ ทุก $x \in (0,1)$

ให้ $x,w \in (0,1)$ และ $g(x)=g(w)$ ดังนั้น $rx=rw$

เนื่องจาก $r \neq 0$ ทำให้ $x=w$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $y \in (0,r)$ เลือก $x = y/r$

จะได้ว่า $0<x<1$ และ $g(x)=g(y/r)=r(y/r)=y$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

นั่นคือ $(0,1) \approx (0, r)$

2. จงแสดงว่า $[01] \approx [2,5]$

วิธีทำ กำหนดฟังก์ชัน $f : [0,1] \longrightarrow [2,5]$ โดยที่ $f(x) = 3x+2$ ทุก $x \in [0,1]$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทั่วถึง

ให้ $a,b \in [0,1]$ และ $f(a)=f(b)$

จะได้ว่า $3a+2=3b+2$

ดังนั้น $a=b$

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $y \in [2,5]$

เลือก $x = (y-2)/3$ จะได้ว่า $x \in [0,1]$

และจะเห็นว่า $f(x)= f((y-2)/3)=3((y-2)/3)+2= y$

ดังนั้นจะมี $x \in [0,1]$ ซึ่ง $f(x)=y$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ❑

ทฤษฎีบท 5.5. ให้ A, B และ C เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \approx A$
2. ถ้า $A \approx B$ แล้ว $B \approx A$
3. ถ้า $A \approx B$ และ $B \approx C$ แล้ว $A \approx C$

พิสูจน์

1. จะเห็นว่า $i_A : A \longrightarrow A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง
   ดังนั้น $A \approx A$
2. ให้ $A \approx B$ ดังนั้นจะมี $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง
   จะได้ว่า $f^{-1} : B \longrightarrow A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง
   นั่นคือ $B \approx A$
3. ให้ $A \approx B$ และ $B \approx C$
   ดังนั้นจะมี $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง
   และ $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง ทำให้ $gof : A \longrightarrow C$
   ดังนั้น $A \approx C$ ❑

ตัวอย่าง 5.6. จาก $\mathbb{N}\approx E$ ดังนั้น $E\approx\mathbb{N}$

จาก $E\approx\mathbb{N}$ และ $\mathbb{N}\approx D$ จะได้ว่า $E\approx D$

โดยสามัญสำนึก เราคุ้นเคยกับเซตจำกัดและเซตอนันต์เป็นอย่างดี แต่เรายังไม่ได้กำหนดนิยามตามหลักการของเซตออกมา ในที่นี้เราจะได้คำจำกัดความของเซตจำกัดและเซตอนันต์

บทนิยาม 5.7. สำหรับแต่ละ $k\in \mathrm{N}$ กำหนด $\mathrm{N}_k=\{1,2,...,k\}$ เราจะกล่าวว่า
1. A เป็น **เซตจำกัด** ก็ต่อเมื่อ $A=\varnothing$ หรือ มีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $A\approx \mathrm{N}_k$
2. A เป็น **เซตอนันต์** ก็ต่อเมื่อ A ไม่เป็นเซตจำกัด

** ถ้า $A\approx \mathrm{N}_k$ แล้ว เราจะกล่าวว่า A มี **จำนวนเชิงการนับ (cardinal number)** k
หรือกล่าวว่า A มี **ภาวะเชิงการนับ (cardinality)** k เขียนแทนด้วย card(A)=k
สำหรับเซตว่างเรากำหนดให้ มีภาวะเชิงการนับ 0 นั่นคือ $\mathrm{card}(\varnothing)=0$

5.2.สมบัติของเซตจำกัดและเซตอนันต์ (Properties of Finite and Infinite Sets)

ทฤษฎีบท 5.8. ให้ $A\neq\varnothing$ เป็นเซตจำกัด และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า
ถ้า $A\approx B$ แล้ว B เป็นเซตจำกัด และ card(A)= card(B)
พิสูจน์ ให้ $A\neq\varnothing$ และ A เป็นเซตจำกัด และ $A\approx B$
ดังนั้นจะมี $k\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $A\approx N_k$ จาก $A\approx B$ จะได้ว่า $B\approx N_k$
ดังนั้น B เป็นเซตจำกัด และ card(A)=k= card(B) ❑

** โดย ทฤษฎีบท 5.8. สำหรับเซตจำกัด $A\neq\varnothing$ และเซตใด ๆ B
เราจะได้ว่า ถ้า B ไม่เป็นเซตจำกัด หรือ $\mathrm{card}(A)\neq\mathrm{card}(B)$ แล้ว $A\not\approx B$

บทตั้ง 5.9. ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $x\notin A$
แล้ว $A\cup\{x\}$ เป็นเซตจำกัด $\mathrm{card}(A\cup\{x\})=\mathrm{card}(A)+1$
พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตจำกัด และ $x\notin A$
ถ้า $A=\varnothing$ จะได้ว่า card(A)=0 และ $A\cup\{x\}=\{x\}\approx N_1$
ดังนั้น $A\cup\{x\}$ เป็นเซตจำกัด $\mathrm{card}(A\cup\{x\})=1=\mathrm{card}(A)+1$

ถ้า $A \neq \varnothing$ จะได้ว่ามี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $A \approx N_k$ ทำให้ card(A)=k

และมีฟังก์ชัน $f : A \longrightarrow N_k$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

