# จำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

# (Achromatic numbers of some simple graphs)


**จัดทำโดย**

**นายวรัญญู มูลตา รหัสนักศึกษา 640510579**

**อาจารย์ที่ปรึกษา**

**ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี**


**เอกสารฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของกระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ (206499)**

**ภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567**


**ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่**

# จำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

# (Achromatic numbers of some simple graphs)

**จัดทำโดย**

**นายวรัญญู  มูลตา  รหัสนักศึกษา  640510579**

**อาจารย์ที่ปรึกษา**

**ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์  ลี้รัตนาวลี**

**เอกสารฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของกระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ (206499)**

**ภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567**

**ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่**

จำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

(Achromatic numbers of some simple graphs)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

........................................................................ ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี)

........................................................................ กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรัณยู จันทร)

วันที่ 1 ตุลาคม พ.ศ. 2567

# กิตติกรรมประกาศ

เอกสารศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาค้นคว้า ประยุกต์ใช้ทฤษฎี และแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ในการค้นคว้าอิสระของตนเอง ซึ่งข้าพเจ้าได้ทำการศึกษาค้นคว้าในเรื่อง จำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

ผู้ศึกษาค้นคว้าขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์  ลี้รัตนาวลี ประธานกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ และอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ให้ความอนุเคราะห์ และเสียสละเวลาอันมีค่า ในการให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะแก่ข้าพเจ้า และช่วยตรวจสอบความสมบูรณ์และถูกต้องของเอกสารฉบับนี้ ตลอดการศึกษาค้นคว้าอิสระของข้าพเจ้า จนการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้สำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรัณยู  จันทร กรรมการสอบ ที่ได้สละเวลาอันมีค่าของท่าน และให้คำแนะ ข้อเสนอแนะ พิจารณา และตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ของการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ จนเอกสารการค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณบิดา มารดา คณาจารย์และบุคลากร ภาควิชาคณิตศาสตร์ เพื่อน พี่ น้อง ทุกคน และผู้มีพระคุณทุกท่าน ที่ได้ให้กำลังใจ ให้พลังงานเชิงบวก ให้คำแนะนำ ให้ความรู้ และให้ความช่วยเหลือทุกด้าน จนเป็นผลทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้สำเร็จลุล่วงทุกประการ

นายวรัญญู  มูลตา

**หัวข้อ (ภาษาไทย)** จำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

**(ภาษาอังกฤษ)** Achromatic numbers of some simple graphs

**ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ** นายวรัญญู มูลตา รหัสนักศึกษา 640510579

**ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา** ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี

**ชื่อกรรมการสอบ** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภรัณยู จันทร

## บทคัดย่อ

จำนวนอโครมาติกของกราฟ $G$ (achromatic number of $G$) คือจำนวนสีที่มากที่สุด ที่สามารถกำหนดให้กับแต่ละจุดยอดของกราฟ $G$ ได้ โดยที่จุดยอดที่ประชิดกันต้องใช้สีต่างกัน และทุกคู่ของสีที่ต่างกันต้องถูกกำหนดให้กับจุดยอดที่ประชิดกัน ซึ่งในการค้นคว้าอิสระในครั้งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาแนวคิดและบทนิยาม รวมถึงสมบัติบางประการของกราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ และกราฟ $SF(n,1)$ โดยที่ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จากการศึกษาพบว่ากราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ มีสมบัติบางประการ คือ มีจำนวนจุดยอดทั้งหมดเท่ากับ $2n$ จุด มีจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดเท่ากับ $\frac{n(n+1)}{2}$ เส้น และจำนวนอโครมาติกของกราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ คือ $n+1$ นอกจากนั้นผู้ค้นคว้ายังสามารถหาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF(n,1)$ ได้

# Abstract

Achromatic number of a graph $G$ is the largest number of colors that can be assigned to each vertices of the graph $G$ such that adjacent vertices are assigned different colors and any two different colors are assigned to some pair of adjacent vertices. In this independent study, we study the concepts and definitions including some properties of $n-$complete starfish graphs and $SF(n,1)$ graphs when $n$ is a natural number and $n \geq 3$. We found that every $n-$complete starfish graph has some properties that the number of its vertices is $2n$ and the number of its edges is $\frac{n(n+1)}{2}$, and the achromatic number of $n-$complete starfish graphs is $n+1$. Additionally, we could find the bounds of the achromatic numbers of $SF(n,1)$ graphs.

# สารบัญ

# บทที่ 1

## บทนำ (Introduction)

ทฤษฎีกราฟนั้น มีจุดเริ่มจากผลงานตีพิมพ์ของ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ภายใต้ชื่อ Solutio problematis and geometriam situs pertinentis ในปี ค.ศ. 1736 (พ.ศ. 2279) หรือที่รู้จักกันในนาม ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก (Seven Bridges of Königsberg) เขาสนใจวิธีที่จะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่งนี้ โดยข้ามแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้นแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้น ผลงานนี้ยังถือว่าเป็นงานแนวทอพอโลยีชิ้นแรกในเรขาคณิต กล่าวคือเป็นงานที่สนใจเฉพาะโครงสร้างของรูปเรขาคณิตที่ไม่ขึ้นกับขนาด ระยะ หรือการวัดใดๆ งานชิ้นสำคัญนี้ยังได้แสดงความเกี่ยวข้องอย่างลึกซึ้งระหว่างทฤษฎีกราฟและทอพอโลยี [7]

ต่อมาในปี ค.ศ. 1852 (พ.ศ. 2395) ฟรานซิส กัทธรี ได้ตั้งปัญหาสี่สี (Four color problem) เพื่อศึกษาถึงความเป็นไปได้ที่จะใช้สีเพียง 4 สี เพื่อระบายให้กับประเทศต่าง ๆ บนแผนที่ใด ๆ โดยที่ประเทศเพื่อนบ้านจะไม่ถูกระบายด้วยสีเดียวกัน ปัญหานี้ได้ถูกศึกษาอีกมากกว่า 100 ปีถัดมา ในปี ค.ศ. 1976 (พ.ศ. 2519) โดย เคนเนธ แอปเพล และวูล์ฟกัง ฮาเคน ด้วยการใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งทำให้ได้รับการวิพากษ์วิจารณ์อย่างกว้างขวาง อย่างไรก็ตามจากความพยายามในการแก้ปัญหา 4 สีนี้ ทำให้มีการสร้างแนวคิดและนิยามพื้นฐานในทฤษฎีกราฟขึ้นอย่างมากมาย จนอาจจะกล่าวได้ว่าจุดเริ่มต้นของทฤษฎีกราฟเกิดจากปัญหาสี่สีนี้เอง [3] และในปี ค.ศ. 1967 (พ.ศ. 2510) จำนวนอโครมาติกได้ถูกนิยามขึ้นครั้งแรก โดย Frank Harary, Stephen Hedetniemi และ Geert Prins [2]

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีกราฟเรื่องจำนวนอโครมาติกของกราฟ ผู้ศึกษาพบว่าจำนวนอโครมาติกสำหรับกราฟใด ๆ ยังไม่สามารถหาได้ จึงมีผู้ที่สนใจศึกษาการหาจำนวนอโครมาติกของกราฟบางกราฟ เช่น กราฟต้นไม้ที่มีขอบเขตจำกัด (bounded degree trees graph) กราฟหนังสือ (book graph) กราฟลูกกบ (tadpole graph) กราฟใยแมงมุม (spider graph) กราฟวงล้อ (wheel graph) กราฟเฟรนด์ชิพ (friendship graph) กราฟฮาล์ฟ (half graph) และกราฟลอลลิพอพ (lollipop graph) [2]

ในงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ผู้ค้นคว้าจึงสนใจศึกษาจำนวนอโครมาติกของกราฟชนิดอื่นที่ยังไม่มีผู้ศึกษา คือ กราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ และกราฟ $SF(n,1)$

วัตถุประสงค์ (Objectives)

1. เพื่อศึกษาแนวคิดและบทนิยามของทฤษฎีกราฟ เรื่องจำนวนอโครมาติก
2. เพื่อหาจำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

ขอบเขตของศึกษา

ศึกษาแนวคิดและบทนิยามของทฤษฎีกราฟ เรื่องจำนวนอโครมาติก และศึกษาเกี่ยวกับจำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

วิธีการดำเนินการศึกษา

1. ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีกราฟ
2. ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดและบทนิยามของจำนวนอโครมาติกของกราฟ พร้อมหาตัวอย่างประกอบ
3. ศึกษาสมบัติบางประการของกราฟ เช่น จำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อม จำนวนอโครมาติกของกราฟ พร้อมทั้งแสดงการพิสูจน์
4. จัดทำรูปเล่ม พร้อมการตรวจสอบความถูกต้อง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบถึงแนวคิดและบทนิยามของทฤษฎีกราฟ เรื่องจำนวนอโครมาติก
2. ทราบถึงจำนวนอโครมาติกของกราฟเชิงเดียวบางกราฟ

# บทที่ 2

## ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

**บทนิยาม 2.1 [4] กราฟ (เชิงเดียว)** $G$ (simple graph G) ประกอบด้วยเซต 2 เซตคือ $V(G)$ และ $E(G)$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างและ $E(G)$ เป็นเซตของคู่ไม่อันดับ (unordered pairs) ของสมาชิกของ $V(G)$ เรียกสมาชิกของ $V(G)$ ว่า **จุดยอด** (vertices) และเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่า **เส้นเชื่อม** (edges) จะเขียนสัญลักษณ์แทนกราฟ $G$ ด้วย $G(V,E)$

ถ้า $e$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ G แล้ว $e$ เขียนได้ในรูป $e=\{u,v\}$ สำหรับบางสมาชิก $u$ และ $v$ ที่เป็นสมาชิกของ $V(G)$ และจะเรียก $u$ และ $v$ ว่าจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม $e$ เพื่อความสะดวกจะแทนเส้นเชื่อม $e=\{u,v\}$ ด้วย $uv$ โดยที่เส้นเชื่อม $uv$ และเส้นเชื่อม $vu$ หมายถึงเส้นเดียวกัน

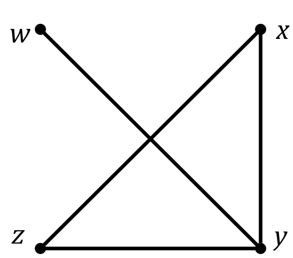
**บทนิยาม 2.2 [4]** ให้ $uv$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ $G$ จะกล่าวว่า จุดยอด $u$ และจุดยอด $v$ **ตกกระทบ** (incident) กับเส้นเชื่อม $uv$ และเส้นเชื่อม $uv$ ตกกระทบกับจุดยอด $u$ และจุดยอด $v$

**บทนิยาม 2.3 [4]** ให้จุดยอด $u$ และจุดยอด $v$ เป็นจุดยอดในกราฟ $G$ จะกล่าวว่าจุดยอดสองจุด **ประชิด** (adjacent) กัน ถ้าจุดยอดทั้งสองเป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อมเส้นเดียวกัน ในทำนองเดียวกันจะกล่าวว่าเส้นเชื่อมสองเส้นประชิดกัน ถ้าเส้นเชื่อมทั้งสองเส้นมีจุดยอดปลายร่วมกันหนึ่งจุด

**บทนิยาม 2.4 [4] ดีกรี** (degree) ของจุดยอด $v$ หมายถึง จำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุดยอด $v$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\deg(v)$ จะเรียกจุดยอด $v$ ว่า **จุดยอดคู่** (even vertex) ถ้า $\deg(v)$ เป็นจำนวนคู่ และจะเรียกจุดยอด $v$ ว่า **จุดยอดคี่** (odd vertex) ถ้า $\deg(v)$ เป็นจำนวนคี่

**บทนิยาม 2.5 [7]** สำหรับจุดยอดที่มีดีกรี 1 จะเรียกว่า **จุดยอดเพนแดนต์** (pendant vertex) และเส้นเชื่อมที่ตกกระทบกับจุดยอดเพนเดนต์ เรียกว่า **เส้นเชื่อมเพนแดนต์** (pendent edge)

**ตัวอย่าง 2.1** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G)=\{w,\ x,\ y,\ z\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)=\{wy,\ xy,\ xz,\ yz\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

โดยที่จุดของแผนภาพคือสมาชิกของ $V(G)$ และเส้นของแผนภาพคือสมาชิกของ $E(G)$ นั่นคือถ้า $uv\epsilon E(G)$ แล้วจะลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด $u$ และจุดยอด $v$

