THIS IS THE FIRST LINE OF THE TITLE WITH THE SECOND LINE HERE BEFORE THE THIRD LINE

NAME SURNAME

DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
MAY 2017

THIS IS THE FIRST LINE OF THE TITLE
WITH THE SECOND LINE HERE
BEFORE THE THIRD LINE

NAME SURNAME

DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
MAY 2017

THIS IS THE FIRST LINE OF THE TITLE
WITH THE SECOND LINE HERE
BEFORE THE THIRD LINE

NAME SURNAME

A THESIS SUBMITTED TO CHIANG MAI UNIVERSITY IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

GRADUATE SCHOOL, CHIANG MAI UNIVERSITY
MAY 2017

THIS IS THE FIRST LINE OF THE TITLE
WITH THE SECOND LINE HERE
BEFORE THE THIRD LINE

NAME SURNAME

THIS THESIS HAS BEEN APPROVED TO BE A PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Examination Committee :

.... Chairman
(Prof. Dr. Name4 Surname4)

.... Member
(Prof. Dr. Name1 Surname1)

.... Member
(Assoc. Prof. Dr. Name2 Surname2)

.... Member
(Asst. Prof. Dr. Name3 Surname3)

.... Member
(Dr. Name5 Surname5)

Advisory Committee :

.... Advisor
(Prof. Dr. Name1 Surname1)

.... Co-advisor
(Assoc. Prof. Dr. Name2 Surname2)

.... Co-advisor
(Asst. Prof. Dr. Name3 Surname3)

8 May 2017

To

My Family

ACKNOWLEDGEMENT

Acknowledgement Page is for expressing the author's appreciation to anybody or for recognizing people or institutions who did help the author doing research or writing Thesis or Independent Study. Statement of acknowledgement may be one or more paragraphs and end up with name and surname of the author without any title.

This Acknowledgement Page is next after the Dedication Page (optional) and ordered as the fourth page (may be third if the Dedication Page absents) of the front matter.

Note that this example is printed in the Indented Style, the first Line of each paragraph is started at 10 mm. to the right of paragraph. If it is printed in the Block Style, no indention on the first line of each paragraph. When the author chooses either Block or Indented Styles, the same style must be used for the whole Thesis or Independent Study.

Name Surname

หัวข้อดุษฎีนิพนธ์	ชื่อเรื่องภาษาไทย สำหรับหน้าบทคัดย่อภาษาไทย
ผู้เขียน	นายชื่อ นามสกุล
ปริญญา	ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
คณะกรรมการที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร. ชื่อ นามสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก รองศาสตราจารย์ ดร. ชื่อ นามสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชื่อ นามสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

บทคัดย่อ

ให้ Γ เป็นกรุปมอดุลาร์ จะได้ว่า Γ แอคบนเซต $\widehat{\mathbb{Q}}$ โดยการแปลงเชิงเส้นแบบเศษส่วน (linear fractional transformation) ซึ่งแอคชันของ Γ มีสมบัติถ่ายทอด (transitive action) เราสามารถใช้กรุปย่อย $\Gamma_K(n)$ ของ Γ สร้างความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $\widehat{\mathbb{Q}}$ โดยที่แอคชันของ Γ รักษาความสัมพันธ์ดังกล่าว (Γ-invariant relation) จากนั้นเราจะกำกัดกราฟออร์บิทัลย่อย $\mathcal{G}_{u,n}$ สำหรับ Γ ลงบนชั้นสมมูล $[\infty]_K$ ใน $\widehat{\mathbb{Q}}$ และใช้ $\mathcal{F}^K_{u,n}$ กำหนดกราฟย่อยดังกล่าว กราฟย่อยที่ได้ถูกขยายแนวคิดมาจากกราฟย่อย $\mathcal{F}_{u,n}$ ของ $\mathcal{G}_{u,n}$ ซึ่งความสัมพันธ์สมมูลได้มาจากกรุปย่อย $\Gamma_0(n)$ ของ Γ ในการศึกษานี้ เราตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของ $\mathcal{F}^K_{u,n}$ ได้แก่ สภาพเชื่องโยง สมบัติการเป็นกราฟป่า (forest) การระบายสีกราฟ ความสัมพันธ์ระหว่างวงจรของกราฟและสมาชิกเชิงวงรี (elliptic element) ของ $\Gamma_K(n)$ นอกจากนั้นเรายังศึกษากราฟออร์บิทัลย่อยสำหรับกรุปย่อยสังยุค (conjugate subgroup) ของ Γ