กำหนด $g : A \cup \{x\} \longrightarrow N_{k+1}$ โดยที่

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & , t \in A \\ k+1 & , t = x \end{cases}$$

จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $u,v \in A \cup \{x\}$ และ $u \neq v$

ถ้า $u,v \in A$ จาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $f(u) \neq f(v)$

นั่นคือ $g(u) \neq g(v)$

ถ้า $u \in A$ และ $v=x$ จะได้ว่า $g(u)=f(u) \in N_k$ และ $g(v)=k+1$

ดังนั้น $g(u) \neq g(v)$

สรุปได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $n \in N_{k+1}$

ถ้า $n \in N_k$ จาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $t \in A \subseteq A \cup \{x\}$ ซึ่ง $g(t)=f(t)=n$

ถ้า $n=k+1$ จะได้ว่ามี $x \in A \cup \{x\}$ ซึ่ง $g(x)=k+1=n$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง ทำให้ $A \cup \{x\} \approx N_{k+1}$

ดังนั้น $A \cup \{x\}$ เป็นเซตจำกัด $card(A \cup \{x\})=k+1= card(A)+1$ ❑

บทตั้ง 5.10. สำหรับแต่ละ $m \in \mathbb{N}$ ถ้า $A \subseteq N_m$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด และ $card(A) \leq m$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน m

สำหรับ $m \in \mathbb{N}$ กำหนด P(m) แทนข้อความ ถ้า $A \subseteq N_m$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด และ $card(A) \leq m$

ขั้นฐาน จะแสดงว่า P(1) เป็นจริง

จะเห็นว่า ถ้า $A \subseteq N_1$ แล้ว $A=\varnothing$ หรือ $A=\{1\}$

ดังนั้นจะได้ว่า A เป็นเซตจำกัด และ $card(A) \leq 1$

ทำให้ P(1) เป็นจริง

ขั้นอุปนัย จะแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติให้ P(k) เป็นจริง นั่นคือ ถ้า $A \subseteq N_k$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด และ $card(A) \leq k$

จะแสดงว่า ถ้า $A\subseteq N_{k+1}$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด และcard(A) $\leq$ k+1

ให้ $A\subseteq N_{k+1}$ จะได้ว่า A-{k+1}$\subseteq N_k$

จาก P(k) เป็นจริง ทำให้ A-{k+1} เป็นเซตจำกัด และcard(A-{k+1}) $\leq$ k

เราจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1. ถ้า k+1$\in$A จะได้ว่า A=(A-{k+1})$\cup${k+1}

โดยบทตั้ง 5.9 จะได้ว่า A เป็นเซตจำกัด และcard(A)= card(A-{k+1})+1 $\leq$k+1

กรณีที่ 2. ถ้า k+1$\notin$A จะได้ว่า A=A-{k+1}$\subseteq N_k$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า A เป็นเซตจำกัด และcard(A) $\leq$k$\leq$ k+1

สรุปได้ว่า P(k+1) เป็นจริง

ดังนั้น ข้อความ P(m) เป็นจริงทุก $m\in\mathbb{N}$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $m\in\mathbb{N}$ ถ้า $A\subseteq N_m$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด และ card(A) $\leq$ m ❑

ทฤษฎีบท 5.11. ถ้า S เป็นเซตจำกัด และ A $\subseteq$ S

แล้ว A เป็นเซตจำกัด และ card(A) $\leq$ card(S)

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซตจำกัด และ A $\subseteq$ S

ถ้า A=$\varnothing$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด และ card(A)=0 $\leq$ card(S)

ถ้า A$\neq\varnothing$ จาก A $\subseteq$ S ทำให้ S$\neq\varnothing$

เนื่องจาก S เป็นเซตจำกัด จะได้ว่ามี $k\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $S\approx N_k$

ดังนั้น card(S)=k และมี f : S$\rightarrow N_k$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

เนื่องจาก A $\subseteq$ S ดังนั้น f(A)$\subseteq N_k$

กำหนด g : A$\rightarrow$f(A) โดยที่ g(x)=f(x) ทุก x$\in$A

อันดับแรกจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ x,y$\in$A และ g(x)=g(y)

โดยการกำหนดฟังก์ชัน g จะได้ว่า f(x)=f(y)

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า x=y

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ y$\in$f(A) ดังนั้นจะมี a$\in$A ซึ่ง f(a)=y

นั่นคือ g(a)=y ทำให้ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

ดังนั้น A$\approx$f(A) เนื่องจาก f(A)$\subseteq N_k$

โดยบทตั้ง 5.10 จะได้ว่า f(A) เป็นเซตจำกัด และcard(f(A)) $\leq$ k

โดยทฤษฎีบท 5.8 จะได้ว่า A เซตจำกัด และ card(A)=card(f(A)) $\leq$ k= card(S) ❑

จากบทตั้ง 5.3 เราทราบว่า ถ้าเราเติมสมาชิกภายนอกเซตเข้าไปในเซตจำกัด 1 ตัว จะทำให้เพิ่มจำนวนเชิงการนับอีก 1 ตัว และบทแทรกต่อไปบอกให้เราทราบว่า ถ้าเรานำสมาชิกหนึ่งตัวออกจากเซตจำกัดจะทำให้จำนวนเชิงการนับลดลงหนึ่งด้วย

บทแทรก 5.12. ถ้า A เป็นเซตจำกัดและ $x\in A$

แล้ว A-{x}เป็นเซตจำกัดและ card(A-{x})= card(A)-1

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตจำกัดและ $x\in A$ ดังนั้น $A-\{x\}\subseteq A$