จากตัวอย่าง 2.1 จะกล่าวได้ว่า

-จุดยอด $x$ และจุดยอด $y$ ตกกระทบกับเส้นเชื่อม $xy$

-เส้นเชื่อม $wy$ ตกกระทบกับจุดยอด $w$ และจุดยอด $y$

-จุดยอด $z$ ประชิดกับจุดยอด $x$ และ $y$

-เส้นเชื่อม $zx$ ประชิดกับเส้นเชื่อม $xy$ และ $zy$

-จุดยอด $w,\ x,\ y$ และ $z$ มีจำนวนดีกรีเท่ากับ $1,\ 2,\ 3$ และ $2$ ตามลำดับ หรือเขียนแสดงในเชิงสัญลักษณ์ได้ว่า $\deg(w) = 1$, $\deg(x) = 2$, $\deg(y) = 3$ และ $\deg(z) = 2$

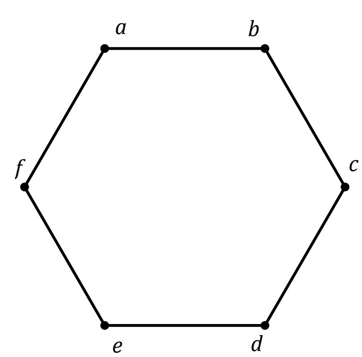
-จาก $\deg(w) = 1$ โดยบทนิยาม 2.5 จะเรียกจุดยอด $w$ ว่า จุดยอดเพนแดนต์ และเรียกเส้นเชื่อม $wy$ ว่า เส้นเชื่อมเพนแดนต์ #

**บทนิยาม 2.6 [1] แนวเดิน** (walk) ในกราฟ คือลำดับสลับของจุดยอดและเส้นเชื่อม ซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดด้วยจุด โดยที่เส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะตกกระทบกับจุดยอดก่อนหน้าและจุดยอดตามหลังที่อยู่ถัดกันในลำดับ

**บทนิยาม 2.7 [1]** จะเรียกกราฟ G ว่าเป็น **กราฟเชื่อมโยง** (connected graph) ถ้าทุก ๆ สองจุดที่แตกต่างกันใน $G$ มีแนวเดินระหว่างกัน

**บทนิยาม 2.8 [2] กราฟวัฏจักร** (cycles) คือกราฟเชื่อมโยง ซึ่งประกอบด้วยจุดยอด $n$ จุด โดยที่ $n \geq 3$ และเส้นเชื่อม $n$ เส้น โดยแต่ละจุดยอดจะมีดีกรีเท่ากับสอง แทนกราฟวัฏจักรที่มี $n$ จุดยอด ด้วย $C_n$

**ตัวอย่าง 2.2** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{ab,\ bc, cd,\ de,\ ef,\ fa\}$ สามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

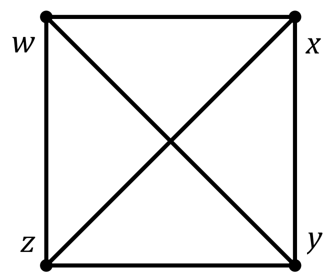
จากรูป กล่าวได้ว่า กราฟ $G$ เป็นกราฟวัฏจักร เนื่องจากกราฟ $G$ เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ทุกสองจุดที่แตกต่างกันใน $G$ มีแนวเดินระหว่างกัน และทุกจุดยอดมีดีกรีเท่ากับสอง แทนกราฟ $G$ ด้วย $C_6$

ซึ่ง $C_6$ มีจำนวนจุดยอดทั้งหมดคือ 6 จุด และมีจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดคือ 6 เส้น #

**บทนิยาม 2.9 [4]** จะเรียกกราฟเชิงเดียวที่ประกอบด้วยจุดจอดจำนวน $n$ จุด และทุกคู่ของจุดประชิดกันว่า **กราฟแบบบริบูรณ์** (complete graph) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $K_n$

<u>หมายเหตุ</u> กราฟแบบบริบูรณ์ที่มีจุดยอดทั้งหมด $n$ จุด จะมีจำนวนเส้นเชื่อมจำนวน $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้น

**ตัวอย่าง 2.3** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{w, x, y, z\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{wx, wy, wz, xy, xz, yz\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

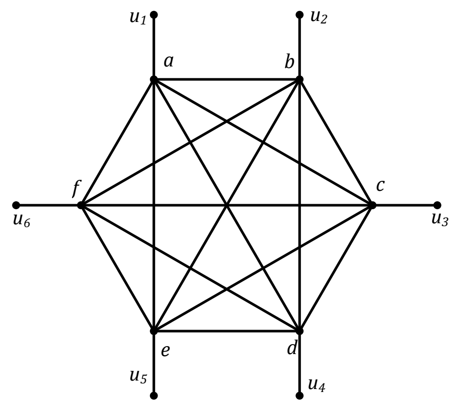
จากรูป กล่าวได้ว่า

- กราฟ $G$ เป็นกราฟบริบูรณ์ ที่มีจำนวนจุดยอดจำนวน 4 จุด หรือแทนด้วยสัญลักษณ์ $K_4$ #

**บทนิยาม 2.10 กราฟปลาดาวบริบูรณ์** $n$ ($n -$ complete starfish graph) คือกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟแบบบริบูรณ์ $K_n$ กับจุดยอดเพนแดนต์ จำนวน $n$ จุด ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกันจำนวน $n$ เส้น และสามารถเขียนแทนกราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ ด้วยสัญลักษณ์ $K_n \odot K_1$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$

<u>หมายเหตุ</u> กราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ มีจำนวนจุดยอดเท่ากับ $2n$ จุดและมีจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดเป็น $\frac{n(n+1)}{2}$ เส้น

**ตัวอย่าง 2.4** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ bc,\ bd,\ be,\ bf,\ cd,\ ce,\ de,\ df,\ ef,\ au_1, bu_2, cu_3, du_4, eu_5, fu_6\ \}$ สามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป



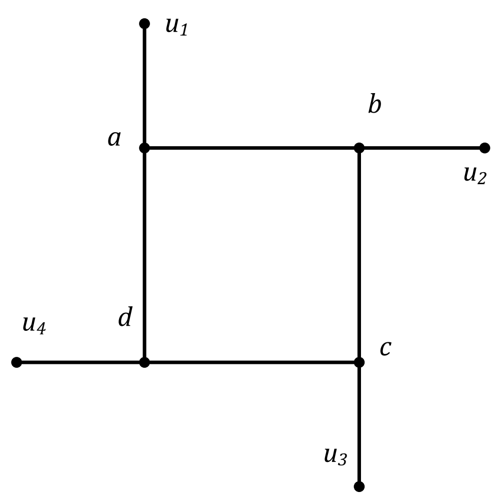

$G$

จากรูป กล่าวได้ว่า กราฟ $G$ เป็นกราฟปลาดาวบริบูรณ์ 6 เนื่องจากกราฟ $G$ เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟแบบบริบูรณ์ $K_6$ กับจุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน 6 เส้น โดยสามารถเขียนแทนกราฟปลาดาวบริบูรณ์ 6 ด้วยสัญลักษณ์ $K_6 \odot K_1$ ซึ่งมีจำนวนจุดยอด 12 จุด และมีจำนวนเส้นเชื่อม 21 เส้น #

**บทนิยาม 2.11 [4] กราฟ** $SF(n,1)$ คือกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวัฏจักร $C_n$ กับจุดยอดเพนแดนต์ จำนวน $n$ จุด ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $n$ เส้น เมื่อ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$

<u>หมายเหตุ</u> กราฟ $SF(n,1)$ มีจำนวนจุดยอดเท่ากับ $2n$ จุดและมีจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดเป็น $2n$ เส้น

**ตัวอย่าง 2.5** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{a, b, c, d, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{ab, au_1, bc, bu_2, cd, cu_3, da, du_4\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

จากรูป กล่าวได้ว่า

- กราฟ $G$ เป็นกราฟ $SF(4,1)$ ที่มีจำนวนจุดยอดจำนวน 8 จุด และจำนวนเส้นเชื่อมจำนวน 8 เส้น #

**บทนิยาม 2.12 [4] การให้สีจุดยอด $k$ สี** ($k$ - vertex coloring) ของกราฟ หมายถึง การกำหนดสี $k$ สีให้กับจุดยอดของกราฟโดยจุดยอดที่ประชิดกันต้องใช้สีที่ต่างกัน

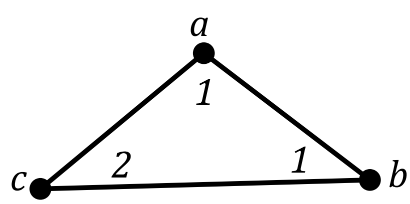
<u>หมายเหตุ</u> การให้สีจุดยอด $k$ สีของกราฟ $G$ สามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันทั่วถึง $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ โดยที่

$$f(u) \neq f(v), \ \forall uv \epsilon E(G)$$

และจำนวนนับ $1, 2, \ldots, k$ แทนสีที่ต่างกัน เรียกฟังก์ชัน $f$ ว่าเป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด $k$ สี ($k$ - vertex coloring function) และถ้ากราฟ $G$ มีฟังก์ชันการให้สีจุดยอด $k$ สี จะกล่าวว่ากราฟ $G$ มีความสามารถในการระบายสีจุดยอด $k$ สี ($k$ - colorable)

ข้อสังเกต $k \leq |V(G)|$

**ตัวอย่าง 2.6** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{a, b, c\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{ab, ac, bc\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป



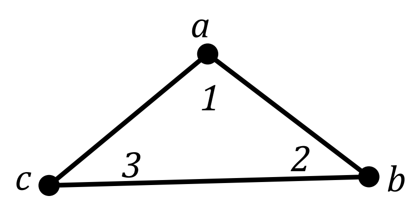

$G$

กำหนดให้ $f: \{a, \ b, \ c\} \rightarrow \{1, \ 2\}$

โดยที่ $f(a) = 1, \ f(b) = 1$ และ $f(c) = 2$

จะได้ว่า $f$ ไม่เป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด 2 สี ของกราฟ $G$

เนื่องจาก $ab \in E(G)$ และ $f(a) = \ f(b)$ #




$G$

กำหนดให้ $g: \{a, \ b, \ c\} \rightarrow \{1, \ 2, \ 3\}$

โดยที่ $g(a) = 1, \ g(b) = 2$ และ $g(c) = 3$

จะได้ว่า $g$ เป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด 3 สี ของกราฟ $G$

ดังนั้น กราฟ $G$ มีความสามารถในการให้สีจุดยอด 3 สี #

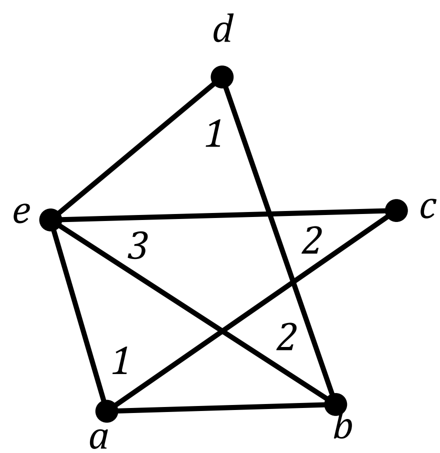
**บทนิยาม 2.13 [8] การระบายสีสมบูรณ์** $k$ สี (complete $k -$ coloring) คือ การให้สีจุดยอด $k$ สี ลงบนจุดยอดของกราฟ โดยที่สำหรับสองสีที่ต่างกัน $i$ และ $j$ ใด ๆ จะมีจุด 2 จุดที่ประชิดกันในกราฟ โดยที่จุดหนึ่งระบายสี $i$ และอีกจุดหนึ่งระบายสี $j$

<u>หมายเหตุ</u> ในการระบายสีสมบูรณ์ $k$ สีให้กับกราฟ $G$ กราฟดังกล่าวจะต้องมีเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{k}{2}$ เส้น เพื่อที่ทุกคู่ของสีจะมีจุดที่ประชิดกันถูกระบายสองสีนั้นได้ และได้บทกลับว่า ถ้า $\binom{k}{2} > |E(G)|$ แล้วกราฟ $G$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $k$ สีได้

เช่น กราฟ $G$ มีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากับ 7 เส้น และ $\binom{5}{2} = 10$

ดังนั้นกราฟ $G$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 5 สีได้ เนื่องจาก $\binom{5}{2} = 10 > 7 = |E(G)|$

**ตัวอย่าง 2.7** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{ab, ac, bd, de, ea, eb, ec\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

