สามเหลี่ยมด้านเท่าดัดแปลงเฮโรเนียน

(Altered Equilateral Heronian Triangles)

นางสาวบุษราภรณ์ ไชยวงค์

รหัส 640510549

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2567

สามเหลี่ยมด้านเท่าดัดแปลงเฮโรเนียน

(Altered Equilateral Heronian Triangles)

นางสาวบุษราภรณ์ ไชยวงค์

640510549

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567

สามเหลี่ยมด้านเท่าดัดแปลงเฮโรเนียน

(Altered Equilateral Heronian Triangles)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

เป็นหญิง โรจนกุล

.... ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร.เป็นหญิง โรจนกุล)

สันติ ทาเสนา

.... กรรมการ

(รศ. ดร.สันติ ทาเสนา)

วันที่ 7 ตุลาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ 206499 (Independent Study) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง สามเหลี่ยมด้านเท่าดัดแปลงเฮโรเนียน (Altered Equilateral Heronian Triangles)

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เป็นหญิง โรจนกุล ประธานกรรมการสอบในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้แก่ข้าพเจ้า เป็นผู้ชี้แนะความรู้ต่างๆและติดตามความก้าวหน้าในการค้นคว้าอิสระ รวมถึงการนำเสนอและตรวจสอบแก้ไขรูปเล่ม ตลอดจนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สันติ ทาเสนา อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ที่กรุณาเสียสละเวลาอันมีค่าให้แก่ข้าพเจ้าให้ข้อเสนอแนะ และแนวคิดที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขจนการค้นคว้าอิสระนี้ประสบความสำเร็จดังที่ต้องการ

สุดท้ายนี้ หากผลการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ได้รับคำชื่นชม หรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ข้าพเจ้าขอมอบสิ่งนั้นเป็นเกียรติยศแด่อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ คณาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน หากบกพร่องหรือมีข้อผิดพลาดประการใดนั้น ข้าพเจ้าน้อมรับข้อผิดพลาดทุกประการแต่เพียงผู้เดียว และยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา ข้าพเจ้าหวังว่าผลการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้จะเป็นประโยชน์ในการพัฒนาการศึกษาค้นคว้าอิสระต่อไป

นางสาวบุษราภรณ์ ไชยวงค์

หัวข้อ (ภาษาไทย) สามเหลี่ยมด้านเท่าดัดแปลงเฮโรเนียน

(ภาษาอังกฤษ) Altered Equilateral Heronian Triangles

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวบุษราภรณ์ ไชยวงค์ รหัสนักศึกษา 640510549

ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ผศ. ดร.เป็นหญิง โรจนกุล

ชื่อกรรมการสอบ รศ. ดร.สันติ ทาเสนา

บทคัดย่อ

ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ได้เราได้ศึกษาต่อยอดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มที่เรียงต่อกันและมีพื้นที่เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน เรานิยามรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลงเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ความยาวแต่ละด้านเป็นจำนวนเต็มที่มีผลต่างตามกำหนดและมีพื้นที่เป็นจำนวนเต็ม พร้อมทั้งแสดงว่ามีรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวอยู่เป็นจำนวนอนันต์

Abstract

In this independent study, we study and extend results on nearly equilateral Heronian triangle, triangle with integer side lengths and integer areas. we define altered equilateral Heronian triangle to be triangle whose sides and area are integer with given difference. Also show that there are an infinite number of such triangles.

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

ในปีค.ศ.2020 โรเจอร์ เนลเซน [1] ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า (Almost Equilateral Heronian Triangles) และได้เผยแพร่ผลการศึกษาในวารสาร mathematics Magazine โดยได้ศึกษาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่ความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มที่เรียงต่อกัน $(b-1,b,b+1)$ และพื้นที่ที่หาได้เป็นจำนวนเต็ม ได้สูตรในการสร้างรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าที่ใหญ่ขึ้นจากรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าที่เล็กกว่าและได้ผลลัพธ์ว่ามีรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าอยู่เป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งผู้ศึกษาพบว่า มีการศึกษารูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านรูปแบบอื่น นอกเหนือจากรูปแบบ $(b-1,b,b+1)$ [3] ผู้ศึกษาจึงสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านรูปแบบอื่น ใช้ชื่อการศึกษาใหม่นี้ว่า รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง

การศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ ได้ทำการศึกษารูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง โดยใช้แนวคิดของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าในการศึกษา โดยเริ่มต้นศึกษานิยามและทฤษฎีบทบางประการของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า พร้อมทั้งยกตัวอย่างในบางกรณี

ในบทที่ 2 เราศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกฎของโคไซน์ การหารลงตัว และจำนวนเต็มคู่และคี่

ในบทที่ $3-5$ เราได้ศึกษาเกี่ยวกับได้ศึกษานิยามของตัวหารร่วมมากหรือ ห.ร.ม. (Greatest common divisor) หรือ (GCD) และการสมมติการมีอยู่ พร้อมทั้งยกตัวอย่างของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n,b,b+n)$ และการมีอยู่เป็นอนันต์ของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n,b,b+n)$ และสุดท้ายรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-1,b,b-2)$

บทที่ 2

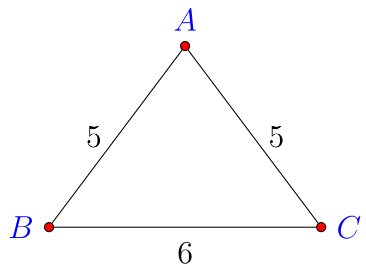
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนและรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

บทนิยาม 2.1 *รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียน (Heronian triangle)* คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านทั้งสามและพื้นที่เป็นจำนวนเต็ม

หมายเหตุ 2.2 เพื่อความสะดวก ต่อไปเราจะใช้สัญลักษณ์ (a, b, c) แทนข้อความ "ที่มีความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็น a, b และ c"

ตัวอย่าง 2.3 รูปสามเหลี่ยม $(5, 5, 6)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนที่มีพื้นที่เท่ากับ 12 ตารางหน่วย