โดยทฤษฎีบท 5.11 จะได้ว่า A-{x} เป็นเซตจำกัด

เนื่องจาก $x\notin A-\{x\}$ โดยบทตั้ง 5.9 จะได้ว่า

$\text{card}(A)=\text{card}((A-\{x\})\cup\{x\})=\text{card}(A-\{x\})+1$

ดังนั้น card(A-{x})= card(A)-1 ❑

บทแทรก 5.13. ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้ว $A\not\approx B$ สำหรับทุก $B\subset A$

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตจำกัด และ $B\subset A$

เนื่องจาก $B\subset A$ ดังนั้นจะมี $x\in A-B$ นั่นคือ $B\subseteq A-\{x\}$

โดยทฤษฎีบท 5.11 จะได้ว่า $\text{card}(B)\leq\text{card}(A-\{x\})=\text{card}(A)-1$

ดังนั้น card(B) < card(A)

โดยทฤษฎีบท 5.8 จะได้ว่า $A\not\approx B$ ❑

ทฤษฎีบท 5.14. (The Piegeonhole Principle) ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด

ถ้า card(A) > card(B) แล้ว สำหรับทุกฟังก์ชัน $f: A\rightarrow B$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด และ card(A) > card(B)

จะพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่

นั่นคือจะแสดงว่า ถ้ามี $f : A\rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $\text{card}(A)\leq\text{card}(B)$

สมมติให้ $f : A\rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กำหนด $g : A\longrightarrow f(A)$ โดยที่ g(x)=f(x) ทุก $x\in A$

ทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 5.11

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

ดังนั้น $A\approx f(A)$ ทำให้ card(A)=card(f(A))

จาก $f(A) \subseteq B$ จะได้ว่า $card(f(A)) \leq card(B)$

ทำให้ $card(A) \leq card(B)$

สรุป ถ้ามี $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $card(A) \leq card(B)$

นั่นคือ ถ้า $card(A) > card(B)$ แล้ว สำหรับทุกฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ❑

บทแทรก 5.15. ถ้ามีเซตย่อยแท้ B ของ A ซึ่ง $A \approx B$ แล้ว A เป็นเซตอนันต์

พิสูจน์ ให้ B เป็นเซตย่อยแท้ของ A ซึ่ง $A \approx B$ จะแสดงว่า A เป็นเซตอนันต์

สมมติว่า A เป็นเซตจำกัด

โดย บทแทรก 5.13 จะได้ว่า $A \not\approx B$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น A เป็นเซตอนันต์ ❑

ตัวอย่าง 5.16 1. จาก ตัวอย่าง 5.3. เราทราบว่า $\mathbb{N} \approx E$ และ $E \subset \mathbb{N}$

โดยบทแทรก 5.15. จะได้ว่า $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์

2. จาก ตัวอย่าง 5.4 ทราบว่า $(0,1) \approx (0,1/3)$ และ $(0,1/3) \subset (0,1)$

โดยบทแทรก 5.15 จะได้ว่า (0,1) เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 5.17. ให้ A และ B เป็นเซต จะได้ว่า

1. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \approx B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์
2. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subseteq B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

พิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซต จะ

1. ให้ A เป็นเซตอนันต์ และ $A \approx B$

จะแสดงว่า B เป็นเซตอนันต์

สมมติว่า B เป็นเซจจำกัด จาก $A \approx B$

โดยทฤษฎีบท 5.8 จะได้ว่า A เป็นเซตจำกัด

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น B เป็นเซตอนันต์

2. ให้ A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subseteq B$

จะแสดงว่า B เป็นเซตอนันต์

สมมติว่า B เป็นเซจจำกัด จาก $A \subseteq B$

โดยทฤษฎีบท 5.11 จะได้ว่า A เป็นเซตจำกัด

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น B เป็นเซตอนันต์ ❑

ตัวอย่าง 5.18. 1. จากที่เราทราบว่า $\mathbb{N} \approx E$ และ $\mathbb{N} \approx D$ และ $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์

โดยทฤษฎีบท 5.17 ข้อ 1 จะได้ว่า D และ E เป็นเซตอนันต์ด้วย

2. เนื่องจาก $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ และ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ และ $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ และ $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์

โดยทฤษฎีบท 5.17 ข้อ 2 ดังนั้น $\mathbb{Z}$ และ $\mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตอนันต์

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. ให้ a,b,c และ d เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า ช่วงเปิด $(a,b)\approx(c,d)$

2. ให้ $A\subset\mathcal{U}$ และ $x\in\mathcal{U}$ จะพิสูจน์ว่า $A\times\{x\}\approx A$

3. ให้ A,B,C และ D เป็นเซต จงพิสูจน์

    3.1 ถ้า $A\approx B$ และ $C\approx D$ แล้ว $A\times C\approx B\times D$

    3.2 ถ้า $A\approx B$ และ $C\approx D$ และ $A\cap C=\varnothing$ และ $B\cap D=\varnothing$ แล้ว $A\cup C\approx B\cup D$

4. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตจำกัด

    4.1 $\{(x,1-3x) \mid x\in N_5\}$

    4.2 $\{(x,x^2) \mid x\in\{-2,-1,0,1\}\}$

    4.3 $\{a,b,c\}\cup\{-1,1\}$

5. จงแสดงว่า ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ B เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A\cap B$ เป็นเซตจำกัด