กำหนดให้ $f: \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\} \to \{1,\ 2,\ 3\}$

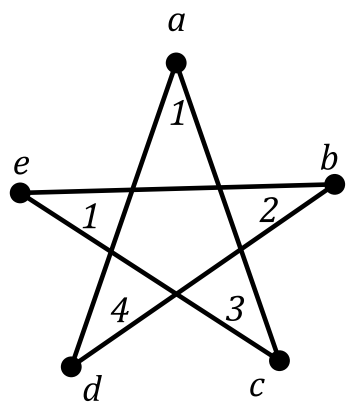
โดยที่ $f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 2,\ f(d) = 1$ และ $f(e) = 3$

จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด 3 สี ของกราฟ $G$

นั่นคือ กราฟ $G$ มีความสามารถในการให้สีจุดยอด 3 สี และทุกคู่ของสีที่ต่างกันจะถูกระบายให้กับจุด 2 จุดที่ประชิดกันในกราฟ

ดังนั้น กราฟ $G$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 3 สีได้ #

**ตัวอย่าง 2.8** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{ac, ad, bd, be, ec\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

กำหนดให้ $g: \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\} \to \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

โดยที่ $g(a) = 1,\ g(b) = 2,\ g(c) = 3,\ g(d) = 4$ และ $g(e) = 1$

จะได้ว่า $g$ เป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด 4 สี ของกราฟ $G$

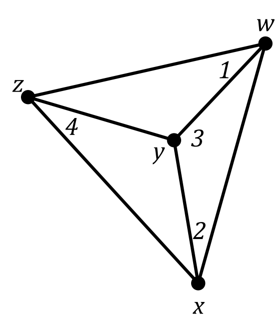
นั่นคือ กราฟ $G$ มีความสามารถในการให้สีจุดยอด 4 สี

เนื่องจาก มีบางคู่ของสีที่ต่างกันไม่ได้ถูกระบายให้กับจุดยอดที่ประชิดกันของกราฟ

ดังนั้น กราฟ $G$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 4 สีได้ #

**บทนิยาม 2.14 [8] จำนวนอโครมาติกของกราฟ** $G$ (achromatic number of $G$) คือจำนวนนับ $k$ ที่มากที่สุด ซึ่งทำให้กราฟ $G$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $k$ สีได้ โดยใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนอโครมาติดของกราฟ $G$ ด้วย $\psi(G)$

**ตัวอย่าง 2.9** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{w, x, y, z\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{wx, wy, wz, xy, yz, zx\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

กำหนดให้ $f:\{w,\ x,\ y,\ z\} \to \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

โดยที่ $f(w) = 1,\ f(x) = 2,\ f(y) = 3$ และ $f(z) = 4$

จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด 4 สี ของกราฟ $G$

นั่นคือ กราฟ $G$ มีความสามารถในการให้สีจุดยอด 4 สี

จาก ทุกคู่ของสีที่ต่างกันจะมีจุดยอด 2 จุดที่ประชิดกันของกราฟที่ถูกระบายด้วย 2 สีดังกล่าว

นั่นคือ กราฟ $G$ มีสามารถระบายสีสมบูรณ์ด้วย 4 สีได้

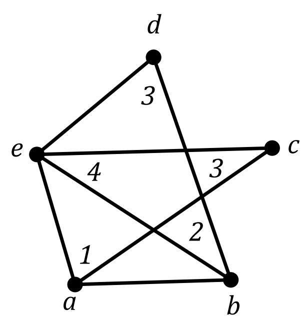
จาก $|E(G)| = 6 < 10 = \binom{5}{2}$

จาก หมายเหตุ ในบทนิยาม 2.14

นั่นคือ กราฟ $G$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 5 สีได้

ดังนั้น กราฟ $G$ มีจำนวนอโครมาติกเท่ากับ 4 $(\psi(G) = 4)$ #

**ตัวอย่าง 2.10** ให้ $G$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{ab, ac, bd, de, ea, eb, ec\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนกราฟ $G$ ได้ดังรูป




$G$

กำหนดให้ $g:\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\} \to \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

โดยที่ $g(a) = 1,\ g(b) = 2,\ g(c) = 3,\ g(d) = 3$ และ $g(e) = 4$

จะได้ว่า $g$ เป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด 4 สี ของกราฟ $G$

นั่นคือ กราฟ $G$ มีความสามารถในการให้สีจุดยอด 4 สี

จาก ทุกคู่ของสีที่ต่างกันจะมีจุดยอด 2 จุดที่ประชิดกันของกราฟที่ถูกระบายด้วย 2 สีดังกล่าว

นั่นคือ กราฟ $G$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 4 สีได้

จาก $|E(G)| = 7 < 10 = \binom{5}{2}$

จาก หมายเหตุ ในบทนิยาม 2.14

นั่นคือ กราฟ $G$ ไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ด้วย 5 สีได้

ดังนั้น กราฟ $G$ มีจำนวนอโครมาติกเท่ากับ 4 $(\psi(G) = 4)$ #

**ทฤษฎีบท 2.15 [2]** ให้ $n$ เป็นจำนวนคี่ที่ $n \geq 3$ จะได้ว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}}\right) = n$

**ทฤษฎีบท 2.16 [2]** ให้ $n$ เป็นจำนวนคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+1}\right) = n - 1$

**ทฤษฎีบท 2.17 [2]** ให้ $n$ เป็นจำนวนคี่ที่ $n \geq 3$ และ $m \in \{2, 3, 4, \dots, n-1\}$ จะได้ว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+m}\right) = n$

**ทฤษฎีบท 2.18 [2]** ให้ $n$ เป็นจำนวนคู่ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}\right) = n$

**ทฤษฎีบท 2.19 [2]** ให้ $n$ เป็นจำนวนคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m \in \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ จะได้ว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+m}\right) = n - 1$

**ทฤษฎีบท 2.20 [2]** ให้ $n$ เป็นจำนวนคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m \in \{1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ จะได้ว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}\right) = n$

**บทนิยาม 2.21 [10]** สำหรับจำนวนจริง $x$ ใดๆ $\lfloor x \rfloor$ คือจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $x$

**ทฤษฎีบท 2.22 [10]** ให้ $x$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$ เมื่อ $m$ เป็นจำนวนเต็ม

# บทที่ 3

## ผลการศึกษา (Main results)

ในการหาจำนวนอโครมาติกของกราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ และขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF(n,1)$ ต้องมีบทตั้งและทฤษฎีบทประกอบเหล่านี้มาช่วยในการพิสูจน์ และในการศึกษาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF(n,1)$ ซึ่งมีการแบ่งศึกษาเป็นกรณี จำนวน 6 กรณี ประกอบได้ด้วย กรณีที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 3$ โดยแบ่งย่อยออกไปอีก 3 กรณี คือ $\binom{n}{2}, \binom{n}{2}+1, \binom{n}{2}+m$ โดยที่ $m \epsilon \{2,3,\dots,n-1\}$ และกรณีที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ โดยแบ่งย่อยออกไปอีก 3 กรณี คือ $\binom{n}{2}+\frac{n}{2}, \binom{n}{2}+l$ โดยที่ $l \epsilon \{0,1,\dots,\frac{n}{2}-1\}$ และ $\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+p$ โดยที่ $p \epsilon \{1,2,\dots,\frac{n}{2}-1\}$ เพื่อให้ง่ายต่อการศึกษาและศึกษาได้ครบจำนวนนับ $n$ และเนื่องจากจำนวนอโครมาติกของกราฟมีการเปลี่ยนแปลงไปตามจำนวนจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟนั้น ๆ

### 3.1 กราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$

**ทฤษฎีบท 3.1.1** ให้ $n$ เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า $\psi(K_n) = n$

**การพิสูจน์** กำหนดให้ $n$ เป็นจำนวนนับ และ $K_n$ เป็นกราฟแบบบริบูรณ์ที่มี $n$ จุดยอด

จากบทนิยาม 2.9

จะได้ว่า กราฟ $K_n$ ทุกคู่ของจุดยอดประชิดกัน

กำหนดให้ $f: V(K_n) \to \{1,\ 2, \dots ,\ n\}$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป $f(v_i) = i$ เมื่อ $\forall v_i \in V(G)$ และ $i = 1,\ 2, \dots ,\ n$

นั่นคือ $f(u) \neq f(v)\ ,\ \forall uv \epsilon E(K_n)$

จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันการให้สีจุดยอด $n$ สี ของกราฟ $K_n$

จากบทนิยาม 2.12

นั่นคือ กราฟ $K_n$ มีความสามารถในการให้สีจุดยอด $n$ สี

จาก ทุกคู่ของสีที่ต่างกันจะมีจุดยอด 2 จุดที่ประชิดกันของกราฟที่ถูกระบายด้วย 2 สีดังกล่าว

และ จากบทนิยาม 2.13

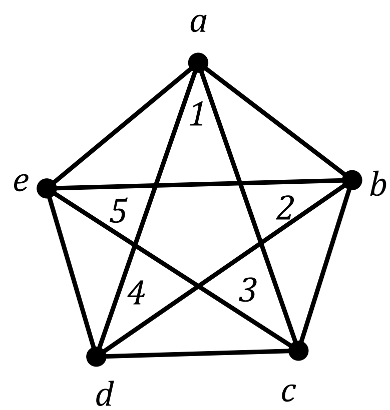
นั่นคือ กราฟ $K_n$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

จาก กราฟ $K_n$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $K_n$ น้อยกว่า $n+1$

จากบทนิยาม 2.14

ดังนั้น กราฟ $K_n$ มีจำนวนอโครมาติก คือ $n$ $(\psi(K_n) = n)$ #

**ตัวอย่างที่ 3.1.1** ให้ $K_5$ เป็นกราฟบริบูรณ์ ที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(K_5) = \{a, b, c, d, e\}$ และ $f: V(K_5) \to \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ โดยที่ $f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 3,\ f(d) = 4$ และ $f(e) = 5$ จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันการระบายสีสมบูรณ์ 5 สีของกราฟ $K_5$ ดังรูป




$K_5$

นั่นคือ กราฟ $K_5$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 5 สีได้

จาก กราฟ $K_5$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 6 สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $K_5$ น้อยกว่า 6 จุด

ดังนั้น กราฟ $K_5$ มีจำนวนอโครมาติกเป็น 5 $(\psi(K_5) = 5)$ #

**บทตั้ง 3.1.2** ให้ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จะได้ว่ากราฟ $K_n \odot K_1$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + 1$ สีได้

**การพิสูจน์** จากกราฟ $K_n \odot K_1$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟบริบูรณ์ $K_n$ กับจุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $n$ เส้น

นั่นคือ จุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $K_n$ และจุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะไม่ประชิดกันเอง

โดยบทตั้งที่ 3.1.1

ที่กล่าวว่า $\psi(K_n) = n$

นั่นคือ กราฟ $K_n$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

จาก การสร้างของกราฟ $K_n \odot K_1$

สมมติให้จุดยอดเพนแดนต์ทั้ง $n$ จุด ถูกระบายสีด้วยสีใหม่ ที่ไม่ใช่สีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ สีแรก กล่าวคือจุดยอดเพนแดนต์ทุกจุดถูกระบายสีด้วยสีที่ $n+1$

จาก จุดยอดเพนแดนต์ประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $K_n$ และจุดยอดของกราฟ $K_n$ ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$

นั่นคือ สีที่ $n+1$ จะประชิดกับสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$

จากบทนิยาม 2.13

ดังนั้น กราฟ $K_n \odot K_1$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้ #

**บทตั้ง 3.1.3** ให้ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จะได้ว่ากราฟ $K_n \odot K_1$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+2$ สีได้

**การพิสูจน์** จากกราฟ $K_n \odot K_1$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟบริบูรณ์ $K_n$ กับจุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $n$ เส้น

นั่นคือ จำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟ $K_n \odot K_1$ คือ $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$

หรือ $|E(K_n \odot K_1)| = \frac{n(n+1)}{2}$

พิจารณา $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{(n!)(2!)}$

$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

จาก $\frac{n(n+1)}{2} < \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

นั่นคือ $|E(K_n \odot K_1)| = \frac{n(n+1)}{2} < \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2}$

เนื่องจาก กราฟที่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+2$ สีได้ จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{n+2}{2}$ เส้น

ดังนั้น กราฟ $K_n \odot K_1$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+2$ สีได้ #

**ทฤษฎีบท 3.1.4** ให้ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จะได้ว่าจำนวนอโครมาติกของกราฟ $K_n \odot K_1$ คือ $n+1$ $(\psi(K_n \odot K_1) = n+1)$