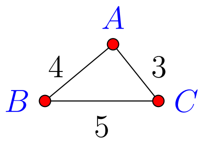


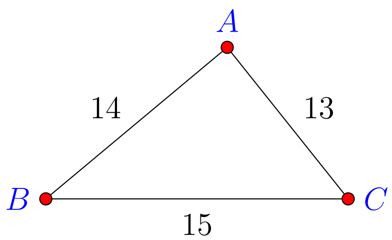
ตัวอย่าง 2.4 ตัวอย่างของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียน (a, b, c) ที่มีพื้นที่ A ตารางหน่วย

a	b	c	A
3	4	5	6
13	14	15	84
51	52	53	1,170
193	194	195	16,296
723	724	725	226,974
2,701	2702	2703	3,161,340
10,083	10,084	10,085	44,031,786
37,633	37,634	37,635	613,283,664
140,451	140,452	140,453	8,541,939,510
524,173	524,174	524,175	118,973,869,476

บทนิยาม 2.5 *รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนที่เกือบจะด้านเท่า (almost equilateral Heronian triangle)* คือ รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนที่มีความยาวด้านของด้านทั้งสามเป็นจำนวนเต็มที่เรียงต่อกัน

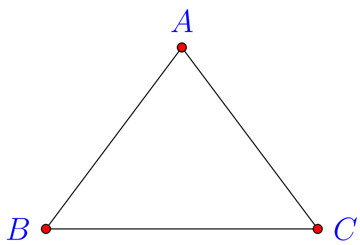
ตัวอย่าง 2.6 รูปสามเหลี่ยม $(3, 4, 5)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าที่มีพื้นที่เท่ากับ 6 ตารางหน่วย และรูปสามเหลี่ยม $(13, 14, 15)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าที่มีพื้นที่เท่ากับ 84 ตารางหน่วย





ทฤษฎีบท 2.7 [8][พีทาโกรัส (Pythagoras'theorem)] สามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลรวมพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านเป็นด้านประชิดมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากนั้น

ทฤษฎีบท 2.8 [4] ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ผลรวมความยาวด้านสองด้านใด ๆ มากกว่าความยาวด้านที่เหลือ



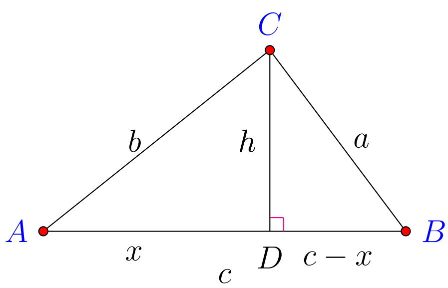
$$AB + AC > BC$$

ข้อสังเกต 2.9 สำหรับรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+1)$ ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมเกือบจะด้านเท่า จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีบท (2.8) เมื่อ $b \geq 3$ เนื่องจาก $(b-1) + b = 2b - 1 > b + 1$, $(b-1) + (b+1) = 2b > b$ และ $b + (b+1) = 2b + 1 > b - 1$

ทฤษฎีบท 2.10 (กฎของโคไซน์) รูปสามเหลี่ยม (a, b, c) ที่มี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

พิสูจน์: ลากส่วนสูง h จากจุด C ถึงฐาน AB ที่จุด D ดังรูป



พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $a^2 = (c-x)^2 + h^2$

$$\therefore h^2 = a^2 - (c-x)^2 \tag{2.1}$$

และ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $b^2 = x^2 + h^2$

$$\therefore h^2 = b^2 - x^2 \tag{2.2}$$

และ ในรูปสามเหลี่ยม ACD เมื่อพิจารณา มุม A จะได้ว่า $\cos A = \dfrac{x}{b}$

$$\therefore x = b\cos A \tag{2.3}$$

พิจารณาสมการ (2.1) = (2.2)

$$\begin{aligned} a^2 - (c-x)^2 &= b^2 - x^2 \\ a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) &= b^2 - x^2 \\ a^2 - c^2 + 2cx - x^2 &= b^2 - x^2 \\ a^2 - c^2 + 2cx &= b^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

จากสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos A$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

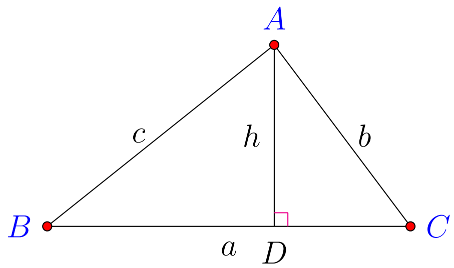
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

□

ทฤษฎีบท 2.11 รูปสามเหลี่ยม (a, b, c) ที่มี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมจะหาได้ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$A = \frac{1}{2}ac\sin B$$
$$A = \frac{1}{2}bc\sin A$$

พิสูจน์: ลากส่วนสูง h จากจุด A ถึงฐาน BC ที่จุด D ดังรูป



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD จะได้ว่า $\sin C = \dfrac{h}{b}$

$$\therefore h = b \sin C \tag{2.4}$$

พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า $A = \dfrac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$$A = \frac{1}{2} \times a \times h$$

จากสมการ (2.4) จะได้ว่า $\quad A = \dfrac{1}{2} \times a \times b \sin C$

ดังนั้น $\quad A = \dfrac{1}{2} ab \sin C$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\quad A = \dfrac{1}{2} ac \sin B$

$$A = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$\square$

ทฤษฎีบท 2.12 [1][สูตรของเฮรอน (Heron's formula)] ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีความยาวด้านเป็น a, b และ c ตามลำดับ ถ้า A เป็นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้วจะได้ว่า

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

โดยที่ s คือ ครึ่งหนึ่งของความยาวเส้นรอบรูป มีค่าเท่ากับ $(a+b+c)/2$

พิสูจน์: พิจารณารูปสามเหลี่ยม (a, b, c) ที่มี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ โดยกฎของโคไซน์ จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
ดังนั้น $\cos C = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sin^2 C &= 1 - \cos^2 C \\
&= 1 - \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \\
&= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sin C &= \sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}} \\
\sin C &= \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}
\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab} \\
&= \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{4a^2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^2 - b^2 - c^2}}{4} \\
A &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4}
\end{aligned}$$

เมื่อ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ จะได้ว่า $2s = a + b + c$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2s2(s-a)2(s-b)2(s-c)}}{4} \\
&= \frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{4} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\square$

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างการคำนวณหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม โดยใช้สูตรของเฮรอน