สำหรับกรุปมอดุลาร์แบบขยาย $\widehat{\Gamma}$ เราจะใช้กรุปย่อย $\widehat{\Gamma}_K(n)$ สร้างความสัมพันธ์สมมูลบน $\widehat{\mathbb{Q}}$ แทนการใช้กรุปย่อย $\widehat{\Gamma}_0(n)$ และใช้ $\widehat{\mathcal{F}}^K_{u,n}$ เป็นสัญลักษณ์แทนกราฟย่อยของกราฟออร์บิทัลย่อย $\widehat{\mathcal{G}}_{u,n}$ สำหรับ $\widehat{\Gamma}$ ซึ่งได้มาโดยวิธีการที่คล้ายกันกับกราฟ $\mathcal{F}^K_{u,n}$ ในที่นี้จะได้ว่า $\widehat{\mathcal{F}}^K_{u,n}$ เป็นนิยามโดยทั่วไปของ $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$ นอกจากนี้ $\mathcal{F}^K_{u,n}$ ยังเป็นกราฟย่อยของ $\widehat{\mathcal{F}}^K_{u,n}$ ดังนั้นสมบัติหลายประการของ $\widehat{\mathcal{F}}^K_{u,n}$ จึงได้มาโดยความสัมพันธ์ระหว่างกราฟ $\widehat{\mathcal{F}}^K_{u,n}$, $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$ และ $\mathcal{F}^K_{u,n}$

ในส่วนของบัตตันนิง (buttoning) ของกราฟ เราหาความยาวของบัตตันนิงใหญ่สุดของกราฟจำกัดหลาย ๆ ประเภท ที่เป็นกราฟเชื่อมโยงไม่ระบุทิศทาง รวมทั้งกราฟย่อยของกราฟเฟเรย์ (Farey graph) $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{1,1}$ และต้นไม้ชแตร์น-บรอโก (Stern-Brocot tree) ซึ่งต้นไม้ชแตร์น-บรอโก มีความสำคัญในการพิสูจน์สมบัติบางประการของกราฟออร์บิทัลย่อย

Dissertation Title	This Is the First Line of the Title with the Second Line Here before the Third Line
Author	Mr. Name Surname
Degree	Doctor of Philosophy (Mathematics)
Advisory Committee	Prof. Dr. Name1 Surname1 — Advisor Assoc. Prof. Dr. Name2 Surname2 — Co-advisor Asst. Prof. Dr. Name3 Surname3 — Co-advisor

ABSTRACT

Let Γ be the group of modular. Then Γ acts transitively on $\widehat{\mathbb{Q}}$ by linear fractional transformation. We generalize the nontrivial Γ-invariant equivalence relation on $\widehat{\mathbb{Q}}$ related to $\Gamma_0(n)$ by replacing the subgroup $\Gamma_0(n)$ of Γ by the subgroup $\Gamma_K(n)$. Then we determine the subgraph $\mathcal{F}_{u,n}^K$ of the suborbital graph $\mathcal{G}_{u,n}$ for Γ. It is the subgraph of $\mathcal{G}_{u,n}$ restricted on the block $[\infty]_K$, the equivalence class in $\widehat{\mathbb{Q}}$ containing ∞. This is an extended concept of the graph $\mathcal{F}_{u,n}$. We investigate several properties of the graph, such as, connectivity, forest conditions, graph coloring, and the relation between circuits of the graph and elliptic elements of the group $\Gamma_K(n)$. We also provide the discussion on suborbital graphs for conjugate subgroups of Γ.

In the case of the extended modular group $\widehat{\Gamma}$, we replace the subgroup $\widehat{\Gamma}_0(n)$ by $\widehat{\Gamma}_K(n)$. By the similar way, we obtain the subgraph $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^K$ of the suborbital graph $\widehat{\mathcal{G}}_{u,n}$ for $\widehat{\Gamma}$. This is a generalization of the graph $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$. We provide the relations between the graphs $\mathcal{F}_{u,n}^K$ and $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^K$. Then many properties of $\mathcal{F}_{u,n}^K$ and $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$ are extended to $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^K$.

In the part of buttonings of graphs, we examine the lengths of maximal buttonings of certain finite undirected connected graphs including the special subgraphs of the Farey graph $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{1,1}$ and the Stern-Brocot tree which advantages in some parts of suborbital graphs.