**การพิสูจน์** จากบทตั้งที่ 3.1.2

ที่กล่าวว่า กราฟ $K_n \odot K_1$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

จากบทตั้งที่ 3.1.3

ที่กล่าว กราฟ $K_n \odot K_1$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+2$ สีได้

ดังนั้น กราฟ $K_n \odot K_1$ มีจำนวนอโครมาติกคือ $n+1$

นั่นคือ $\psi(K_n \odot K_1) = n+1$ #

## 3.2 กราฟ $SF(n,1)$

**บทตั้ง 3.2.1** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 2$ จะได้ว่า $\frac{18n-3}{8} > 2n$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 2$

และ $P(n)$ แทน $\frac{18n-3}{8} > 2n$

พิจารณา $P(2)$

จะได้ว่า $\frac{18(2)-3}{8} = \frac{33}{8} = 4.125 > 4 = 2(2)$ เป็นจริง

นั้นคือ $P(2)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 2$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั้นคือ $\frac{18k-3}{8} > 2k$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา $\frac{18(k+1)-3}{8} = \frac{18k-3}{8} + \frac{18}{8} = \frac{18k-3}{8} + 2.25$

และ $2(k+1) = 2k+2$

จากสมมติฐาน และ $2.25 > 2$

นั่นคือ $\frac{18(k+1)-3}{8} > 2(k+1)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 2$ นั้นคือ $\frac{18n-3}{8} > 2n$ #

**บทตั้ง 3.2.2** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่า $\frac{9(2n+1)}{8} > 2(n+1)$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 4$

และ $P(n)$ แทน $\frac{9(2n+1)}{8} > 2(n+1)$

พิจารณา $P(4)$

จะได้ว่า $\frac{9(2(4)+1)}{8} = \frac{81}{8} = 10.125 > 10 = 2(4+1)$ เป็นจริง

นั้นคือ $P(4)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 4$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั้นคือ $\frac{9(2k+1)}{8} > 2(k+1)$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา $\frac{9(2(k+1)+1)}{8} = \frac{9(2k+1+2)}{8} = \frac{9(2k+1)}{8} + \frac{18}{8}$

และ $2\big((k+1)+1\big) = 2(k+1)+2$

จากสมมติฐาน และ $\frac{18}{8} > 2$

นั่นคือ $\frac{9(2(k+1)+1)}{8} > 2\big((k+1)+1\big)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 4$ นั้นคือ $\frac{9(2n+1)}{8} > 2(n+1)$ #

**บทตั้ง 3.2.3** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 3$ จะได้ว่า $\frac{3(6n+1)}{8} > 2n+1$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 3$

และ $P(n)$ แทน $\frac{3(6n+1)}{8} > 2n+1$

พิจารณา $P(3)$

จะได้ว่า $\frac{3(6(3)+1)}{8} = \frac{57}{8} = 7.125 > 7 = 2(3)+1$ เป็นจริง

นั้นคือ $P(3)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 3$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั้นคือ $\frac{3(6k+1)}{8} > 2k+1$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา $\frac{3(6(k+1)+1)}{8} = \frac{3\big((6k+1)+6\big)}{8} = \frac{3(6k+1)}{8} + \frac{18}{8}$

และ $2(k+1)+1 = 2k+1+2$

จากสมมติฐาน และ $\frac{18}{8} > 2$

นั่นคือ $\frac{3(6(k+1)+1)}{8} > 2(k+1)+1$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 3$ นั้นคือ $\frac{3(6n+1)}{8} > 2n+1$ #

**บทตั้ง 3.2.4** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 5$

และ $P(n)$ แทน $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)$

พิจารณา $P(5)$

จะได้ว่า $\frac{3(3(5)-1)\big((5)-1\big)}{8} = \frac{168}{8} = 21 > 20 = 5(5-1)$ เป็นจริง

นั้นคือ $P(5)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 5$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\frac{3(3k-1)(k-1)}{8} > k(k-1)$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\frac{3(3(k+1)-1)((k+1)-1)}{8} &= \frac{3(3k+3-1)(k+1-1)}{8} \\
&= \frac{3((3k-1)+3)((k-1)+1)}{8} \\
&= \frac{3((3k-1)(k-1)+3(k-1)+(3k-1)+3)}{8} \\
&= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8} + \frac{3(3(k-1)+(3k-1)+3)}{8} \\
&= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8} + \frac{3(3k-3+3k-1+3)}{8} \\
&= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8} + \frac{3(6k-1)}{8} \\
&= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8} + \frac{18k-3}{8}
\end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
(k+1)(k+1-1) &= (k+1)((k-1)+1) \\
&= k(k-1)+(k-1)+k+1 \\
&= k(k-1)+2k
\end{aligned}$$

จากบทตั้ง 3.2.1

ที่กล่าวว่า $\forall n \geq 2$ จะได้ว่า $\frac{18n-3}{8} > 2n$

และจากสมมติฐาน

นั่นคือ $\frac{3(3(k+1)-1)((k+1)-1)}{8} > (k+1)((k+1)-1)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็ม และ $n \geq 5$ นั้นคือ $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)$ #

**บทตั้ง 3.2.5** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 7$ จะได้ว่า $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)+2$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 7$

และ $P(n)$ แทน $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)+2$

พิจารณา $P(7)$

จะได้ว่า $\frac{3(3(7)-1)((7)-1)}{8} = \frac{360}{8} = 45 > 44 = 7(7-1)+2$ เป็นจริง

นั้นคือ $P(7)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 7$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั้นคือ $\frac{3(3k-1)(k-1)}{8} > k(k-1)+2$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}\frac{3(3(k+1)-1)((k+1)-1)}{8} &= \frac{3(3k+3-1)(k+1-1)}{8}\\ &= \frac{3((3k-1)+3)((k-1)+1)}{8}\\ &= \frac{3((3k-1)(k-1)+3(k-1)+(3k-1)+3)}{8}\\ &= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8}+\frac{3(3(k-1)+(3k-1)+3)}{8}\\ &= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8}+\frac{3(3k-3+3k-1+3)}{8}\\ &= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8}+\frac{3(6k-1)}{8}\\ &= \frac{3((3k-1)(k-1))}{8}+\frac{18k-3}{8}\end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}(k+1)(k+1-1)+2 &= (k+1)((k-1)+1)+2\\ &= k(k-1)+(k-1)+k+1+2\\ &= k(k-1)+2+2k\end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 3.2.1

ที่กล่าวว่า $\forall n \geq 2$ จะได้ว่า $\frac{18n-3}{8} > 2n$

และจากสมมติฐาน

นั่นคือ $\frac{3(3(k+1)-1)((k+1)-1)}{8} > (k+1)((k+1)-1)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็ม และ $n \geq 7$ นั่นคือ $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)$ #

**บทตั้ง 3.2.6** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2,3,4,\dots,n-1\}$ จะได้ว่า $\frac{(3n+1)(3n-1)}{8} > n(n-1)+2m$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2,3,4,\dots,n-1\}$

กำหนดให้ $m = max\{2,3,4,\dots,n-1\}$

และ $P(n)$ แทน $\frac{(3n+1)(3n-1)}{8} > n(n-1)+2(n-1) = (n+2)(n-1)$

พิจารณา $P(7)$

จะได้ว่า $\frac{(3(7)+1)(3(7)-1)}{8} = \frac{440}{8} = 55 > 54 = (7+2)(7-1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $P(7)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 7$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\frac{(3k+1)(3k-1)}{8} > (k+2)(k-1)$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา $\frac{(3(k+1)+1)(3(k+1)-1)}{8} = \frac{(3k+3+1)(3k+3-1)}{8}$

$= \frac{((3k+1)+3)((3k-1)+3)}{8}$

$= \frac{(3k+1)(3k-1)+3(3k-1)+3(3k+1)+9}{8}$

$= \frac{(3k+1)(3k-1)}{8} + \frac{3(3k-1)+3(3k+1)+9}{8}$

$= \frac{(3k+1)(3k-1)}{8} + \frac{3(3k-1+3k+1+3)}{8}$

$= \frac{(3k+1)(3k-1)}{8} + \frac{3(6k+3)}{8}$

$= \frac{(3k+1)(3k-1)}{8} + \frac{9(2k+1)}{8}$

พิจารณา $((k+1)+2)((k+1)-1) = ((k+2)+1)((k-1)+1)$

$= (k+2)(k-1) + (k-1) + (k+2) + 1$

$= (k+2)(k-1) + 2(k+1)$

จากบทตั้ง 3.2.2

ที่กล่าวว่า $\forall n \geq 4$ จะได้ว่า $\frac{9(2n+1)}{8} > 2(n+1)$

และจากสมมติฐาน

นั่นคือ $\frac{(3(k+1)+1)(3(k+1)-1)}{8} > ((k+1)+2)((k+1)-1)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2, 3, 4, \dots, n-1\}$ จะได้ว่า $\frac{(3n+1)(3n-1)}{8} > n(n-1) + 2m$ #

**บทตั้ง 3.2.7** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 1$ จะได้ว่า $\frac{18}{4}n + \frac{15}{4} > 2(n+1)$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq$

และ $P(n)$ แทน $\frac{18}{4}n + \frac{15}{4} > 2(n+1)$

พิจารณา $P(1)$

จะได้ว่า $\frac{18}{4}(1) + \frac{15}{4} = \frac{18+15}{4} = \frac{33}{4} = 8.25 > 4 = 2(1+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 1$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\frac{18}{4}k + \frac{15}{4} > 2(k+1)$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา $\frac{18}{4}(k+1) + \frac{15}{4} = \frac{18}{4}k + \frac{33}{4}$

พิจารณา $2((k+1)+1) = 2(k+1) + 2$

เห็นได้ชัดว่า $\frac{33}{4} > 2$

และจากสมมติฐาน

นั่นคือ $\frac{18}{4}(k+1)+\frac{15}{4} > 2((k+1)+1)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 1$ จะได้ว่า $\frac{18}{4}n+\frac{15}{4} > 2(n+1)$ #

**บทตั้ง 3.2.8** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\left\{0,1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1\right\}$ จะได้ว่า $\frac{(3n)(3n-2)}{8} > n(n-1)+2m$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\left\{0,1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1\right\}$

กำหนดให้ $m = max\left\{0,1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1\right\}$

และ $P(n)$ แทน $\frac{(3n)(3n-2)}{8} > n(n-1)+2\left(\frac{n}{2}-1\right)$

พิจารณา $P(4)$

จะได้ว่า $\frac{(3(4))(3(4)-2)}{8} = \frac{120}{8} = 15 > 14 = 4(4-1)+2\left(\frac{4}{2}-1\right)$ เป็นจริง

นั่นคือ $P(4)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 4$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\frac{(3k)(3k-2)}{8} > k(k-1)+2\left(\frac{k}{2}-1\right)$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}\frac{(3(k+1))(3(k+1)-2)}{8} &= \frac{(3k+3)(3k+3-2)}{8}\\ &= \frac{(3k+3)((3k-2)+3)}{8}\\ &= \frac{(3k)(3k-2)+3(3k-2)+3(3k)+9}{8}\\ &= \frac{(3k)(3k-2)}{8}+\frac{3(3k-2)+3(3k)+9}{8}\\ &= \frac{(3k)(3k-2)}{8}+\frac{3(3k-2+3k+3)}{8}\\ &= \frac{(3k)(3k-2)}{8}+\frac{3(6k+1)}{8}\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}(k+1)((k+1)-1)+2\left(\frac{(k+1)}{2}-1\right) &= (k+1)((k-1)+1)+2\left(\left(\frac{k}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\right)\\ &= (k)(k-1)+k+(k-1)+1+2\left(\frac{k}{2}-1\right)+1\\ &= (k)(k-1)+2\left(\frac{k}{2}-1\right)+2k+1\end{aligned}$$

จากบทตั้ง 3.2.3

ที่กล่าวว่า $\forall n \geq 3$ จะได้ว่า $\frac{3(6n+1)}{8} > 2n+1$

และจากสมมติฐาน

นั่นคือ $\frac{(3(k+1)+1)(3(k+1)-1)}{8} > \big((k+1)+2\big)\big((k+1)-1\big)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 4$ และ $m \epsilon \left\{2, 3, 4, \dots, \frac{n}{2} - 1\right\}$ จะได้ว่า $\frac{(3n+1)(3n-1)}{8} > n(n-1) + 2m$ #

**บทตั้ง 3.2.9** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 4$ และ $m \epsilon \left\{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\right\}$ จะได้ว่า $\frac{(3n)(3n+2)}{4} > n^2 + 2m$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 4$ และ $m \epsilon \left\{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\right\}$