ตัวอย่าง 2.13 กำหนดรูปสามเหลี่ยม (3,4,5) ได้ว่า $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3+4+5}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} \\
&= \sqrt{6(3)(2)(1)} \\
&= \sqrt{36}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $\quad A = 6 \quad$ ตารางหน่วย

บทนิยาม 2.14 ให้ m, n เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $m \neq 0$ เรากล่าวว่า

m *หาร (divide)* n *ลงตัว* ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม A ซึ่ง $n = Am$

เราเขียน $m \mid n$ “แทน m หาร n ลงตัว”

ตัวอย่าง 2.15 $3 \mid 21$ ลงตัว เนื่องจาก $21 = 3(7)$ โดยที่ 7 เป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม 2.16 ให้ b เป็นจำนวนเต็ม เรากล่าวว่า

1. b เป็นจำนวนคู่ (even number) ก็ต่อเมื่อ $2 \mid n$
นั่นคือ b เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม l ซึ่ง $b = 2l$
2. b เป็นจำนวนคี่ (odd number) ก็ต่อเมื่อ n ไม่เป็นจำนวนคู่
นั่นคือ b เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม l ซึ่ง $b = 2l + 1$

ตัวอย่าง 2.17 4 เป็นจำนวนคู่ เนื่องจาก $2 \mid 4$ จะได้ว่า $4 = 2(2)$ โดยที่ 2 เป็นจำนวนเต็ม
5 เป็นจำนวนคี่ เนื่องจาก $2 \nmid 5$ จะได้ว่า $5 = 2(2) + 1$ โดยที่ 2 เป็นจำนวนเต็ม

บทที่ 3

รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า

ในบทนี้จะศึกษารูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า ซึ่งเนื้อหาในบทนี้ขยายความจากบทความรูปสามเหลี่ยมที่เกือบจะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดย โรเจอร์ เนลเซน

เมื่อพิจารณาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+1)$ โดยใช้สูตรของแฮรอน จะได้ว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคือ

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{s(s-(b-1))(s-(b))(s-(b+1))} \\
&= \sqrt{s(s-b+1)(s-b)(s-b-1)}
\end{aligned}
$$

เมื่อ $s = \dfrac{(b-1)+b+(b+1)}{2} = \dfrac{3b}{2}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A^2 &= s(s-b+1)(s-b)(s-b-1) \\
&= \frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2}-b+1\right)\left(\frac{3b}{2}-b\right)\left(\frac{3b}{2}-b-1\right) \\
&= \frac{3b(b+2)(b)(b-2)}{16}
\end{aligned}
$$

ทำให้

$$
\begin{aligned}
16A^2 &= 3b(b+2)(b)(b-2) \\
&= 3b^2(b+2)(b-2) \\
&= 3b^2(b^2-4)
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
16A^2 = 3b^2(b^2-4) \tag{3.1}
$$

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้ารูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+1)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า แล้ว b เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์: จะพิสูจน์ว่า b เป็นจำนวนคู่ โดยการพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง
สมมติ b เป็นจำนวนคี่
จากนิยามจำนวนคี่ ได้ว่า

$b = 2l + 1$,$\exists l \in \mathbb{Z}^+$
จากสมการ (3.1) พิจารณา

$$\begin{aligned}16A^2 &= 3b^2(b^2-4)\\ &= 3(2l+1)^2((2l+1)^2-4)\\ &= 3(4l^2+4l+1)((4l^2+4l+1)-4)\\ &= (12l^2+12l+3)(4l^2+4l-3)\\ &= 48l^4+48l^3-36l^2+48l^3+48l^2-36l+12l^2+12l-9\\ &= 48l^4+96l^3+24l^2-24l-9\\ &= 2(24l^4+48l^3+12l^2-12l-5)+1\end{aligned}$$

เนื่องจาก $24l^4 + 48l^3 + 12l^2 - 12l - 5$ เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น $16A^2$ เป็นจำนวนคี่ เกิดการขัดแย้ง
นั่นคือ ถ้า $16A^2 = 3b^2(b^2 - 4)$ แล้ว b เป็นจำนวนคู่
สรุปได้ว่า ถ้าความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า
เป็น $b - 1, b$ และ $b + 1$ ตามลำดับ แล้ว b เป็นจำนวนเต็มคู่

ทฤษฎีบท 3.2 พิจารณารูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า $(b-1, b, b+1)$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
(a) h เป็นความสูงของ รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b
(b) $h > 0$ สอดคล้องกับสมการ $3b^2 - (2h)^2 = 12$

พิสูจน์: ($\Rightarrow$) สมมติ h เป็นความสูงของรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b จะได้ว่า $h > 0$ จะแสดงว่า h สอดคล้องกับสมการ $3b^2 - (2h)^2 = 12$
พิจารณาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $A = \dfrac{bh}{2}$
จากสมการ (4.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}16A^2 &= 3b^2(b^2-4)\\ 16\left(\frac{bh}{2}\right)^2 &= 3b^2(b^2-4)\\ 16\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) &= 3b^2(b^2-4)\\ 4b^2h^2 &= 3b^2(b^2-4)\\ 4h^2 &= 3b^2-12\\ (2h)^2 &= 3b^2-12\\ 3b^2-(2h)^2 &= 12\end{aligned}$$

ดังนั้น $h > 0$ สอดคล้องกับสมการ $3b^2 - (2h)^2 = 12$

($\Leftarrow$) สมมติ $h > 0$ สอดคล้องกับสมการ $3b^2 - (2h)^2 = 12$ จะแสดงว่า h เป็นความสูงของ รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b
พิจารณา

$$\begin{aligned} 3b^2 - (2h)^2 &= 12 \\ (2h)^2 &= 3b^2 - 12 \\ 4h^2 &= 3b^2 - 12 \\ h^2 &= \frac{3b^2 - 12}{4} \\ h &= \sqrt{\frac{3b^2 - 12}{4}} \end{aligned}$$