CONTENTS

LIST OF TABLES

LIST OF FIGURES

Page

ข้อความแห่งการริเริ่ม

ข้าพเจ้าขอรับรองว่าดุษฎีนิพนธ์เล่มนี้เป็นผลงานของข้าพเจ้า ซึ่งไม่มีส่วนหนึ่งส่วนใดละเมิดลิขสิทธิ์และทรัพย์สินทางปัญญาของผู้อื่น ผลงานการวิจัยนี้ไม่ได้รับการตีพิมพ์หรือเขียนโดยบุคคลอื่นมาก่อนยกเว้นส่วนอ้างอิงเพื่อความสมบูรณ์ของรูปเล่มดุษฎีนิพนธ์

กราฟ $\mathcal{F}_{u,n}^{K}$ และ $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^{K}$ ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ เป็นองค์ประกอบเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกนิยามขึ้นมาใหม่ โดยขยายแนวคิดมาจากกราฟ $\mathcal{F}_{u,n}$ และ $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$ ดังนั้นสมบัติของกราฟ $\mathcal{F}_{u,n}^{K}$ และ $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^{K}$ จึงยังไม่ได้รับการศึกษามาก่อน นอกจากนี้เรายังตรวจสอบสมบัติใหม่ ๆ ของกราฟ $\mathcal{F}_{u,n}$ และ $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$ ซึ่งสามารถขยายไปสู่กราฟ $\mathcal{G}_{u,n}$ และ $\widehat{\mathcal{G}}_{u,n}$ ได้

ดุษฎีนิพนธ์เล่มนี้ได้รับการอนุมัติโดยคณะกรรมการสอบดุษฎีนิพนธ์และบัณฑิตวิทยาลัย โดยที่ไม่เคยถูกใช้เพื่อสำเร็จการศึกษาหรือประโยชน์อื่นใด

STATEMENT OF ORIGINALITY

I hereby certify that I am the author of this dissertation. To the best of my knowledge, there are not any parts of this research infringing anyone's copyright and intellectual property. The dissertation does not contain any materials previously written or published by other people except appropriate references for the sake of completeness.

I declare that the graphs $\mathcal{F}_{u,n}^K$ and $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^K$ are the new mathematical objects generalized from $\mathcal{F}_{u,n}$ and $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$. Therefore, the results for $\mathcal{F}_{u,n}^K$ and $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^K$ are new. We also investigated some new properties of $\mathcal{F}_{u,n}$ and $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}$ including $\mathcal{F}_{u,n}^K$ and $\widehat{\mathcal{F}}_{u,n}^K$ and then extended them to the graphs $\mathcal{G}_{u,n}$ and $\widehat{\mathcal{G}}_{u,n}$.

This is a true copy of my dissertation including any final corrections approved by the dissertation examining committee and the Graduate School. The dissertation has not been accepted for a degree or diploma at any educational institution or university.

CHAPTER 1

Introduction

1.1 Examples of Tables

Table 1.1: The Number of Animals in Zoos of Chiang Mai

No.	**Zoos**	**The Number of Animals**
1	Chiang Mai Zoo	1,158
2	Chiang Mai Night Safari	849
Total		2,007

1.2 Examples of figures

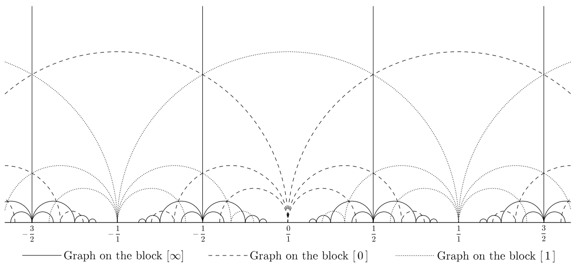

Figure 1.1: The Generalized Farey Graph $\mathcal{G}_{1,2}$

1.3 Examples of Theorem and Related Environments

Definition 1.3.1. *quadrangle* is a geometric object consisting of four sides and four vertices

Notation 1.3.2. content...

Example 1.3.3. content...

1.3.1. content...

Lemma 1.3.4. *content...*

Proof. content... □

Proposition 1.3.5. *content...*

Sketch of Proof. content... $\square$

Theorem 1.3.6. *content...*

Corollary 1.3.7. *content...*

Remark 1.3.8. *content...*

Conjecture 1.3.9. *content...*

1.4 Math Mode in LaTeX

1.4.1 Inline Math

It has been known that the equation $e = mc^2$ was investigated by Albert Einstein.

1.4.2 Display Math

It has been known that the equation

$$e = mc^2$$

was investigated by Albert Einstein.

It has been known that the equation

$$e = mc^2 \tag{1.1}$$

was investigated by Albert Einstein.

Suppose that $ad - bc = 1$ and $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. The solutions of the quadratic equation are shown below;

$$\begin{align}
z &= \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4c(-b)}}{2c} \tag{1.2}\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4(ad-bc)}}{2c} \tag{1.3}\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c}. \tag{1.4}
\end{align}$$

$$\begin{align}
z &= \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4c(-b)}}{2c} \tag{1.5}\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4(ad-bc)}}{2c} \nonumber\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c} \tag{1.6}
\end{align}$$

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4c(-b)}}{2c} \\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4(ad-bc)}}{2c} \\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c} \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4c(-b)}}{2c} \qquad (1.8a) \\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4(ad-bc)}}{2c} \\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c} \qquad (1.8b)
\end{aligned}
$$

1.5 Labeling and Referencing

Section 1.5 of Chapter 1 describes how we can label and reference our equations.