กำหนดให้ $m = max\left\{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\right\}$

และ $P(n)$ แทน $\frac{(3n)(3n+2)}{4} > n^2 + 2m = n^2 + n - 2$

พิจารณา $P(4)$

จะได้ว่า $\frac{(3(4))(3(4)+2)}{4} = \frac{168}{4} = 42 > 18 = 16 + 4 - 2 = 4^2 + 4 - 2$ เป็นจริง

นั้นคือ $P(4)$ เป็นจริง

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $k \geq 4$ และ $P(k)$ เป็นจริง

นั้นคือ $\frac{(3k)(3k+2)}{4} > k^2 + k - 2$

ต่อไปจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
\frac{(3(k+1))(3(k+1)+2)}{4} &= \frac{(3k+3)(3k+3+2)}{4} \\
&= \frac{(3k+3)\big((3k+2)+3\big)}{4} \\
&= \frac{(3k)(3k+2)+3(3k+2)+3(3k)+9}{4} \\
&= \frac{(3k)(3k+2)}{4} + \frac{3(3k+2)+3(3k)+9}{4} \\
&= \frac{(3k)(3k+2)}{8} + \frac{3(3k+2+3k+3)}{4} \\
&= \frac{(3k)(3k+2)}{4} + \frac{3(6k+5)}{4} \\
&= \frac{(3k)(3k+2)}{4} + \frac{18}{4}k + \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 + (k+1) - 2 &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 - 2 \\
&= k^2 + k - 2 + 2(k+1)
\end{aligned}
$$

จากบทตั้ง 3.2.7

ที่กล่าวว่า $\forall n \geq 1$ จะได้ว่า $\frac{18}{4}n + \frac{15}{4} > 2(n+1)$

และจากสมมติฐาน

นั่นคือ $\frac{(3(k+1))(3(k+1)+2)}{4} > (k+1)^2 + (k+1) - 2$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง โดยที่ ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 4$ และ $m \epsilon \left\{ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}$ จะได้ว่า $\frac{(3n)(3n+2)}{4} > n^2 + 2m$ #

**บทตั้ง 3.2.10** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

**การพิสูจน์** จากกราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวัฏจักร $C_{\binom{n}{2}}$ กับจุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $\binom{n}{2}$ เส้น

นั่นคือ แต่ละจุดยอดเพนแดนต์จะประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}}$ และจุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะไม่ประชิดกันเอง

จากทฤษฎีบท 2.15

ที่กล่าวว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}}\right) = n$ สำหรับ จำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

นั่นหมายความว่า กราฟ $C_{\binom{n}{2}}$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

สมมติให้จุดยอดเพนแดนต์ทั้ง $\binom{n}{2}$ จุด ถูกระบายสี ด้วยสีใหม่ ที่ไม่ใช่สีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ สีแรก กล่าวคือจุดเพนแดนต์ทุกจุด จะถูกระบายสีด้วยสีที่ $n+1$

จาก จุดยอดเพนแดนต์ประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}}$ และจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}}$ ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$

นั่นคือ จุดยอดเพนแดนต์ที่ถูกระบายด้วยสีที่ $n+1$ จะประชิดกับจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}}$ ที่ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ ด้วย

จากบทนิยาม 2.13

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.11** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ จะได้ว่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+1$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.10

ที่กล่าวว่า กราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) \geq n+1$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+1$ #

**บทตั้ง 3.2.12** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \frac{\binom{n}{2}}{n}$ สีได้

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$

จาก $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2},1\right)\right)\right| = 2\left(\binom{n}{2}\right)$

$= 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(2)!}\right)$

$= 2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$

$= n(n-1)$

พิจารณา $\frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{n(n-2)!(2)!}$

$= \frac{(n-1)}{2}$

และจาก $\binom{n+\frac{\binom{n}{2}}{n}}{2} = \binom{n+\frac{(n-1)}{2}}{2}$

$= \binom{\frac{3n-1}{2}}{2}$

$= \frac{\left(\frac{3n-1}{2}\right)\left(\frac{3n-1}{2}-1\right)\left(\frac{3n-1}{2}-2\right)!}{\left(\frac{3n-1}{2}-2\right)!(2!)}$

$= \frac{3(3n-1)(n-1)}{8}$

จากบทตั้ง 3.2.4

ที่กล่าวว่า ถ้าให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)$

นั่นคือ $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right)\right| = n(n-1) < \frac{3(3n-1)(n-1)}{8} = \binom{n+\frac{\binom{n}{2}}{n}}{2}$

เนื่องจาก กราฟที่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \frac{\binom{n}{2}}{n}$ สีได้ จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{n+\frac{\binom{n}{2}}{n}}{2}$ เส้น

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \frac{\binom{n}{2}}{n}$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.13** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ว่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF(\binom{n}{2},\ 1)$ คือ $n + \frac{\binom{n}{2}}{n}$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.12

ที่กล่าวว่า กราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \frac{\binom{n}{2}}{n}$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) < n + \frac{\binom{n}{2}}{n}$

ดังนั้น ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n + \frac{\binom{n}{2}}{n}$ #

**ทฤษฎีบท 3.2.14** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ว่า $n + 1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2},1\right)\right) \leq n + \frac{\binom{n}{2}}{n} - 1$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.11

ที่กล่าวว่า ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+1$

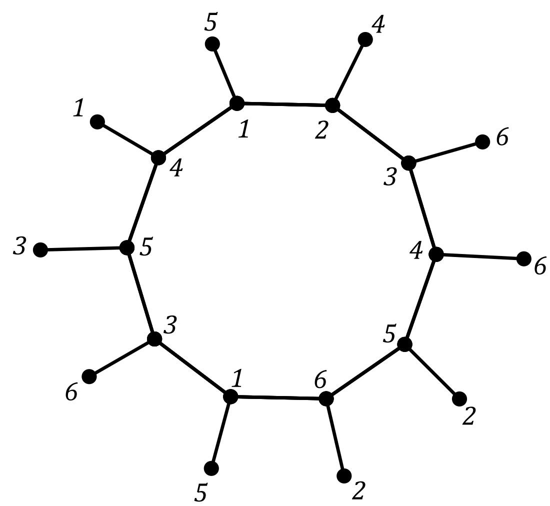
จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.13

ที่กล่าวว่า ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+\frac{\binom{n}{2}}{n}$

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},1\right)\right)\le n+\frac{\binom{n}{2}}{n}-1$

ดังนั้น $$n+1\le\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},1\right)\right)\le n+\frac{\binom{n}{2}}{n}-1$$ #

**ตัวอย่างที่ 3.2.1** ให้ $SF\left(\binom{5}{2},1\right)$ เป็นกราฟที่มีการระบายสีสมบูรณ์ให้กับจุดยอด ดังรูป




$SF\left(\binom{5}{2},1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 6 สีได้

และ กราฟ $SF\left(\binom{5}{2},1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 7 สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $SF\left(\binom{5}{2},1\right)$ น้อยกว่า 21 จุด

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{5}{2},1\right)$ มีจำนวนอโครมาติกเป็น 6 $\left(\psi\left(SF\left(\binom{5}{2},1\right)\right)=6\right)$ #

**บทตั้ง 3.2.15** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n\ge 3$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

**การพิสูจน์** จากกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวัฏจักร $C_{\binom{n}{2}+1}$ กับ จุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $\binom{n}{2}+1$ เส้น

นั่นคือ แต่ละจุดยอดเพนแดนต์จะประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+1}$ และจุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะไม่ประชิดกันเอง

จากทฤษฎีบท 2.16

ที่กล่าวว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}}+1\right)=n-1$ สำหรับ จำนวนเต็มคี่ที่ $n\ge 3$

นั่นหมายความว่า กราฟ $C_{\binom{n}{2}+1}$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n-1$ สีได้

สมมติให้จุดยอดเพนแดนต์ทั้ง $\binom{n}{2}+1$ จุด ถูกระบายสี ด้วยสีใหม่ ที่ไม่ใช่สีที่ $1$ ถึงสีที่ $n-1$ สีแรก กล่าวคือจุดเพนแดนต์ทุกจุด จะถูกระบายสีด้วยสีที่ $n$

จาก จุดยอดเพนแดนต์ประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+1}$ และจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+1}$ ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n-1$

นั่นคือ จุดยอดเพนแดนต์ที่ถูกระบายด้วยสีที่ $n$ จะประชิดกับจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+1}$ ที่ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n-1$ ด้วย

จากบทนิยาม 2.13

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.16** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ จะได้ว่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ คือ $n$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.15

ที่กล่าวว่า กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)\right) \geq n$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ คือ $n$ #

**บทตั้ง 3.2.17** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 7$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor$ สีได้

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 7$

จาก
$$\begin{aligned}\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2}+1,1\right)\right)\right| &= 2\left(\binom{n}{2}+1\right)\\ &= 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(2)!}+1\right)\\ &= 2\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)\\ &= n(n-1)+2\end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor &= \left\lfloor\frac{n(n-1)+2}{2n}\right\rfloor\\ &= \left\lfloor\frac{n-1}{2}+\frac{1}{n}\right\rfloor\end{aligned}$$

จาก $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่

จะได้ว่า $n-1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

นั่นคือ $2|(n-1)$

ดังนั้น $\frac{n-1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

จากทฤษฎีบท 2.21 และ ทฤษฎีบท 2.22

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{n-1}{2}+\frac{1}{n}\right\rfloor &= \frac{n-1}{2}+\left\lfloor\frac{1}{n}\right\rfloor\\ &= \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor = \frac{n-1}{2}$

และจาก $\binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor}{2} = \binom{n+\frac{n-1}{2}}{2}$

$$= \binom{\frac{3n-1}{2}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{3n-1}{2}\right)\left(\frac{3n-1}{2}-1\right)\left(\frac{3n-1}{2}-2\right)!}{\left(\frac{3n-1}{2}-2\right)!(2!)}$$

$$= \frac{3(3n-1)(n-1)}{8}$$

จากบทตั้ง 3.2.5

ที่กล่าวว่า ถ้าให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 7$ จะได้ว่า $\frac{3(3n-1)(n-1)}{8} > n(n-1)+2$

นั้นคือ $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2}+1,1\right)\right)\right| = n(n-1)+2 < \frac{3(3n-1)(n-1)}{8} = \binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor}{2}$

จาก การระบายสีสมบูรณ์ลงบนจุดยอดของกราฟจำนวน $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor$ สีได้ จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor}{2}$ เส้น

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.18** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ จะได้ว่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ คือ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.17

ที่กล่าวว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) < n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor$

ดังนั้น ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor$ #

**ทฤษฎีบท 3.2.19** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ จะได้ว่า

$$n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+1,1\right)\right) \leq n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor - 2$$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.16

ที่กล่าวว่า ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ คือ $n$

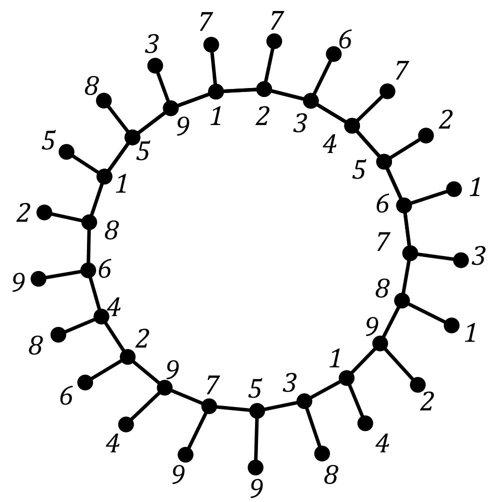
จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.18

ที่กล่าวว่า ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+1,\ 1\right)$ คือ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor - 1$

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+1,1\right)\right) \leq n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor - 2$

ดังนั้น $$n \le \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+1,1\right)\right) \le n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+1}{n} \right\rfloor - 2$$ #

**ตัวอย่างที่ 3.2.2** ให้ $SF\left(\binom{7}{2}+1,1\right)$ เป็นกราฟที่มีการระบายสีสมบูรณ์ให้กับจุดยอด ดังรูป



เนื่องจาก กราฟ $SF\left(\binom{7}{2}+1,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 8 สีได้

$SF\left(\binom{7}{2}+1,1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 9 สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $SF\left(\binom{7}{2}+1,1\right)$ น้อยกว่า 36 จุด

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{7}{2}+1,1\right)$ มีจำนวนอโครมาติกเป็น 8 $\left(\psi\left(SF\left(\binom{7}{2}+1,1\right)\right)=8\right)$ #