พิจารณา

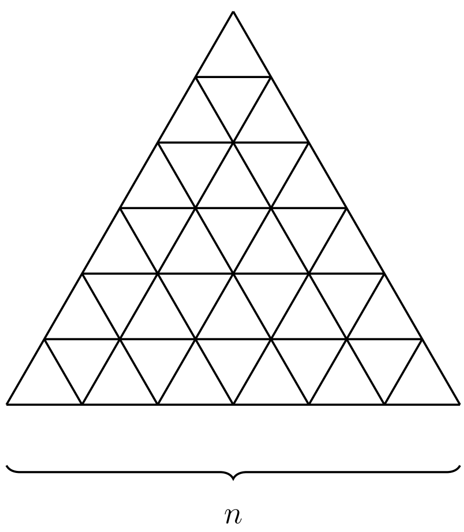
$$\begin{aligned} \frac{bh}{2} &= \frac{b\sqrt{\frac{3b^2-12}{4}}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{3b^2(b^2-12)}{16}} \\ &= A \end{aligned}$$

ดังนั้น h เป็นความสูงของ รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b $\square$

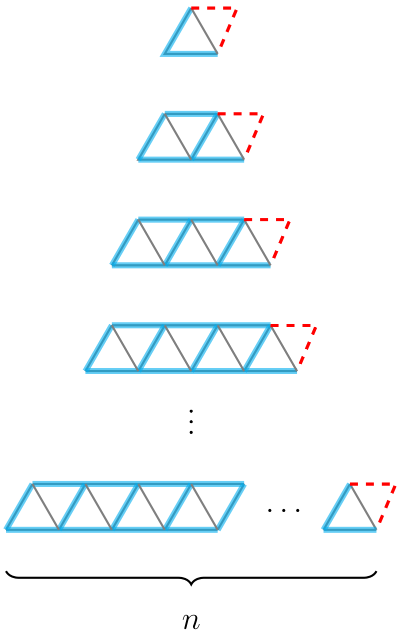
$\square$

บทตั้ง 3.3 รูปสามเหลี่ยม (n, n, n) จะมีสามเหลี่ยม $(1, 1, 1)$ อยู่ภายในจำนวน n^2 รูป

พิสูจน์: พิจารณารูปสามเหลี่ยม (n, n, n) ต่อไปนี้



เมื่อพิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมทีละบรรทัด



แถวที่	**จำนวน**
1	$2(1)-1=1$ รูป
2	$2(2)-1=3$ รูป
3	$2(3)-1=5$ รูป
4	$2(4)-1=7$ รูป
$\vdots$	$\vdots$
n	$2(n)-1=2n-1$ รูป

ดังนั้น มีรูปสามเหลี่ยมย่อย $(1,1,1)$ อยู่ $(1+3+5+7+...+(2n-1))$ รูป

ต่อไปจะแสดงว่า $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $(2n-1)=n^2$

แทน $n=1$

ได้ว่า $(2(1)-1)=1^2$

$1=1$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. ให้ $k \in \mathbb{Z}$ ที่ $k \geq 1$

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ ได้ว่า $1+3+5+7+...+(2k-1)=k^2$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ จะแสดงว่า $1+3+5+7+...+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$

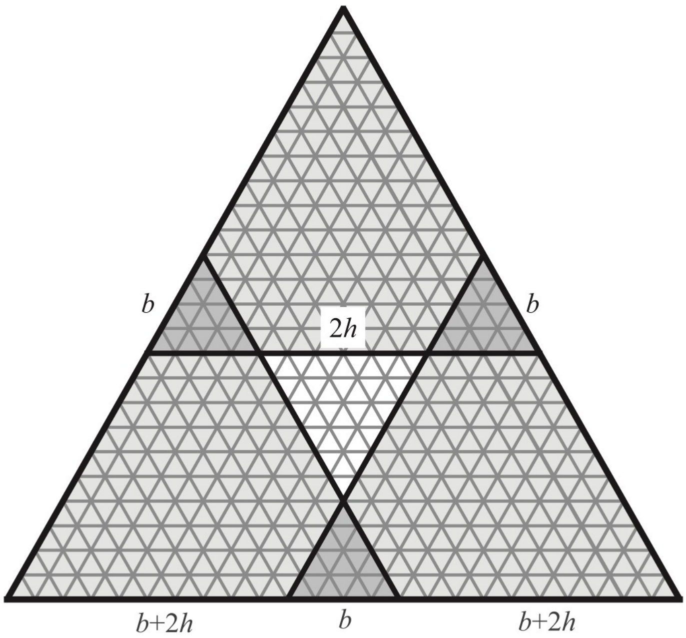
พิจารณา
$$\begin{aligned}1+3+5+7+...+(2k-1) &= 1+3+5+7+...+(2k-1)+(2k+1)\\ &= k^2+(2k+1)\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$

□

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า $(b-1,b,b+1)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนที่เกือบจะเป็นด้านเท่า แล้ว $(2b+2h-1, 2b+2h, 2b+2h+1)$ จะเป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า โดยที่ h เป็นความสูงของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า $(b-1,b,b+1)$ ที่สอดคล้องกับฐาน b



พิสูจน์: จากรูป พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเป็น $3b+4h$ โดยที่ b และ h เป็นจำนวนเต็ม

ต่อมาพิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเป็น $b+2h$ จำนวน 3 รูป (รูปสีเทาอ่อน) โดยมีส่วนซ้อนทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวเป็น b (รูปสีเทาเข้ม) และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสีขาวที่อยู่ตรงกลาง จะมีความยาวด้านเป็น $2h$

ใช้หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก เพื่อนับรูปสามเหลี่ยมเล็ก สังเกตุว่าผลรวมของรูปสามเหลี่ยมเล็กทั้งหมดในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ใหญ่ที่สุด คือ ผลรวมของรูปสามเหลี่ยมเล็กในรูปสีเทาอ่อน 3 รูป หักส่วนซ้อนทับในรูปสีเทาเข้ม 3 รูป แล้วรวมกับส่วนที่เหลือในสามเหลี่ยมสีขาว

$$(3b+4h)^2 = 3(2b+2h)^2 - 3b^2 + (2h)^2 \tag{3.2}$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$3b^2 - (2h)^2 = 3(2b+2h)^2 - (3b+4h)^2 \tag{3.3}$$

เมื่อแทนค่า $3b^2 - (2h)^2 = 12$ ลงในสมการ (3.3) จะได้

$$3(2b+2h)^2 - (3b+4h)^2 = 12$$

□

จากทฤษฎีบท (3.2) จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม $(2b+2h-1, 2b+2h, 2b+2h+1)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนที่มี $\dfrac{3b+4h}{2}$ เป็นความสูงของด้านที่สอดคล้องกับฐาน $2b+2h$