6. จงพิสูจน์ $A\cup B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตจำกัด

7. จงพิสูจน์ว่า $N_m\times N_n$ เป็นเซตจำกัด ทุก ๆ $m,n\in\mathbb{N}$

9. ให้ A และ B เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า

    9.1 ถ้า A หรือ B เป็นเซตอนันต์ แล้ว $A\cup B$ เป็นเซตอนันต์

    9.2 ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว A-B เป็นเซตอนันต์

10. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์

    10.1 เซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่หารด้วย 5 ลงตัว

    10.2 $\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m+n=100\}$

11. ให้ $B\subseteq\mathbb{N}$ และ $b\in\mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

    ถ้า B เป็นเซตอนันต์ แล้วจะมี $x\in B$ ซึ่ง $x>b$

12. ให้ $B\neq\varnothing$ เป็นเซตจำกัด และ $f : B\longrightarrow A$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

    จงพิสูจน์ว่า มีฟังก์ชัน $h : A\longrightarrow B$ ที่ทำให้ $foh=i_A$ และ h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เอกสารอ้างอิงบทที่ 5

1. รุ่งนภา ภักดีสู่สุข, แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
2. Krantz, S.G., The Elements of Advanced Mathematics, CRC Press, Inc.,1995.
3. Smith, D., Eggen, M., Andre, R. St., A Transition to Advanced Mathematics, 4th edition, Brooks / Cole Publishing Company, 1997.
4. Stewart ,T. , The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.

การจัดการเรียนการสอน

บทที่ 6 เรื่อง เซตนับได้และเซตนับไม่ได้

กระบวนวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
(Fundamental Concepts of Mathematics)

ชื่อผู้สอน อาจารย์ ดร. สายัญ ปันมา

เวลาที่ใช้ 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถพิสูจน์สมบัติเบื้องต้นของเซตนับได้และเซตนับไม่ได้
2. นักศึกษาสามารถตรวจสอบว่าเซตที่กำหนดให้เป็นเซตนับได้หรือเซตนับไม่ได้ได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. แบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัด
3. ตัวแทนแต่ละกลุ่มนำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์
2. กระดาษ และปากกา
3. เครื่องฉายทึบแสง

บทที่ 6
เซตนับได้และเซตนับไม่ได้
(Countable Sets and Uncountable Sets)

ในบทนี้เราจะให้บทนิยามของเซตนับได้และเซตนับไม่ได้และศึกษาสมบัติของเซตนับได้และให้ตัวอย่างของเซตนับไม่ได้และภาวะเชิงการนับของเซตนับไม่ได้ดังกล่าว

6.1. บทนิยามของเซตนับได้และเซตนับไม่ได้
(Definitions of Countable and Uncountable Sets)

ในหัวข้อนี้เราจะแบ่งเซตออกเป็นสองชนิดคือ **เซตนับได้ (Countable Set)** และเซตนับไม่ได้ **(Uncountable Set)**

บทนิยาม 6.1. จำนวนเชิงการนับหรือภาวะเชิงการนับของเซต $\mathbb{N}$ กำหนดโดย $\aleph_0$ (อ่านว่า **อเล็บศูนย์ aleph zero**) ดังนั้น card(N) = $\aleph_0$

บทนิยาม 6.2. ให้ A เป็นเซต เรากล่าวว่า

1. A เป็น **เซตอนันต์นับได้ (Countable infinite set)** ถ้า $A\approx\mathbb{N}$
   กรณีนี้เราเขียน card(A) = $\aleph_0$
2. A เป็น **เซตนับได้** ถ้า A เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์นับได้
3. A เป็น **เซตนับไม่ได้** ถ้า A ไม่เป็นเซตจำกัดและไม่เป็นเซตอนันต์นับได้

ตัวอย่าง 6.3. ให้ E เป็นเซตจำนวนเต็มบวกคู่ และ D เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกคี่ เนื่องจาก $E\approx\mathbb{N}$ และ$D\approx\mathbb{N}$ ดังนั้น E และ D เป็นเซตอนันต์นับได้ และ card(D) = card(E) = $\aleph_0$

ตัวอย่าง 6.4. เซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์นับได้

พิสูจน์ ให้ E แทนเซตของจำนวนคู่ และ D แทนเซตของจำนวนคี่

กำหนด f : $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z}$ โดยที่

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & , n\in E \\ (1-n)/2 & , n\in D \end{cases}$$

นั่นคือ $f(1)=0, f(3) = -1, f(5)= -2 , f(7) = -3, \ldots$

และ $f(2)=1, f(4) = 2, f(6)= 3 ,f(8)=4, \ldots$

จะเห็นว่า ถ้า $n\in E$ จะได้ว่า $f(n)>0$ และ ถ้า $n\in D$ จะได้ว่า $f(n)\leq 0$

อันดับแรกจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $m,n\in\mathbb{N}$ และ $f(m)=f(n)$

ดังนั้นจะได้ว่า $m,n\in E$ หรือ $m,n\in D$ เพราะถ้าไม่เช่นนั้นแล้วจะทำให้ $f(m)\neq f(n)$