**บทตั้ง 3.2.20** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \ge 3$ และ $m\epsilon\{2,3,\dots,n-1\}$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \ge 3$ และ $m\epsilon\{2,3,\dots,n-1\}$

จากกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวัฏจักร $C_{\binom{n}{2}+m}$ กับ จุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $\binom{n}{2}+m$ เส้น

นั่นคือ แต่ละจุดยอดเพนแดนต์จะประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ และจุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะไม่ประชิดกันเอง

จากทฤษฎีบท 2.17

ที่กล่าวว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+m}\right)=n+1$ สำหรับ จำนวนเต็มคี่ที่ $n \ge 3$ และ $m\epsilon\{2,3,\dots,n-1\}$

นั่นหมายความว่า กราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

สมมติให้จุดยอดเพนแดนต์ทั้ง $\binom{n}{2}+m$ จุด ถูกระบายสี ด้วยสีใหม่ ที่ไม่ใช่สีที่ 1 ถึงสีที่ $n$ สีแรก กล่าวคือจุดเพนแดนต์ทุกจุด จะถูกระบายสีด้วยสีที่ $n+1$

จาก จุดยอดเพนแดนต์ประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ และจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ ถูกระบายสีด้วยสีที่ 1 ถึงสีที่ $n$

นั่นคือ จุดยอดเพนแดนต์ที่ถูกระบายด้วยสีที่ $n+1$ จะประชิดกับจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ ที่ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ ด้วย

จากบทนิยาม 2.13

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.21** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ จะได้ว่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF(\binom{n}{2},\ 1)$ คือ $n+1$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.20

ที่กล่าวว่า กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)\right) \geq n+1$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)$ คือ $n+1$ #

**บทตั้ง 3.2.22** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2,3,\ldots n-1\}$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor+1$ สีได้

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2,3,4,\ldots,n-1\}$

จาก
$$\begin{aligned}\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)\right)\right| &= 2\left(\binom{n}{2}+m\right)\\ &= 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(2)!}+m\right)\\ &= 2\left(\frac{n(n-1)}{2}+m\right)\\ &= n(n-1)+2m\end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor &= \left\lfloor\frac{n(n-1)+2m}{2n}\right\rfloor\\ &= \left\lfloor\frac{(n-1)}{2}+\frac{m}{n}\right\rfloor\end{aligned}$$

จาก $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่

จะได้ว่า $n-1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

นั่นคือ $2|(n-1)$

ดังนั้น $\frac{n-1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

จากทฤษฎีบท 2.21 และ ทฤษฎีบท 2.22

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{(n-1)}{2}+\frac{m}{n}\right\rfloor &= \frac{(n-1)}{2}+\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor\\ &= \frac{(n-1)}{2}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor = \frac{(n-1)}{2}$

และจาก
$$\begin{aligned}\left(\frac{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor+1}{2}\right) &= \left(\frac{n+\frac{(n-1)}{2}+1}{2}\right)\\ &= \left(\frac{\frac{3n+1}{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{3n+1}{2}\right)\left(\frac{3n+1}{2}-1\right)\left(\frac{3n+1}{2}-2\right)!}{\left(\frac{3n+1}{2}-2\right)!(2!)}$$
$$= \frac{(3n+1)(3n-1)}{8}$$

จากบทตั้ง 3.2.6

ที่กล่าวว่า ถ้าให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2, 3, \ldots n-1\}$

จะได้ว่า $\frac{(3n+1)(3n-1)}{8} > n(n-1) + 2m$

นั่นคือ $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right)\right| = n(n-1) + 2m < \frac{(3n+1)(3n-1)}{8} = \binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor+1}{2}$

จาก การระบายสีสมบูรณ์ลงบนจุดยอดของกราฟจำนวน $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ สีได้จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor+1}{2}$ เส้น

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.23** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2, 3, 4, \ldots, n-1\}$ จะได้ว่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.22

ที่กล่าวว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) < n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$

ดังนั้น ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ #

**ทฤษฎีบท 3.2.24** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2, 3, 4, \ldots, n-1\}$ จะได้ว่า

$$n + 1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right) \leq n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ และ $m \epsilon \{2, 3, 4, \ldots, n-1\}$

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.21

ที่กล่าวว่า ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + 1$

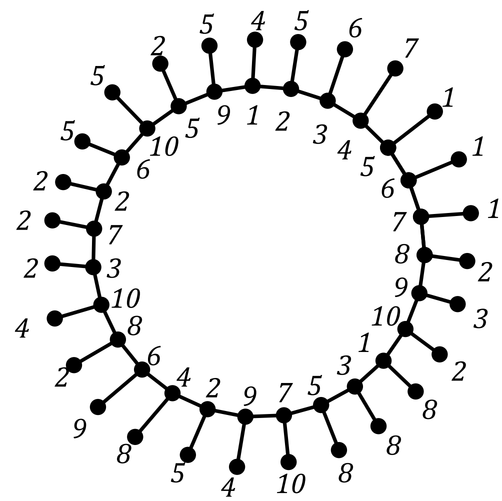
จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.23

ที่กล่าวว่า ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right) \leq n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$

ดังนั้น $n + 1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right) \leq n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$ #

**ตัวอย่างที่ 3.2.3** ให้ $SF\left(\binom{7}{2}+6,1\right)$ เป็นกราฟที่มีการระบายสีสมบูรณ์ให้กับจุดยอด ดังรูป



เนื่องจาก กราฟ $SF\left(\binom{7}{2}+6,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $10$ สีได้

และ กราฟ $SF\left(\binom{7}{2}+6,1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $11$ สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $SF\left(\binom{7}{2}+6,1\right)$ น้อยกว่า $55$ จุด

$SF\left(\binom{7}{2}+6,1\right)$ มีจำนวนอโครมาติกเป็น $10$ $\left(\psi\left(SF\left(\binom{7}{2}+6,1\right)\right)=10\right)$ #

**บทตั้ง 3.2.25** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

**การพิสูจน์** จากกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},\ 1\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวัฏจักร $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}$ กับ จุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $\binom{n}{2}+\frac{n}{2}$ เส้น

นั่นคือ แต่ละจุดยอดเพนแดนต์จะประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}$ และจุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะไม่ประชิดกันเอง

จากทฤษฎีบท 2.18

ที่กล่าวว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}\right)=n$ สำหรับ จำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$

นั่นหมายความว่า กราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

สมมติให้จุดยอดเพนแดนต์ทั้ง $\binom{n}{2}+\frac{n}{2}$ จุด ถูกระบายสี ด้วยสีใหม่ ที่ไม่ใช่สีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ สีแรก กล่าวคือจุดเพนแดนต์ทุกจุด จะถูกระบายสีด้วยสีที่ $n+1$

จาก จุดยอดเพนแดนต์ประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}$ และจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}$ ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$

นั่นคือ จุดยอดเพนแดนต์ที่ถูกระบายด้วยสีที่ $n+1$ จะประชิดกับจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}$ ที่ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ ด้วย

จากบทนิยาม 2.13

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.26** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ คือ $n+1$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.25

ที่กล่าวว่า กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) \geq n+1$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ คือ $n+1$ #

**บทตั้ง 3.2.27** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1$ สีได้

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$

จาก
$$\begin{aligned}\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)\right)\right| &= 2\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}\right)\\ &= 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(2)!}+\frac{n}{2}\right)\\ &= 2\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}\right)\\ &= n^2\end{aligned}$$

พิจารณา $\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}=\frac{n^2}{n}=n$

และจาก
$$\begin{aligned}\binom{n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1}{2} &= \binom{2n+1}{2}\\ &= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!(2!)}\\ &= (2n+1)n\\ &= 2n^2+n\end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่า $n^2 < 2n^2+n$

นั้นคือ $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)\right)\right| = n^2 < 2n^2+n = \binom{n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1}{2}$

จาก การระบายสีสมบูรณ์ลงบนจุดยอดของกราฟจำนวน $n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1$ สีได้จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1}{2}$ เส้น

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.28** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.27

ที่กล่าวว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},\ 1\right)\right) < n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1$

ดังนั้น ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1$ #

**ทฤษฎีบท 3.2.29** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่า

$$n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)\right) \leq n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}$$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.26

ที่กล่าวว่า ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+1$

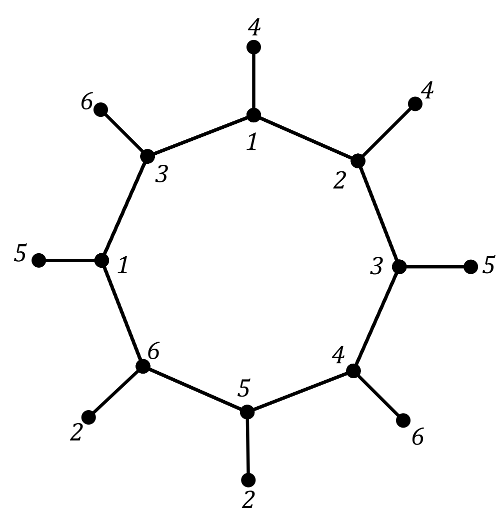
จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.28

ที่กล่าวว่า ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}+1$

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)\right) \leq n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}$

ดังนั้น $$n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)\right) \leq n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}$$ #

**ตัวอย่างที่ 3.2.4** ให้ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2},1\right)$ เป็นกราฟที่มีการระบายสีสมบูรณ์ให้กับจุดยอด ดังรูป




เนื่องจาก กราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2},1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 5 สีได้

และ กราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2},1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 6 สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2},1\right)$ น้อยกว่า 15 จุด

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2},1\right)$ มีจำนวนอโครมาติกเป็น 5 $\left(\psi\left(SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2},1\right)\right)=5\right)$ #

**บทตั้ง 3.2.30** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ \ldots, \frac{n}{2}-1\}$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

**การพิสูจน์** จากกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,\ 1\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวัฏจักร $C_{\binom{n}{2}+m}$ กับ จุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $\binom{n}{2}+m$ เส้น

นั่นคือ แต่ละจุดยอดเพนแดนต์จะประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ และจุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะไม่ประชิดกันเอง

จากทฤษฎีบท 2.19

ที่กล่าวว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+m}\right)=n-1$ สำหรับ จำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ \ldots, \frac{n}{2}-1\}$

นั่นหมายความว่า กราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n-1$ สีได้

สมมติให้จุดยอดเพนแดนต์ทั้ง $\binom{n}{2}+m$ จุด ถูกระบายสี ด้วยสีใหม่ ที่ไม่ใช่สีที่ 1 ถึงสีที่ $n-1$ สีแรก กล่าวคือจุดเพนแดนต์ทุกจุด จะถูกระบายสีด้วยสีที่ $n$

จาก จุดยอดเพนแดนต์ประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ และจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ ถูกระบายสีด้วยสีที่ 1 ถึงสีที่ $n-1$

นั่นคือ จุดยอดเพนแดนต์ที่ถูกระบายด้วยสีที่ $n$ จะประชิดกับจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+m}$ ที่ถูกระบายสีด้วยสีที่ 1 ถึงสีที่ $n-1$ ด้วย

จากบทนิยาม 2.13

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.31** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ \ldots, \frac{n}{2}-1\}$ จะได้ว่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)$ คือ $n$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.30

ที่กล่าวว่า กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) \geq n$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)$ คือ $n$ #

**บทตั้ง 3.2.32** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ \ldots, \frac{n}{2}-1\}$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor+1$ สีได้

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ \dots, \frac{n}{2}-1\}$

จาก $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)\right)\right| = 2\left(\binom{n}{2}+m\right)$

$$= 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(2)!}+m\right)$$
$$= 2\left(\frac{n(n-1)}{2}+m\right)$$
$$= n(n-1)+2m$$

พิจารณา $\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{\frac{n(n-1)}{2}+m}{n}\right\rfloor$

$$= \left\lfloor\frac{n(n-1)}{2n}+\frac{m}{n}\right\rfloor$$
$$= \left\lfloor\frac{(n-1)}{2}+\frac{m}{n}\right\rfloor$$
$$= \left\lfloor\frac{(n-2)}{2}+\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right\rfloor$$
$$= \left\lfloor\frac{(n-2)}{2}+\frac{n+2m}{2n}\right\rfloor$$

จาก $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่

จะได้ว่า $n-2$ เป็นจำนวนเต็มคู่

นั่นคือ $2|(n-2)$

ดังนั้น $\frac{n-2}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

จากทฤษฎีบท 2.22

$$\left\lfloor\frac{(n-2)}{2}+\frac{n+2m}{2n}\right\rfloor = \frac{n-2}{2}+\left\lfloor\frac{n+2m}{2n}\right\rfloor$$