ข้อสังเกต 3.5 ให้ b แทนความยาวด้านที่เป็นจำนวนเต็มคู่ และ h แทนส่วนสูงของสามเหลี่ยมเกือบจะด้านเท่าที่สอดคล้องกับด้าน b จะสร้างรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าที่มีขนาดใหญ่ขึ้นได้ โดยมีความยาวของด้านที่เป็นจำนวนเต็มคู่ เป็น $2b+2h$

บทแทรก 3.6 รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่ามีอยู่มากมายเป็นอนันต์

พิสูจน์: จากทฤษฎีบท 3.4 จากรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า $(3, 4, 5)$ สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมถัดไปได้ดังนี้ (3, 4, 5) $\rightarrow$ (13, 14, 15) $\rightarrow$ (51, 52, 53)

$$\rightarrow (193, 194, 195) \rightarrow (723, 724, 725) \ldots.$$

$\square$

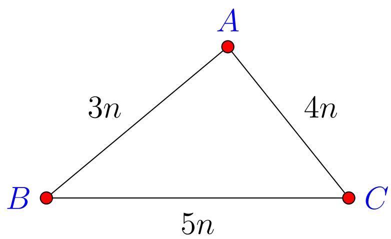
บทที่ 4

สามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง

ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามและตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง โดยผู้ค้นคว้าคิดค้นและนิยามขึ้นเอง

บทนิยาม 4.1 *รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง (Altered Equilateral Heronian Triangles)* คือ รูปสามเหลี่ยม $(b-n, b, b+n)$ ที่มีพื้นที่เป็นจำนวนเต็ม กล่าวคือ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียน เมื่อ $n > 1$

ตัวอย่าง 4.2 รูปสามเหลี่ยม $(3n, 4n, 5n)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลงเท่าที่มีพื้นที่เท่ากับ $6n^2$ ตารางหน่วย



ตัวอย่าง 4.3 ถ้ารูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+1)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า แล้วรูปสามเหลี่ยม $(n(b-1), n(b), n(b+1))$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง

พิสูจน์: ให้รูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+1)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า
จาก b และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $(b-1)n, bn, (b+1)n$ เป็นจำนวนเต็มด้วย
นอกจากนี้ยังได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+1) = \dfrac{\sqrt{3b^2(b^2-4)}}{4}$ เป็นจำนวนเต็ม
พิจารณา พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $((b-1)n, bn, (b+1)n) = \left(\dfrac{\sqrt{3b^2(b^2-4)}}{4}\right) n^2$ เป็นจำนวนเต็มด้วย
ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม $((b-1)n, bn, (b+1)n)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $\square$

ในกรณีที่ $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ มีเค้าโครงการพิสูจน์ในลักษณะเดียวกัน เราจึงศึกษาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลงในกรณีทั่วไปดังนี้
เมื่อพิจารณาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $(b-n, b, b+n)$ จะได้ว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคือ

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-(b-n))(s-(b))(s-(b+n))} \\ &= \sqrt{s(s-b+n)(s-b)(s-b-n)} \end{aligned}$$

เมื่อ $s = \dfrac{(b-n)+b+(b+n)}{2} = \dfrac{3b}{2}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A^2 &= s(s-b+n)(s-b)(s-b-n) \\ &= \frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2}-b+n\right)\left(\frac{3b}{2}-n\right)\left(\frac{3b}{2}-b-n\right) \\ &= \frac{3b(b+2n)(b)(b-2n)}{16} \end{aligned}$$

ทำให้

$$\begin{aligned} 16A^2 &= 3b(b+2n)(b)(b-2n) \\ &= 3b^2(b+2n)(b-2n) \\ &= 3b^2(b^2-4n^2) \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$16A^2 = 3b^2(b^2-4n^2) \tag{4.1}$$

รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง มีสมบัติคล้ายคลึงกับรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า โดยแสดงได้ดังทฤษฎีบท 4.4 ถึง 4.8

ทฤษฎีบท 4.4 ถ้ารูปสามเหลี่ยม $(b-n, b, b+n)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า แล้ว b เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์: จะพิสูจน์ว่า b เป็นจำนวนคู่ โดยการพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง
สมมติ b เป็นจำนวนคี่
จากนิยามจำนวนคี่ ได้ว่า
$b = 2l+1$,$\exists l \in \mathbb{Z}^+$
พิจารณา

$$\begin{aligned} 16A^2 &= 3b^2(b^2-4n^2) \\ &= 3(2l+1)^2((2l+1)^2-4n^2) \\ &= 3(4l^2+4l+1)(4l^2+4l+1-4n^2) \\ &= (12l^2+12l+3)(4l^2+4l+1-4n^2) \\ &= 48l^4+48l^3+12l^2-48l^2n^2+48l^3+48l^2+12l-48ln^2+12l^2+12l-12n^2+3 \\ &= 48l^4+96l^3+72l^2+24l-48l^2n^2-48ln^2-12n^2+3 \\ &= 2(24l^4+48l^3+36l^2+12l-24l^2n^2-24ln^2-6n^2+1)+1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $16A^2$ เป็นจำนวนคี่ เกิดการขัดแย้ง
นั่นคือ ถ้า $16A^2 = 3b^2(b^2-4n^2)$ แล้ว b เป็นจำนวนคู่

สรุปได้ว่า ถ้าความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า
เป็น $b-n, b$ และ $b+n$ ตามลำดับ แล้ว b เป็นจำนวนเต็มคู่ $\square$

ต่อไปจะกล่าวถึงส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง

ทฤษฎีบท 4.5 ถ้ารูปสามเหลี่ยม $(b-n, b, b+n)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง แล้วความสูงของรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b คือ $h = \sqrt{\dfrac{3b^2-12n^2}{4}}$

พิสูจน์: จากสมการ (4.1) ได้ว่า $16A^2 = 3b^2(b^2-4n^2)$
จาก $A = \dfrac{bh}{2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
16A^2 &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
16\left(\frac{bh}{2}\right)^2 &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
16\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
4b^2h^2 &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
4h^2 &= 3b^2-12n^2 \\
h^2 &= \frac{3b^2-12n^2}{4} \\
h &= \sqrt{\frac{3b^2-12n^2}{4}}
\end{aligned}$$