1.5.1 Tables and Figures

Table 1.2: The Number of Animals in Zoos of Chiang Mai

No.	**Zoos**	**The Number of Animals**
1	Chiang Mai Zoo	1,158
2	Chiang Mai Night Safari	849
Total		2,007

Table 1.2 shows the numbers of animals in Chiang Mai Zoo and Chiang Mai Night Safari.

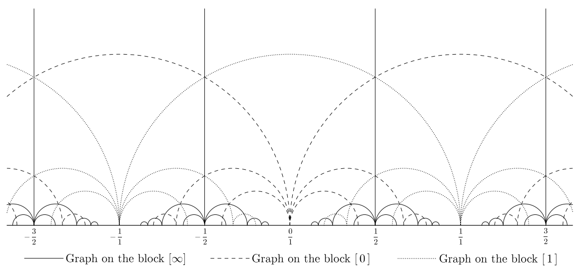

Figure 1.2: The Graph $\mathcal{G}_{1,2}$

Figure 1.2 demonstrates a part of the graph $\mathcal{G}_{1,2}$

1.5.2 Equations

$$e = mc^2 \tag{1.9}$$

It has been known that the equation (1.9) was investigated by Albert Einstein.

$$
\begin{align}
z &= \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4c(-b)}}{2c} \tag{1.10}\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4(ad-bc)}}{2c} \tag{1.11}\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c}. \tag{1.12}
\end{align}
$$

(1.10) is the quadratic formula. Then we add $+4ad - 4ad$ in the square root and obtain (1.11) by regrouping the variables. Finally, replacing $ad - bc$ by 1 provides (1.12).

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4c(-b)}}{2c}\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4(ad-bc)}}{2c}\\
&= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c}.
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

(1.13) is the simplest form of z.

1.5.3 Theorem and Others

Theorem 1.5.1. *The Farey graph $\mathcal{F}$ is* 3*-chromatic.*

Theorem 1.5.1 is the first result of chromatic numbers for the graphs $\mathcal{F}^K_{u,n}$.

Theorem 1.5.2. *The Farey graph $\mathcal{F}$ is* 3*-chromatic.*

Theorem 1.5.2 is the first result of chromatic numbers for the graphs $\mathcal{F}^K_{u,n}$.
Theorem 1.5.2 is the first result of chromatic numbers for the graphs $\mathcal{F}^K_{u,n}$.

CHAPTER 2

Preliminaries

CHAPTER 3

Main Results

CHAPTER 4

Conclusion

LIST OF PUBLICATIONS

1) W. Tapanyo and P. Jaipong. "Chromatic numbers of suborbital graphs for the modular group and the extended modular group." *Journal of Mathematics*, vol. 2017, Article ID 7458318, 2017. doi:10.1155/2017/7458318

2) P. Jaipong and W. Tapanyo. "Connectivity of suborbital graphs for the congruence subgroups of the extended modular group." *Communications in Mathematics and Applications*, (accepted on March 15, 2017)

3) W. Tapanyo and P. Jaipong. "Generalized classes of suborbital graphs for the congruence subgroups of the modular group." *Algebra and Discrete Mathematics*, (submitted in October 2016)

4) W. Tapanyo and P. Jaipong. "Maximal buttonings of certain graphs." *Thai Journal of Mathematics*, (submitted in October 2016)

5) W. Tapanyo and P. Jaipong. "Suborbital graphs for the congruence subgroup $\Gamma_1(n)$ of the modular group." (in preparation)

APPENDIX A

Test Appendix

Theorem A.1. *content...*

A.1 title

Theorem A.1.1. *content...*

A.2 Test section

A.2.1 Test subsection

A.2.2 Test subsection

drgdgdg

APPENDIX B

Test

APPENDIX C

Test

CURRICULUM VITAE

Author's Name	Mr. Name Surname
Date of Birth	January 19, 1987
Place of Birth	Narathiwas Province, Thailand
Education	In 2010: Bachelor of Science in Mathematics (second class honour), Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand In 2013: Master of Science in Mathematics, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand
Scholarship	The Development and Promotion of Science and Technology Talents Project (DPST)
Experiences	1) Teaching Assistant in Abstract Algebra and Theory of Numbers at Department of Mathematics, Chiang Mai university. 2) Oral presentations at – Annual Meeting in Mathematics (AMM) 2014 and 2015 – The International Graduate Research Conference (*i*GRC) 2015. 3) Researching in Module Amenability of Banach Algebras. 4) Participated in CIMPA-UNESCO-MICINN-THAILAND School 2011, Bangkok, Thailand.