กำหนดให้ $m = max\left\{0,1,2,\dots,\frac{n}{2}-1\right\}$

$$\frac{n-2}{2}+\left\lfloor\frac{n+2m}{2n}\right\rfloor = \frac{n-2}{2}+\left\lfloor\frac{n+2\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2n}\right\rfloor$$
$$= \frac{n-2}{2}+\left\lfloor\frac{2(n-1)}{2n}\right\rfloor$$
$$= \frac{n-2}{2}+\left\lfloor\frac{(n-1)}{n}\right\rfloor$$

จากทฤษฎีบท 2.21

$$\frac{n-2}{2}+\left\lfloor\frac{(n-1)}{n}\right\rfloor = \frac{n-2}{2}$$

นั่นคือ $\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor = \frac{n-2}{2}$

และจาก $\binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor+1}{2} = \binom{n+\frac{n-2}{2}+1}{2}$

$$= \binom{\frac{3n}{2}}{2}$$
$$= \frac{\left(\frac{3n}{2}\right)\left(\frac{3n}{2}-1\right)\left(\frac{3n}{2}-2\right)!}{\left(\frac{3n}{2}-2\right)!(2)!}$$
$$= \frac{(3n)(3n-2)}{8}$$

จากบทตั้ง 3.2.8

ที่กล่าวว่า ถ้าให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0, 1, \ldots \frac{n}{2} - 1\}$

จะได้ว่า $\frac{3n(3n-2)}{8} > n(n-1) + 2m$

นั้นคือ $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right)\right| = n(n-1) + 2m < \frac{(3n)(3n-2)}{8} = \left(n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1\right)$

จาก การระบายสีสมบูรณ์ลงบนจุดยอดของกราฟจำนวน $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ สีได้จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor+1}{2}$ เส้น

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)$ ไม่ความสามารถระบายสีสมบูรณ์ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.33** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ จะได้ว่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.32

ที่กล่าวว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)\right) < n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$

ดังนั้น ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$ #

**ทฤษฎีบท 3.2.34** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ จะได้ว่า

$$n \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right) \leq n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{0,1,2, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.31

ที่กล่าวว่า ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n$

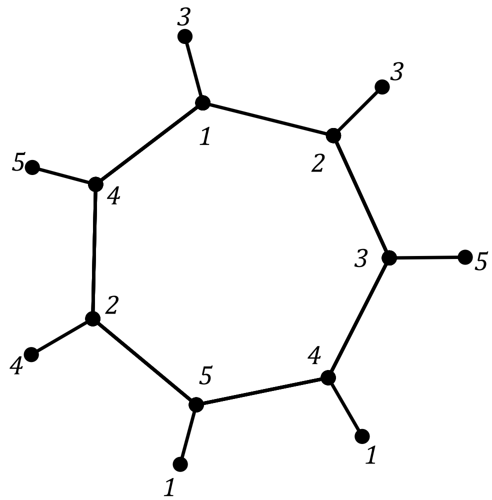
จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.33

ที่กล่าวว่า ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor + 1$

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right) \leq n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$

ดังนั้น $$n \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + m, 1\right)\right) \leq n + \left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$$ #

**ตัวอย่างที่ 3.2.5** ให้ $SF\left(\binom{4}{2}+1,1\right)$ เป็นกราฟที่มีการระบายสีสมบูรณ์ให้กับจุดยอด ดังรูป




เนื่องจาก กราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+1,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $5$ สีได้

และ กราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+1,1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $6$ สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+1,1\right)$ น้อยกว่า $15$ จุด

$SF\left(\binom{4}{2}+1,1\right)$ มีจำนวนอโครมาติกเป็น 5 $\left(\psi\left(SF\left(\binom{4}{2}+1,1\right)\right)=5\right)$ #

**บทตั้ง 3.2.35** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1,2,\dots,\frac{n}{2}-1\}$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

**การพิสูจน์** จากกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,\ 1\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวัฏจักร $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}$ กับ จุดยอดเพนแดนต์ ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ที่สมนัยกัน จำนวน $\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m$ เส้น

นั่นคือ แต่ละจุดยอดเพนแดนต์ประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}$ และจุดยอดเพนแดนต์แต่ละจุดจะไม่ประชิดกันเอง

จากทฤษฎีบท 2.20

ที่กล่าวว่า $\psi\left(C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}\right)=n$ สำหรับ จำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1,2,\dots,\frac{n}{2}-1$

นั่นหมายความว่า กราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n$ สีได้

สมมติให้จุดยอดเพนแดนต์ทั้ง $\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m$ จุด ถูกระบายสี ด้วยสีใหม่ ที่ไม่ใช่สีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ สีแรก กล่าวคือจุดเพนแดนต์ทุกจุด จะถูกระบายสีด้วยสีที่ $n+1$

จาก จุดยอดเพนแดนต์จะประชิดกับจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}$ และจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}$ ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$

นั่นคือ จุดยอดเพนแดนต์ที่ถูกระบายด้วยสีที่ $n+1$ จะประชิดกับจุดยอดของกราฟ $C_{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}$ ที่ถูกระบายสีด้วยสีที่ $1$ ถึงสีที่ $n$ ด้วย

จากบทนิยาม 2.13

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.36** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)$ คือ $n+1$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.35

ที่กล่าวว่า กราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) \geq n+1$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)$ คือ $n+1$ #

**บทตั้ง 3.2.37** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1,2,\dots,\frac{n}{2}-1\}$ จะได้ว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rfloor+1$ สีได้

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1,2,\dots,\frac{n}{2}-1\}$

จาก
$$\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)\right)\right| = 2\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m\right)$$
$$= 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(2)!}+\frac{n}{2}+m\right)$$
$$= 2\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}+m\right)$$
$$= n^2+2m$$

พิจารณา
$$\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{\frac{n^2}{2}+m}{n}\right\rfloor$$
$$= \left\lfloor\frac{n^2}{2n}+\frac{m}{n}\right\rfloor$$
$$= \left\lfloor\frac{n}{2}+\frac{m}{n}\right\rfloor$$

จาก $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่

นั่นคือ $2|n$

ดังนั้น $\frac{n}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

จากทฤษฎีบท 2.21 และ ทฤษฎีบท 2.22

$$\left\lfloor\frac{n}{2}+\frac{m}{n}\right\rfloor = \frac{n}{2}+\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor$$
$$= \frac{n}{2}$$

และจาก
$$\binom{n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rfloor+1}{2} = \binom{n+\frac{n}{2}+1}{2}$$

$$= \binom{\frac{3n+2}{2}}{2}$$
$$= \frac{\left(\frac{3n+2}{2}\right)\left(\frac{3n+2}{2}-1\right)\left(\frac{3n+2}{2}-2\right)!}{\left(\frac{3n+2}{2}-2\right)!(2!)}$$
$$= \frac{\left(\frac{3n+2}{2}\right)\left(\frac{3n+2}{2}-1\right)}{2}$$
$$= \frac{(3n+2)(3n)}{4}$$

จากบทตั้ง 3.2.9

ที่กล่าวว่า ถ้าให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1, 2, \dots \frac{n}{2} - 1\}$

จะได้ว่า $\frac{(3n+2)(3n)}{4} > n^2 + m$

นั้นคือ $\left|E\left(SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2}, 1\right)\right)\right| = n^2 + m < \frac{(3n+2)(3n)}{4} = \binom{n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}}{2}$

จาก การระบายสีสมบูรณ์ลงบนจุดยอดของกราฟจำนวน $n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor + 1$ สีได้จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมอย่างน้อย $\binom{n+\left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor+1}{2}$ เส้น

ดังนั้น กราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2} + m, 1\right)$ ไม่มีความสามารถระบายสีสมบูรณ์ $n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor + 1$ สีได้ #

**ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.38** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ จะได้ว่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor + 1$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.2.37

ที่กล่าวว่ากราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2} + m,\ 1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ $n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor + 1$ สีได้

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2},\ 1\right)\right) < n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor + 1$

ดังนั้น ขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2},\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor + 1$ #

**ทฤษฎีบท 3.2.39** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ จะได้ว่า

$$n + 1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2} + m, 1\right)\right) \leq n + \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}$$

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 4$ และ $m\epsilon\{1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$

จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.36

ที่กล่าวว่า ขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + 1$

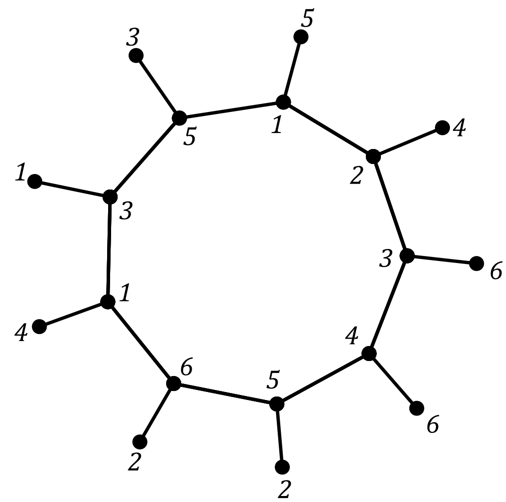
จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2.38

ที่กล่าวว่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF\left(\binom{n}{2} + \frac{n}{2} + m,\ 1\right)$ คือ $n + \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n} \right\rfloor + 1$

นั่นคือ $\psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)\right) \le n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$

ดังนั้น $n+1 \le \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)\right) \le n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$ #

**ตัวอย่างที่ 3.2.6** ให้ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2}+1,1\right)$ เป็นกราฟที่มีการระบายสีสมบูรณ์ให้กับจุดยอด ดังรูป




เนื่องจาก กราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2}+1,1\right)$ มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 6 สีได้

และ กราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2}+1,1\right)$ ไม่มีความสามารถในการระบายสีสมบูรณ์ 7 สีได้ เนื่องจากจำนวนจุดยอดของกราฟ $SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2}+1,1\right)$ น้อยกว่า 21 จุด

$SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2}+1,1\right)$ มีจำนวนอโครมาติกเป็น 6 $\left(\psi\left(SF\left(\binom{4}{2}+\frac{4}{2}+1,1\right)\right)=6\right)$ #

**บทแทรก 3.2.40** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \ge 3$ ซึ่ง $S=\left\{s \mid s=\binom{n}{2}+m\right\}$ โดยที่ $m=0,1,\dots,n-1$ จะได้ว่า $S$ ครบจำนวนนับ

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \ge 3$

จาก $\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$ และ $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

พิจารณา $\binom{n+1}{2}-\binom{n}{2}=\frac{(n+1)n}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n$

จะได้ว่า สำหรับ $\binom{n+1}{2}$ และ $\binom{n}{2}$ จะห่างกันอยู่ $n$ เสมอ

นั่นคือ ถ้า กำหนดให้ $0 \le m \le n-1$

จะได้ว่า $\binom{n}{2}+m$ เมื่อ $m=0,1,\dots,n-1$ ครบจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3

ให้ $S=\left\{s \mid s=\binom{n}{2}+m\right\}$ โดยที่ $m=0,1,\dots,n-1$

ดังนั้น $S$ ครบจำนวนนับ #

**บทแทรก 3.2.41** ให้ $n_e$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n_e \geq 3$ ซึ่ง $S_e = \{s_e | s_e = \binom{n_e}{2} + m\}$ และให้ $n_o$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n_o \geq 4$ ซึ่ง $S_o = \{s_o | s_o = \binom{n_o}{2} + m\}$ โดยที่ $m = 0,1, \ldots, n-1$ จะได้ว่า $S_e \cup S_o$ ครบจำนวนนับ

**การพิสูจน์** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 3$ และ $m = 0,1, \ldots, n-1$

และ $S = \{s | s = \binom{n}{2} + m\}$

ให้ $n_e$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n_e \geq 3$ และ $S_e = \{s_e | s_e = \binom{n_e}{2} + m\}$

ให้ $n_o$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n_o \geq 4$ และ $S_o = \{s_o | s_o = \binom{n_o}{2} + m\}$

จากสมบัติของจำนวนเต็ม

จะได้ว่า เราสามารถแบ่งจำนวนเต็ม $n$ ออกเป็น $n_e$ และ $n_o$

นั่นคือ $n = n_e \cup n_o$

จาก $S = \{s | s = \binom{n}{2} + m\}$

จะได้ว่า $S = \{s_e | s_e = \binom{n_e}{2} + m\} \cup \{s_o | s_o = \binom{n_o}{2} + m\}$