$\square$

สรุปได้ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยม $(b-n, b, b+n)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง แล้วความสูงของรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b คือ $h = \sqrt{\dfrac{3b^2-12n^2}{4}}$

ทฤษฎีบท 4.6 พิจารณารูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า $(b-n, b, b+n)$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
(a) h เป็นความสูงของ รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b
(b) $h > 0$ สอดคล้องกับสมการ $3b^2-(2h)^2 = 12n^2$

พิสูจน์: $(\Rightarrow)$ สมมติ h เป็นความสูงของรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b จะได้ว่า $h > 0$ จะแสดงว่า h สอดคล้องกับสมการ $3b^2-(2h)^2 = 12n^2$
พิจารณาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $A = \dfrac{bh}{2}$

จากสมการ (4.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
16A^2 &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
16\left(\frac{bh}{2}\right)^2 &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
16\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
4b^2h^2 &= 3b^2(b^2-4n^2) \\
4h^2 &= 3b^2-12n^2 \\
(2h)^2 &= 3b^2-12n^2 \\
3b^2-(2h)^2 &= 12n^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $h > 0$ สอดคล้องกับสมการ $3b^2-(2h)^2 = 12n^2$

($\Leftarrow$) สมมติ $h > 0$ สอดคล้องกับสมการ $3b^2-(2h)^2 = 12n^2$ จะแสดงว่า h เป็นความสูงของ รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b

พิจารณา

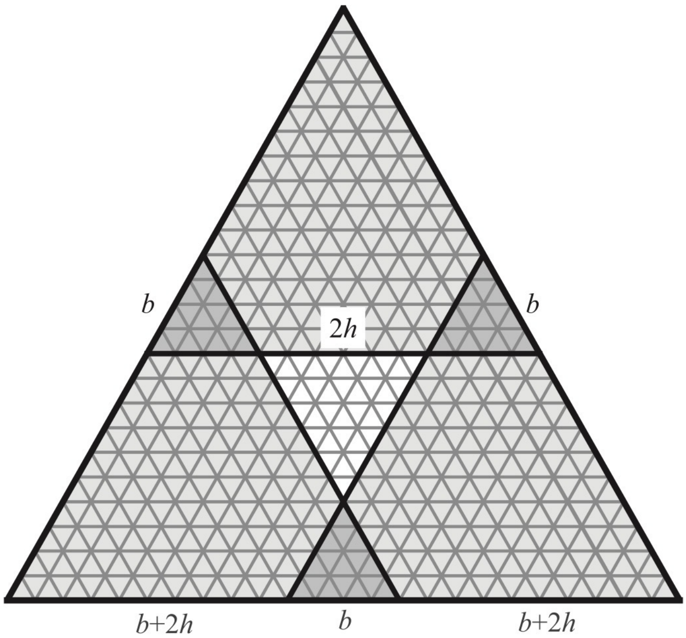
$$\begin{aligned}
3b^2-(2h)^2 &= 12n^2 \\
(2h)^2 &= 3b^2-12n^2 \\
4h^2 &= 3b^2-12n^2 \\
h^2 &= \frac{3b^2-12n^2}{4} \\
h &= \sqrt{\frac{3b^2-12n^2}{4}}
\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{bh}{2} &= \frac{b\sqrt{\frac{3b^2-12n^2}{4}}}{2} \\
&= \sqrt{\frac{3b^2(b^2-12n^2)}{16}} \\
&= A
\end{aligned}$$

ดังนั้น h เป็นความสูงของ รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับฐาน b $\square$

ทฤษฎีบท 4.7 ถ้า $(b-n, b, b+n)$ เป็นของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง แล้ว $(2b+2h-n, 2b+2h, 2b+2h+n)$ เป็นของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง



พิสูจน์: จากรูป พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเป็น $3b + 4h$ โดยที่ b และ h เป็นจำนวนเต็ม

ต่อมาพิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเป็น $b + 2h$ จำนวน 3 รูป (รูปสีเทาอ่อน) โดยมีส่วนซ้อนทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวเป็น b (รูปสีเทาเข้ม) และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสีขาวที่อยู่ตรงกลาง จะมีความยาวด้านเป็น $2h$

ใช้หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก เพื่อนับรูปสามเหลี่ยมเล็ก สังเกตุว่าผลรวมของรูปสามเหลี่ยมเล็กทั้งหมดในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ใหญ่ที่สุด คือ ผลรวมของรูปสามเหลี่ยมเล็กในรูปสีเทาอ่อน 3 รูป หักส่วนซ้อนทับในรูปสีเทาเข้ม 3 รูป แล้วรวมกับส่วนที่เหลือในสามเหลี่ยมสีขาว

$$(3b + 4h)^2 = 3(2b + 2h)^2 - 3b^2 + (2h)^2 \tag{4.2}$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$3b^2 - (2h)^2 = 3(2b + 2h)^2 - (3b + 4h)^2 \tag{4.3}$$

เมื่อแทนค่า $3b^2 - (2h)^2 = 12n^2$ ลงในสมการ (4.3) จะได้

$$3(2b + 2h)^2 - (3b + 4h)^2 = 12n^2$$

□

จากทฤษฎีบท (4.6) จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม $(2b+2h-n, 2b+2h, 2b+2h+n)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนที่มี $\dfrac{3b+4h}{2}$ เป็นความสูงของด้านที่สอดคล้องกับฐาน $2b + 2h$

ให้ b แทนความยาวด้านที่เป็นจำนวนเต็มคู่ และ h แทนส่วนสูงของสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง

$$3b^2 - (2h)^2 = 12n^2$$

จะสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลงที่มีขนาดใหญ่ขึ้น โดยมีความยาวของด้านที่เป็นจำนวนเต็มคู่ เป็น $2b + 2h$ และส่วนสูงที่สอดคล้องกับด้านดังกล่าวเป็น $h = \sqrt{\dfrac{3b^2 - 12n^2}{4}}$

บทแทรก 4.8 รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n, b, b+n)$ มีอยู่เป็นอนันต์

พิสูจน์: จากทฤษฎีบท 4.7 จากรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(3n, 4n, 5n)$ สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมถัดไปได้ดังนี้ (3n, 4n, 5n) → (13n, 14n, 15n) → (51n, 52n, 53n)

→ (193n, 194n, 195n) → (723n, 724n, 725n) . . . .