ถ้า $m,n\in E$ จาก $f(m)=f(n)$ จะได้ว่า $(m/2)=(n/2)$ ทำให้ $m=n$

ถ้า $m,n\in D$ จาก $f(m)=f(n)$ จะได้ว่า $((1-m)/2)=((1-n)/2)$ ทำให้ $m=n$

สรุป f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $y\in\mathbb{Z}$ จะพิจารณาแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณี 1. ถ้า $y>0$ จะได้ว่า $2y\in E$ เลือก $x=2y$ จะได้ว่า $f(x)=f(2y)=(2y)/2=y$

กรณี 2. ถ้า $y\leq 0$ จะได้ว่า $-2y\in E$ ดังนั้น $1-2y= -2y+1\in D$ เลือก $x= 1-2y$

จะได้ว่า $f(x)= f(1-2y)=(1-(1-2y))/2=y$

จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง ทำให้ $\mathbb{N}\approx\mathbb{Z}$

ดังนั้น $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์นับได้ ❑

ตัวอย่าง 6.5. เซต N_k โดยที่ $k\in\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์นับได้ และเป็นเซตจำกัด

ตัวอย่าง 6.6. เซต $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, D, E เป็นเซตนับได้ และเป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 6.7. เซตของจำนวนตรรกยะบวก $\mathbb{Q}^+$ เป็นเซตอนันต์นับได้

พิสูจน์ พิจารณาแผนภาพจำนวนตรรกยะใน 2 มิติ ดังตารางต่อไปนี้

	1	2	3	4	5	6	…
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	…
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	…
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	…
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	…
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	…
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

ให้ f : $\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ กำหนดตามลูกศร เริ่มจากมุมด้านซ้ายสุดของแถวที่ 1 แล้วเลื่อนไปตามลูกศรตามลำดับ

1. ให้ f(1)=1/1 (ผลบวกของเศษส่วนเป็น 2)
2. ให้ f(2)= 2/1 และ f(3)= 1/2 (ผลบวกของเศษส่วนเป็น 3)
3. ให้ f(4)=1/3 f(5)=3/1 ข้าม 2/2 เพราะ 2/2=1/1 (ผลบวกเศษส่วนเป็น 4)

   เราจะข้ามเศษส่วนที่ไม่อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ

   ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

ดังนั้น $\mathbb{N}\approx\mathbb{Q}^+$ และ card($\mathbb{Q}^+$)=$\aleph_0$ ทำให้ $\mathbb{Q}^+$ เป็นเซตอนันต์นับได้ ❑

6.2 สมบัติของเซตนับได้ (Properties of Countable Sets)

ทฤษฎีบท 6.8. ถ้า A เป็นเซตอนันต์นับได้ แล้ว $A\cup\{x\}$ เป็นเซตอนันต์นับได้

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตอนันต์นับได้ จะได้ว่ามีฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}\to A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง เราจะพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1. ถ้า $x\in A$ จะได้ว่า $A\cup\{x\}=A$ เป็นเซตอนันต์นับได้

กรณีที่ 2. ถ้า $x\notin A$ กำหนด $g:\mathbb{N}\to A\cup\{x\}$ โดยที่ $g(n)=\begin{cases} x & , n=1 \\ f(n-1) & , n>1 \end{cases}$

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง ดังนั้น $\mathbb{N}\approx A\cup\{x\}$

จะได้ว่า $A\cup\{x\}$ เป็นเซตอนันต์นับได้ ❑

ทฤษฎีบท 6.9. ถ้า A เป็นเซตอนันต์นับได้ และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $A\cup B$ เป็นเซตอนันต์นับได้

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.10. ถ้า A และ B เป็นเซตอนันต์นับได้ และ $A\cap B=\varnothing$ แล้ว $A\cup B$ เป็นเซตอนันต์นับได้

พิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตอนันต์นับได้ และ $A\cap B=\varnothing$

จาก A และ B เป็นเซตอนันต์นับได้ จะได้ว่ามี $f:\mathbb{N}\to A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

และ $g:\mathbb{N}\to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

กำหนด $h:\mathbb{N}\to A\cup B$ โดยที่ $h(n)=\begin{cases} f((n+1)/2) & , n\in D \\ g(n/2) & , n\in E \end{cases}$

จะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

ดังนั้น $\mathbb{N}\approx A\cup B$ ทำให้ $A\cup B$ เป็นเซตอนันต์นับได้ ❑

ทฤษฎีบท 6.11. ทุกเซตย่อยของ $\mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{N}$ จะแสดงว่า A เป็นเซตนับได้

ถ้า A เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า A เป็นเซตนับได้

สมมติว่า A เป็นเซตอนันต์ กำหนด $g : \mathbb{N} \to A$ โดยที่

g(1)=สมาชิกน้อยสุดของ A

g(2)=สมาชิกน้อยสุดของ A-{g(1)}

g(3)=สมาชิกน้อยสุดของ A-{g(1),g(2)}

$\vdots$

g(n)=สมาชิกน้อยสุดของ A-{ g(1),g(2),…,g(n-1)}

$\vdots$

เนื่องจาก A เป็นเซตอนันต์จะได้ว่า A-{ g(1),g(2),…,g(n)} $\neq \emptyset$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

และโดยทฤษฎีบท 3.31 จะได้ว่า A-{ g(1),g(2),…,g(n)} มีสมาชิกน้อยสุด ทุก $n \in \mathbb{N}$