$S = S_e \cup S_o$

จากบทแทรก 3.2.40

ดังนั้น $S_e \cup S_o$ ครบจำนวนนับ #

**บทแทรก 3.2.42** ให้ $n_e$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n_e \geq 3$ ซึ่ง $S_1 = \{s_1 | s_1 = \binom{n_e}{2}\}, S_2 = \{s_2 | s_2 = \binom{n_e}{2} + 1\}$ และ $S_3 = \{s_3 | s_3 = \binom{n_e}{2} + l\}$ โดยที่ $l = 2,3, \ldots, n-1$ จะได้ว่า $S_e = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

**การพิสูจน์** ให้ $n_e$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n_e \geq 3$ และ $m = 0,1, \ldots, n-1$

และ $S_e = \{s_e | s_e = \binom{n_e}{2} + m\}$

ให้ $S_1 = \{s_1 | s_1 = \binom{n_e}{2}\}$, $S_2 = \{s_2 | s_2 = \binom{n_e}{2} + 1\}$ และ $S_3 = \{s_3 | s_3 = \binom{n_e}{2} + l\}$

โดยที่ $l = 2,3, \ldots, n-1$

จากนิยามของ $S_1, S_2, S_3$ และ $S_e$

จะได้ว่า $S_e = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ เป็นจริง #

**บทแทรก 3.2.42** ให้ $n_o$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n_o \geq 4$ ซึ่ง $S_1 = \left\{s_1 | s_1 = \binom{n_o}{2} + \frac{n_o}{2}\right\}$, $S_2 = \{s_2 | s_2 = \binom{o}{2} + k\}$ โดยที่ $k = 0,1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$และ $S_3 = \left\{s_3 | s_3 = \binom{n_o}{2} + \frac{n_o}{2} + l\right\}$ โดยที่ $l = 1,2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ จะได้ว่า $S_o = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

**การพิสูจน์** ให้ $n_o$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n_o \geq 4$ และ $m = 0,1, \ldots, n-1$

และ $S_o = \{s_o | s_o = \binom{n_o}{2} + m\}$

ให้ $S_1 = \left\{s_1 | s_1 = \binom{n_o}{2} + \frac{n_o}{2}\right\}$

$S_2 = \{s_2 | s_2 = \binom{o}{2} + k\}$ โดยที่ $k = 0,1, \dots, \frac{n}{2} - 1$

และ $S_3 = \left\{s_3 | s_3 = \binom{n_o}{2} + \frac{n_o}{2} + l\right\}$ โดยที่ $l = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$

จากนิยามของ $S_1, S_2, S_3$ และ $S_o$

จะได้ว่า $S_o = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ เป็นจริง #

**หมายเหตุ** จากบทแทรกข้างต้น ถ้า ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 3$ ซึ่ง $\binom{n}{2}, \binom{n}{2} + 1, \binom{n}{2} + m$ โดยที่ $m \epsilon \{2, 3, \dots, n-1\}$ และ ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $k \geq 4$ ซึ่ง $\binom{k}{2} + \frac{k}{2}, \binom{k}{2} + l$ โดยที่ $l \epsilon \{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$ และ$\binom{k}{2} + \frac{k}{2} + p$ โดยที่ $p \epsilon \{1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$ วนได้ครบจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3

# บทที่ 4
# สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จำนวนอโครมาติกของกราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ $(K_n \odot K_1)$ และขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF(n,1)$ มีค่าดังนี้

1. จำนวนอโครมาติกของกราฟปลาดาวบริบูรณ์ $n$ $(K_n \odot K_1)$

   1. $\psi(K_n \odot K_1) = n+1$ สำหรับจำนวนเต็ม ที่ $n \geq 3$

2. ขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $SF(n,1)$

   1. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2},1\right)\right) \leq n+\frac{\binom{n}{2}}{n}-1$ สำหรับจำนวนคี่ $n$ ที่ $n \geq 5$
   2. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+1,1\right)\right) \leq n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rfloor-2$ สำหรับจำนวนคี่ $n$ ที่ $n \geq 7$
   3. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)\right) \leq n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$ สำหรับจำนวนคี่ $n$ ที่ $n \geq 7$
   และ $m \epsilon \{2,3,\dots,n-1\}$
   4. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2},1\right)\right) \leq n+\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}$ สำหรับจำนวนคู่ $n$ ที่ $n \geq 4$
   5. $n \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+m,1\right)\right) \leq n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$ สำหรับจำนวนคู่ $n$ ที่ $n \geq 4$
   และ $m \epsilon \{0,1,2, \dots, \frac{n}{2}-1\}$
   6. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m,1\right)\right) \leq n+\left\lfloor\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rfloor$ สำหรับจำนวนคู่ $n$ ที่ $n \geq 4$
   และ $m \epsilon \{1,2,3, \dots, \frac{n}{2}-1\}$

# บรรณานุกรม

[1] นวรัตน์ อนันต์ชื่น. (2540). ทฤษฎีกราฟ $I$. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปกร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม.

[2] ภูวนาถ ไชยนุรักษ์. (2561). จำนวนอโครมาติกของกราฟพิเศษบางชนิด. [วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่].

[3] ยืน ภู่วรรณ. (ม.ป.ป.). กราฟ 1. สำนักบริการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

[4] สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี และนที ทองศิริ. (2552). วิยุตคณิต. บริษัท กลางเวียงการพิมพ์ จำกัด.

[5] K. M. Aparna and C. Henila and P. Manjusha. (2018). Achromatic Number of Some Graphs. International Journal of Pure and Applied Mathematics. (20: 941-949)

[6] G. Chartrand and P. Zhang. (2005). Introduction to Graph Theory. International ed. Singapore: McGraw-Hill Companies.

[7] B. Douglas West. (2001). Introduction to Graph Theory. Prentice Hall.

[8] S. Fuller. (2009). The First-fit Chromatic and Achromatic Numbers.

[9] F. Harary and S. Hedetniemi and G. Prins. (1967). An Interpolation Thorem for Graphical Homomorphism. Portugal math. (26: 453-462)

[10] I. Niven and S. Herbert and L. Hugh. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons.

# ภาคผนวก

# ACHROMATIC NUMBERS OF SOME SIMPLE GRAPHS

Waranyu Moonta and Sorasak Leertanavalee

## Abstract

Achromatic number of a graph is the largest number of colors that can be assigned to each vertices of the graph such that adjacent vertices are assigned different colors and any two different colors are assigned to some pair of adjacent vertices. In this independent study, we study the concepts and definitions including some properties of n - complete starfish graphs and SF(n, 1) graphs when n is a natural number and $n \geqslant 3$ . We found that every n - complete starfish graph has some properties that the number of its vertices is 2n and the number of its edges is $\frac{n(n+1)}{2}$ , and the achromatic number of n-complete starfish graphs is n+1. Additionally, we could find the bounds of the achromatic numbers of SF(n, 1) graphs.

## Objectives

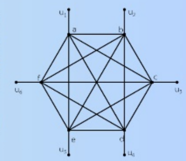
1. To study the concepts and definitions of graph theory about achromatic numbers.
2. To find the achromatic numbers of some simple graphs include: n - complete starfish graphs and SF(n, 1) graphs when n is a natural number and $n \geqslant 3$ .

## Methodology

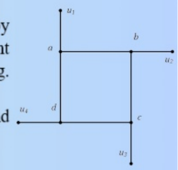
1. Study literature related to graph theory.
2. Examine concepts and definitions of the achromatic number of graphs, accompanied by relevant examples.
3. Analyze certain properties of graphs, such as the number of vertices, edges, and the achromatic number, and present corresponding proofs.
4. Compile and format the final report, ensuring accuracy and correctness.

## Basic knowledge

**Definition:** An n-complete starfish graph is defined as a graph formed by connecting each vertex of a complete graph $K_n$ with $n$ pendant vertex, using $n$ corresponding pendants edge at same thing. This n-complete starfish graph can be symbolically as $K_n \odot K_1$, when $n$ is a natural number such that $n \geq 3$.
Notably, the n-complete starfish graph contains a total of $2n$ vertices and features $\frac{n(n+1)}{2}$ edges



**Definition:** The $SF(n, 1)$ graph is defined as a graph formed by connecting each vertex of a cycle graph $C_n$ with $n$ pendant vertex, using $n$ corresponding pendants edge at same thing. When $n$ is a natural number such that $n \geq 3$.
Notably, the $SF(n, 1)$ graph contains a total of $2n$ vertices and features $2n$ edges



## Main Results

### 1) n - complete starfish graphs

**Theorem** Let $n$ be an integer where $n \geq 3$, Then the achromatic number of the $K_n \odot K_1$ graph is $n+1$ $(i.e., \ \psi(K_n \odot K_1) = n+1)$

### 2) SF(n, 1) graphs

**Theorem** Let $n$ be an odd integer where $n \geq 5$, Then the following inequality holds: $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}, 1\right)\right) \leq n + \frac{\binom{n}{2}}{n} - 1$

**Theorem** Let $n$ be an odd integer where $n \geq 7$, Then the following inequality holds: $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+1, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rceil - 2$

**Theorem** Let $n$ be an odd integer where $n \geq 7$ and $m \epsilon \{2, 3, \dots, n-1\}$, Then the following inequality holds:
$n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+m, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rceil$

**Theorem** Let $n$ be an even integer where $n \geq 4$, Then the following inequality holds: $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}, 1\right)\right) \leq n + \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}$

**Theorem** Let $n$ be an even integer where $n \geq 4$ and $m \epsilon \left\{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1\right\}$, Then the following inequality holds:
$n \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+m, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rceil$

**Theorem** Let $n$ be an even integer where $n \geq 4$ and $m \epsilon \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}-1\right\}$, Then the following inequality holds:
$n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rceil$

## Conclusion

The achromatic number of the n - complete starfish graph $(K_n o K_1)$ and the bounds of the achromatic number of the SF(n,1) graph are as follows:

1. The achromatic number of the n - complete starfish graph $n$ $(K_n \odot K_1)$
   1. $\psi(K_n \odot K_1) = n+1$ for integers at $n \geq 3$

2. Bounds on the achromatic number of the $SF(n, 1)$ graph
   1. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}, 1\right)\right) \leq n + \frac{\binom{n}{2}}{n} - 1$ for odd integers $n$ at $n \geq 5$
   2. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+1, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+1}{n}\right\rceil - 2$ for odd integers $n$ at $n \geq 7$
   3. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+m, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rceil$ for odd integers $n$ at $n \geq 7$
   and $m \epsilon \{2, 3, \dots, n-1\}$
   4. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}, 1\right)\right) \leq n + \frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}}{n}$ for even integers $n$ at $n \geq 4$
   5. $n \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+m, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+m}{n}\right\rceil$ for even integers $n$ at $n \geq 4$
   and $m \epsilon \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \quad 1\}$
   6. $n+1 \leq \psi\left(SF\left(\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m, 1\right)\right) \leq n + \left\lceil\frac{\binom{n}{2}+\frac{n}{2}+m}{n}\right\rceil$ for even integers $n$ at $n \geq 4$
   and $m \epsilon \{1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}-1\}$

### References

[1] นวรัตน์ อนันต์ชื่น. (2540). ทฤษฎีกราฟ . ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปกร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม.
[2] ภูวนาถ ไชยนุรักษ์. (2561). จำนวนอโครมาติกของกราฟพิเศษบางชนิด. [วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่].
[3] ยืน ภู่วรรณ. (ม.ป.ป.). กราฟ 1. สำนักบริการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
[4] สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี และนที กองศิริ. (2552). วิยุตคณิต. บริษัท กลางเวียงการพิมพ์ จำกัด.
[5] K. M. Aparna and C. Henila and P. Manjusha. (2018). Achromatic Number of Some Graphs. International Journal of Pure and Applied Mathematics. (20: 941-949)
[6] G. Chartrandand P. Zhang. (2005). Introduction to Graph Theory. International ed. Singapore: McGraw-Hill Companies.
[7] B. Douglas West. (2001). Introduction to Graph Theory. Prentice Hall.
[8] S. Fuller. (2009). The First-fit Chromatic and Achromatic Numbers.
[9] F. Harary and S. Hedetniemi and G. Prins. (1967). An Interpolation Thorem for Graphical Homomorphism. Portugal math. (26: 453-462)
[10] I. Niven and S. Herbert and L. Hugh. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons.

**waranyu_m@cmu.ac.th and sorasak.l@cmu.ac.th**
Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Thailand