ดังนั้นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n, b, b+n)$ มีอยู่เป็นอนันต์ □

ตัวอย่าง 4.9 ลำดับอนันต์ของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n, b, b+n)$ เมื่อ $n > 1$

$n = 2$

(a, b, c)	A
$(6, 8, 10)$	24
$(26, 28, 30)$	336
$\vdots$	$\vdots$

$n = 3$

(a, b, c)	A
$(9, 12, 15)$	36
$(39, 42, 45)$	756
$\vdots$	$\vdots$

$\cdots$

$n \in \mathbb{Z}^+;\ n > 1$

(a, b, c)	A
$(3n, 4n, 5n)$	$12n$
$(13n, 14n, 15n)$	$84n^2$
$\vdots$	$\vdots$

จากตัวอย่าง 4.9 และจากการสังเกต พบว่าเราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n, b, b+n)$ ได้จากการนำ n ไปคูณกับความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า ความเป็นไปได้ในหัวข้อนี้จะศึกษารูปสามเหลี่ยม $(b-n, b, b+n)$ ในรูปแบบอื่น ซึ่งจะมีตัวเลขชุดอื่นที่ไม่ใช่พหุคูณของชุดตัวเลข จากบทแทรก 3.6

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ $(b-n, b, b+n)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง แล้ว $gcd(b-n, b, b+n) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $gcd(b, n) = 1$

พิสูจน์: $(\Rightarrow)$ สมมติ $gcd(b-n, b, b+n) = 1$
จะแสดงว่า $gcd(b, n) = 1$
จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง
สมมติ $gcd(b, n) = d > 1$
ดังนั้น $d \mid b$ นั่นคือ $b = ds$,$\exists s \in \mathbb{Z}$
และ $d \mid n$ นั่นคือ $n = dt$,$\exists t \in \mathbb{Z}$
ทำให้ $b - n = ds - dt = d(s-t) \therefore d \mid (b-n)$
ทำให้ $b + n = ds + dt = d(s+t) \therefore d \mid (b+n)$
จาก $d \mid b-n, d \mid b, d \mid b+n$
ได้ว่า $gcd(b-n, b, b+n) \geq d > 1$ ซึ่งขัดแย้งกับ $gcd(b-n, b, b+n) = 1$

$(\Leftarrow)$ สมมติ $gcd(b, n) = 1$
จะแสดงว่า $gcd(b-n, b, b+n) = 1$

จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง
สมมติ $gcd(b-n,b,b+n)=d>1$
ดังนั้น $d \mid b-n$ นั่นคือ $b-n=dj$,$\exists j \in \mathbb{Z}$
และ $d \mid b$ นั่นคือ $b=dk$,$\exists k \in \mathbb{Z}$
ทำให้ $n=b-(b-n)=dk-dj=d(k-j)$
ดังนั้น $d \mid n$
จาก $d \mid n$ และ $d \mid b$
ได้ว่า $gcd(b,n) \geq d > 1$ ซึ่งขัดแย้งกับ $gcd(b,n)=1$

□

ทฤษฎีบท 4.11 ถ้ารูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n,b,b+n)$ เป็นพหุคูณของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า แล้วรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(2b+2h-n, 2b+2h, 2b+2h+n)$ จะเป็นพหุคูณของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าด้วย

พิสูจน์: ให้รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-n,b,b+n)$ เป็นพหุคูณของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า
จะได้ว่า $\qquad (b-n,b,b+n)=a(b'-1,b',b'+1) \qquad \exists a,b' \in \mathbb{Z}$
จาก

$$b-n=ab'-a \tag{4.4}$$

และ

$$b=ab' \tag{4.5}$$

จะได้ว่า $a=n$
ทำให้ $b=nb'$ ให้ h เป็นส่วนสูงของ $(b-n,b,b+n)$ ที่สอดคล้องกับฐาน b
และให้ h' เป็นส่วนสูงของ $(b'-1,b',b'+1)$ ที่สอดคล้องกับฐาน b' จะได้ตามมาว่า $h=nh'$
โดยทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า $(2b'+2h'-1, 2b'+2h', 2b'+2h'+1)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า
พิจารณา

$$\begin{aligned}(2b+2h-n,2b+2h,2b+2h+n) &= (2nb'+2nh'-n,2nb'+2nh',2nb'+2nh'+n)\\ &= n(2b'+2h'-1,2b'+2h',2b'+2h'+1)\end{aligned}$$

นั่นคือ $(2b+2h-n,2b+2h,2b+2h+n)$ เป็นพหุคูณของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่าด้วย

□

บทที่ 5

การมีอยู่ของสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-1, b, b+2)$

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการมีอยู่ของรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง ซึ่งจากการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณ สำหรับ $b = 4$ ถึง 2042 ไม่พบรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เป็นจำนวนเต็ม ดังตารางต่อไปนี้

$b-1$	b	$b+2$	s	A
3	4	6	6.5	5.332682252
4	5	7	8	9.797958971
5	6	8	9.5	14.98123827
6	7	9	11	20.97617696
7	8	10	12.5	27.81074433
8	9	11	14	35.4964787
9	10	12	15.5	44.03904518
10	11	13	17	53.44155686
11	12	14	18.5	63.70586708
12	13	15	20	74.83314774
13	14	16	21.5	86.82417578
14	15	17	23	99.67948636
15	16	18	24.5	113.3994599
16	17	19	26	127.984374
17	18	20	27.5	143.4344362
18	19	21	29	159.7498044
19	20	22	30.5	176.9306008
20	21	23	32	194.9769217
21	22	24	33.5	213.8888438
22	23	25	35	233.6664289
23	24	26	36.5	254.3097275
24	25	27	38	275.8187811
25	26	28	39.5	298.1936242
26	27	29	41	321.4342857
27	28	30	42.5	345.5407899
28	29	31	44	370.5131577