ขั้นแรกจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $m,n \in \mathbb{N}$ และ m<n จะได้ว่า $g(m) \in$ {g(1),g(2),…,g(n-1)} และ

g(n)=สมาชิกต่ำสุดของ A-{ g(1),g(2),…,g(n-1)} ดังนั้น $g(m) \neq g(n)$

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $a \in A$ ถ้า a เป็นสมาชิกน้อยสุดของ B แล้วจะได้ว่ามี $1 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง f(1)=a

ถ้า a ไม่เป็นสมาชิกน้อยสุดของ B จะได้ว่า $K=\{x \in B \mid x<a\}$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น card(K)=m บาง $m \in \mathbb{N}$ และเราสามารถเรียงสมาชิกของ K จากน้อยไปมาก

เป็น $k_1<k_2<\ldots<k_m<a$ จะได้ว่า $g(i)=k_i$ ทุก i=1,2,…,m

จะได้ว่า a=สมาชิกน้อยสุดของ A-{ g(1),g(2),…,g(m+1)}

นั่นคือมี $m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง g(m) =สมาชิกน้อยสุดของ A-{ g(1),g(2),…,g(m+1)}=a

สรุปได้ว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง ทำให้ A เป็นเซตนับได้ ❏

ทฤษฎีบท 6.12. ถ้า A เป็นเซตนับได้ และ $B \subseteq A$ แล้ว B เป็นเซตนับได้

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตนับได้ และ $B \subseteq A$

ถ้า B เป็นเซตจำกัด จะได้ B เป็นเซตนับได้

สมมติว่า B เป็นเซตอนันต์ จะแสดงว่า B เป็นเซตนับได้

จาก $B \subseteq A$ จะได้ว่า A เป็นเซตอนันต์นับได้

จะได้ว่ามี $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง

จาก $B \subseteq A$ จะได้ว่า $B \approx f(B)$ และ $f(B) \subseteq \mathbb{N}$

จาก B เป็นเซตอนันต์ จะได้ว่า f(B) เป็นเซตอนันต์นับได้

ดังนั้น B เป็นเซตอนันต์นับได้ นั่นคือ B เป็นเซตนับได้ ❑

6.3. ตัวอย่างของเซตนับไม่ได้ และภาวะเชิงการนับ
(Examples of Uncountable Sets and Cardinality)

สำหรับจำนวนจริง $a \in (0,1)$ สามารถเขียนในรูป

ทศนิยม $a = 0.\,a_1a_2a_3a_4\ldots$ โดยที่ a_i เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq a_i \leq 9$

เช่น $\frac{5}{12} = 0.416666\ldots$

$\frac{5}{26} = 0.19223076923076923076 9\ldots$

จำนวนจริงบางจำนวนเขียนเป็นทศนิยมได้มากกว่าหนึ่งแบบ

เช่น 0.2 = 0.200000... = 0.1999999... (พิสูจน์ได้โดยอนุกรมเรขาคณิต)

** จะเรียกทศนิยม $0.\,a_1a_2a_3a_4\ldots$ ว่าทศนิยมแบบบรรทัดฐาน ก็ต่อเมื่อ ไม่มี k ที่ทำให้ $a_n=9$ ทุก $n>k$

เช่น 0.199999... ไม่เป็นทศนิยมแบบบรรทัดฐาน

ดังนั้นจำนวนจริงที่แทนด้วยทศนิยมแบบบรรทัดฐาน 2 จำนวนเท่ากันก็ต่อเมื่อ จำนวนทั้งสองมีทศนิยมตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

ทฤษฎีบท 6.13. ช่วงเปิด (0,1) เป็นเซตนับไม่ได้

พิสูจน์ เนื่องจาก {1/2, 1/3, 1/4, 1/5,…} เป็นเซตย่อยของ (0,1) ดังนั้น (0,1) เป็นเซตอนันต์ จะแสดงว่า (0,1) เป็นเซตนับไม่ได้

นั่นคือจะแสดงว่าไม่มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \rightarrow (0,1)$ ที่เป็น หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

สมมติให้ f: $\mathbb{N}\rightarrow(0,1)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะแสดงว่า f ไม่ทั่วถึง

โดยแสดงว่ามีสมาชิกใน $b\in(0,1)$ ที่ไม่มี $n\in\mathbb{N}$ ซึ่ง f(n)=b

เนื่องจาก f: $\mathbb{N}\rightarrow(0,1)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น แต่ละ $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า

$f(n)\in(0,1)$ เขียนเป็นทศนิยมแบบบรรทัดฐานได้ดังนี้

$f(1)=0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots$

$f(2)=0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots$

$f(3)=0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots$

$\vdots$

$f(n)=0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}\ldots$

$\vdots$

กำหนด $b=0.b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$ โดยที่ แต่ละ k กำหนด $b_k=\begin{cases}2 & , a_{kk}\neq 2\\ 3 & , a_{kk}=2\end{cases}$ จะเห็นว่า

$f(1)= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots\neq b$ เพราะ $a_{11}\neq b_1$

$f(2)=0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots\neq b$ เพราะ $a_{22}\neq b_2$

$f(3)= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots\neq b$ เพราะ $a_{33}\neq b_3$

$\vdots$

$f(n)= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}\ldots\neq b$ เพราะ $a_{nn}\neq b_n$

$\vdots$

ดังนั้น $f(n)\neq b$ ทุก $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่าทุกฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f: $\mathbb{N}\rightarrow(0,1)$ ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

นั่นคือไม่มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก $\mathbb{N}$ ไป (0,1) ดังนั้น (0,1) เป็นเซตนับไม่ได้ ❏

กำหนดจำนวนเชิงการนับของ (0,1) คือ **c

บทนิยาม 6.14. จะกล่าวว่า เซต A มีจำนวนเชิงการนับ **c** ถ้า $A\approx(0,1)$

ทฤษฎีบท 6.15. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง a<b จะได้ว่า (a,b) เป็นเซตนับไม่ได้ และ card((a,b))=**c**

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง a<b จะได้ว่า b-a>0

โดย ตัวอย่าง 5.4. จะได้ว่า $(0,1)\approx(0,b-a)$ และเราสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า

$(0,b-a)\approx(a,b)$ ดังนั้น $(0,1)\approx(a,b)$ นั่นคือ card((a,b))=**c**
จะแสดงว่า (a,b) เป็นเซตนับไม่ได้ สมมุติว่า (a,b) เป็นเซตนับได้
ดังนั้น (a,b) เป็นเซตอนันต์นับได้

นั่นคือ $(a,b)\approx\mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า $(0,1)\approx\mathbb{N}$ ขัดแย้งกับ (0,1) เป็นเซตนับไม่ได้

ดังนั้น (a,b) เป็นเซตนับไม่ได้ ❑

ทฤษฎีบท 6.16. เซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้ และมีจำนวนเชิงการนับ **c**

พิสูจน์ ให้ $f: (\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x)=\tan x$ ทุก $x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึง ดังนั้น $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})\approx\mathbb{R}$

จะแสดงว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้ สมมติว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับได้ นั่นคือ $\mathbb{R}\approx\mathbb{N}$

ทำให้ได้ว่า $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})\approx\mathbb{N}$ ขัดแย้งกับ $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ เป็นเซตนับไม่ได้ ดังนั้น $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้ ❑

ทฤษฎีบท 6.17. ทฤษฎีบทคันเตอร์ (Cantor's Theorem)
สำหรับทุกเซต A ได้ว่า A และ P(A) มีจำนวนเชิงการนับไม่เท่ากัน
พิสูจน์ ให้ A เป็นเซต ถ้า $A=\varnothing$ จะได้ว่า $P(A)=\{\varnothing\}$ ดังนั้น $card(P(A))=1\neq0=card(A)$
สมมติว่า $A\neq\varnothing$ ให้ $f : A\to P(A)$ จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

นั่นคือจะแสดงว่า มี $S\in P(A)$ ที่ไม่มี $t\in A$ ซึ่ง $f(t)=S$

กำหนด $S=\{x\in A \mid x\notin f(x)\}$จะได้ว่า $S\subseteq A$ นั่นคือ $S\in P(A)$ จะแสดงว่าไม่มี $t\in A$ ซึ่ง $f(t)=S$

สมมติว่ามี $t\in A$ ซึ่ง $f(t)=S$ จะแยกพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี

1. ถ้า $t\in S=\{x\in A \mid x\notin f(x)\}$ จะได้ว่า $t \notin f(t)$

   จาก $f(t)=S$ จะได้ว่า $t \notin S$ สรุป ขัดแย้ง

2. ถ้า $t\notin S$ จาก $f(t)=S$ จะได้ว่า $t \notin f(t)$ ดังนั้น $t\in S$ สรุป ขัดแย้ง

ดังนั้นจะได้ว่า ที่ไม่มี $t\in A$ ซึ่ง $f(t)=S$
ทำให้ได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง นั่นคือไม่มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไป P(A)
ดังนั้น $A\not\approx P(A)$ และ $card(P(A)) \neq card(A)$ ❑

บทแทรก 6.18. P($\mathbb{N}$) เป็นเซตอนันต์และเป็นเซตนับไม่ได้

พิสูจน์ เนื่องจาก M={{1},{2},{3},…}$\subseteq$P($\mathbb{N}$) เนื่องจาก M เป็นเซตอนันต์จะได้ว่า

P($\mathbb{N}$) เป็นเซตอนันต์ จากทฤษฎีบท 6.17. จะได้ว่า $\mathbb{N}\not\approx$P($\mathbb{N}$)

ดังนั้น P($\mathbb{N}$) เป็นเซตอนันต์และเป็นเซตนับไม่ได้ ❑

ข้อสังเกตเกี่ยวกับเซตนับไม่ได้

1. เนื่องจากเราทราบว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้ และมีภาวะเชิงการนับ **c**

และโดยบทแทรก 6.18. เราทราบว่า P($\mathbb{N}$) เป็นเซตนับไม่ได้เช่นกัน

และ P($\mathbb{N}$) มีภาวะเชิงการนับ **c** เช่นกัน สามารถพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.19. (เชรอเดอร์-เบิร์นสไตน์) ให้ a และ B เป็นเซต ถ้ามีฟังก์ชัน f : A$\longrightarrow$B และ g :A$\longrightarrow$B ซึ่งเป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว A$\approx$B

2. โดยทฤษฎีบท 6.19. เราสามารถแสดงได้ว่า [0,1]$\approx$(0,1)
3. จาก card($\mathbb{N}$) = $\aleph_0$ และ card(P($\mathbb{N}$)) =$\aleph_1$ = card($\mathbb{R}$) = **c**

   ยังมีเซตอนันต์อื่น ๆ อีกที่มีจำนวนเชิงการนับไม่เท่ากับ $\aleph_0$ และ $\aleph_1$ = **c**

   ดังนี้ card(P(P($\mathbb{N}$))) = $\aleph_2$

   card(P(P(P($\mathbb{N}$)))) = $\aleph_3$

   $\vdots$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. จงแสดงว่า เซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์ได้

1.1 เซตของจำนวนเต็มคี่

1.2 $\{a,b,c\} \cup \mathbb{N}$

1.3 $\{n \mid n \in \mathbb{N}$ และ $n>5\}$

1.4 $\mathbb{N}-\{10,11\}$

1.5 $\{(x,y) \mid x\in\mathbb{N}$ และ $y\in\mathbb{R}$ และ $xy=1\}$

1.6 $\{1/(3^n) \mid n\in\mathbb{N}\}$

2. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน $g : \mathbb{N}\rightarrow D$ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง โดยที่ $g(1)=21$ เมื่อ D เป็นเซตของจำนวนคี่

3. ให้ A เป็นเซตนับได้ และ $B\subseteq A$ จงพิสูจน์ ถ้า B เป็นเซตอนันต์ แล้ว A เป็นเซตอนันต์นับได้

4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้ว $A\cup\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์นับได้

5. กำหนด $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ โดยที่ $f(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$

5.1 จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5.2 จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

6.จงพิสูจน์ว่า เซตของจำนวนตรรกยะระหว่าง 0 และ 1 เป็นเซตอนันต์นับได้

7.จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเซตอนันต์นับได้ และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว A-B เป็นเซตอนันต์นับได้

8. ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จงยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้

8.1 ถ้า A เป็นเซตอนันต์นับได้ แล้ว A เป็นเซตอนันต์

8.2 ถ้า A เป็นเซตอนันต์นับได้ แล้ว A เป็นเซตนับได้

8.3 ถ้า A เป็นเซตนับไม่ได้ แล้ว A เป็นเซตอนันต์

8.4 ถ้า $A\approx N_k$ สำหรับบาง $k\in\mathbb{N}$ แล้ว A เป็นเซตนับไม่ได้

8.5 ถ้า A เป็นเซตนับได้ แล้ว A-B เป็นเซตนับได้

8.6 ถ้า A เป็นเซตนับไม่ได้ แล้ว $A\cup B$ เป็นเซตนับไม่ได้

8.7 $A\cup B$ เป็นเซตนับได้ ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตนับได้

9. ให้ $f : [0,1]\rightarrow[0,1)$ โดยที่

$$f(x)= = \begin{cases} 1/(n+1) & , x = 1/n \ \exists n\in\mathbb{N} \\ x & , x \text{ เป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

9.1 จงหา f(0), f(1), f(1/2), f(1/4) และ f(1/5)

9.2 จงพิสูจน์ว่า $[0,1]\approx[0,1)$

10. ให้ f : $[0,1) \longrightarrow (0,1)$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , x=0 \\ 1/(n+1) & , x = 1/n \ \exists n \in \mathbb{N} \\ x & , x \text{ เป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

10.1 จงหา f(0), f(1/2), f(1/3), f(1/4) และ f(1/5)

10.2 จงพิสูจน์ว่า $[0,1) \approx (0,1)$

11. จงพิสูจน์ว่า [0,1] และ [0,1) เป็นเซตนับไม่ได้ และมีภาวะเชิงการนับ **c**

12. ให้ $a \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่าเซตต่อไปนี้มีเซตต่อไปนี้มีจำนวนเชิงการนับ **c**

12.1 $(0,\infty)$

12.2 (a,∞)

12.3 $\mathbb{R}$-{0}

12.4 $\mathbb{R}$-{a}

13. เซตของจำนวนอตรรกยะ เป็นเซตนับได้หรือไม่ จงพิสูจน์

14.จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเซตนับไม่ได้ และ $A \subseteq B$ แล้ว B เป็นเซตนับไม่ได้

15. 15.1 จงหาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f : $(0,1) \longrightarrow [0,1)$

15.2 จงหาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f : $[0,1] \longrightarrow (-1,2)$

15.3 จงใช้ทฤษฎีบทเชรอเดอร์-เบิร์นสไตน์ พิสูจน์ว่า $[0,1] \approx (0,1)$

เอกสารอ้างอิงบทที่ 6

1. รุ่งนภา ภักดีสู่สุข, แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
2. Krantz, S.G., The Elements of Advanced Mathematics, CRC Press, Inc.,1995.
3. Smith, D., Eggen, M., Andre, R. St., A Transition to Advanced Mathematics, 4th edition, Brooks / Cole Publishing Company, 1997.
4. Stewart ,T. , The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.

เอกสารอ้างอิง

1. รุ่งนภา ภักดีสู่สุข, แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
2. Krantz, S.G., The Elements of Advanced Mathematics, CRC Press, Inc.,1995.
3. Pinter, C.C., Set Theory, Addison – Wesley Publishing Company, Inc., 1971.
4. Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, 3rd edition, McGraw – Hill Book Company,1976.
5. Smith, D., Eggen, M., Andre, R. St., A Transition to Advanced Mathematics, 4th edition, Brooks / Cole Publishing Company, 1997.
6. Stewart ,T. , The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.
7. Sundstrom, T., Mathematical Reasoning Writing and Proof, Prentice Hall, Inc., 2001.
8. Wohlgemuth, Introduction to Proof in Abstract Mathematics, Saunders College Publishing,1990.