$b-1$	b	$b+2$	s	A
2011	2012	2014	3018.5	1753476.612
2012	2013	2015	3020	1755219.777
2013	2014	2016	3021.5	1756963.808
2014	2015	2017	3023	1758708.705
2015	2016	2018	3024.5	1760454.468
2016	2017	2019	3026	1762201.096
2017	2018	2020	3027.5	1763948.591
2018	2019	2021	3029	1765696.952
2019	2020	2021	3030.5	1767446.179
2020	2021	2023	3032	1769196.272
2021	2022	2024	3033.5	1770947.231
2022	2023	2025	3035	1772699.056
2023	2024	2026	3036.5	1774451.747
2024	2025	2027	3038	1776205.305
2025	2026	2028	3039.5	1777959.728
2026	2027	2029	3041	1779715.017
2027	2028	2030	3042.5	1781471.172
2028	2029	2031	3044	1783228.193
2029	2030	2032	3045.5	1784986.081
2030	2031	2033	3047	1786744.834
2031	2032	2034	3048.5	1788504.453
2032	2033	2035	3050	1790264.938
2033	2034	2036	3051.5	1792026.29
2034	2035	2037	3053	1793788.507
2035	2036	2038	3054.5	1795551.59
2036	2037	2039	3056	1797315.54
2037	2038	2040	3057.5	1799080.355
2038	2039	2041	3059	1800846.037
2039	2040	2041	3060.5	1802612.584
2040	2041	2043	3062	1804379.998
2041	2042	2044	3063.5	1806148.277

จากตารางดังกล่าว ไม่พบรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง ดังนั้นเราจึงสร้างข้อคาดการณ์ว่าไม่มีรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง

ต่อไปจะแสดงว่าไม่มีรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ โดยเริ่มจากสมมติว่า มีรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-1, b, b+2)$ และพิจารณาจนพบข้อขัดแย้ง

เมื่อพิจารณาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ โดยใช้สูตรของแฮรอน เนื่องจากสามเหลี่ยมดังกล่าวเป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียน จะได้ว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคือ

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-(b-1))(s-(b))(s-(b+2))} \\ &= \sqrt{s(s-b+1)(s-b)(s-b-2)} \end{aligned}$$

เมื่อ $s = \dfrac{(b-1)+b+(b+2)}{2} = \dfrac{3b+1}{2}$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} A^2 &= s(s-b+1)(s-b)(s-b-2) \\ &= \frac{3b+1}{2}\left(\frac{3b+1}{2}-b+1\right)\left(\frac{3b+1}{2}-b\right)\left(\frac{3b+1}{2}-b-2\right) \\ &= \frac{(3b+1)(b+3)(b+1)(b-3)}{16} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 16A^2 &= (3b+1)(b+3)(b+1)(b-3) \\ &= (3b+1)(b+1)(b^2-9) \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$16A^2 = (3b+1)(b+1)(b^2-9) \tag{5.1}$$

แม้ว่าเราจะคาดการณ์ว่าไม่มีรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง แต่เรายังมีผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องบางประการดังนี้

ทฤษฎีบท 5.1 ถ้ารูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง แล้ว b เป็นจำนวนเต็มคี่

พิสูจน์: จะพิสูจน์ว่า b เป็นจำนวนคี่ โดยการพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง

สมมติ b เป็นจำนวนคู่

จากนิยามจำนวนคู่ ได้ว่า

$b = 2l$,$\exists l \in \mathbb{Z}^+$

จากสมการ (5.1) พิจารณา

$$\begin{aligned}
16A^2 &= (3b+1)(b+1)(b^2-9) \\
&= (3(2l)+1)(2l+1)((2l)^2-9) \\
&= (6l+1)(2l+1)(4l^2-9) \\
&= (12l^2+8l+1)(4l^2-9) \\
&= 48l^2+32l^3-104l^2-72l-9 \\
&= 2(24l^4+16l^3-52l^2-36l-5)+1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $16A^2$ เป็นจำนวนคี่ เกิดการขัดแย้ง
นั่นคือ ถ้า $16A^2 = (3b+1)(b+1)(b^2-9)$ แล้ว b เป็นจำนวนคี่
สรุปได้ว่า ถ้าความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง เป็น $b-1, b$ และ $b+2$ ตามลำดับ แล้ว b เป็นจำนวนเต็มคี่ $\square$

จากสมการ (5.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
16A^2 &= (3b+1)(b+1)(b^2-9) \\
16\left(\frac{bh}{2}\right)^2 &= (3b+1)(b+1)(b^2-9) \\
\left(\frac{bh}{2}\right)^2 &= \frac{(3b+1)(b+1)(b^2-9)}{16} \\
\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) &= \frac{(3(2a+1)+1)((2a+1)+1)((2a+1)^2-9)}{16} \\
\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) &= \frac{(6a+3+1)(2a+2)(4a^2+4a+1-9)}{16} \\
\left(\frac{b^2h^2}{4}\right) &= \frac{(6a+4)(2a+2)(4a^2+4a-8)}{16} \\
b^2h^2 &= (\frac{6a+4}{2})(\frac{2a+2}{2})(\frac{4a^2+4a-8}{4})(4) \\
b^2h^2 &= (\frac{3a+2}{1})(\frac{a+1}{1})(\frac{a^2+a-2}{1})(4) \\
b^2h^2 &= (3a+2)(a+1)(a^2+a-2)(4) \\
(2a+1)^2h^2 &= (3a+2)(a+1)(a^2+a-2)(4) \\
h^2 &= \frac{(3a+2)(a+1)(a^2+a-2)(4)}{(2a+1)^2} \\
h &= \sqrt{\frac{(3a+2)(a+1)(a^2+a-2)(4)}{(2a+1)^2}} \\
h &= 2\sqrt{\frac{(3a+2)(a+1)(a^2+a-2)}{(2a+1)^2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น h เป็นจำนวนคู่
จาก h เป็นจำนวนคู่ ได้ว่า $h = 2k$, $\exists k \in \mathbb{Z}$
พิจารณา

$$h = 2\sqrt{\frac{(3a+2)(a+1)(a^2+a-2)}{(2a+1)^2}}$$

$$2k = 2\sqrt{\frac{(3a+2)(a+1)(a^2+a-2)}{(2a+1)^2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{(3a+2)(a+1)(a^2+a-2)}{(2a+1)^2}}$$

เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $(2a+1)^2$ หาร $(3a+2)(a+1)(a^2+a-2)$ ลงตัว

พิจารณา

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & \frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{4}a - \frac{19}{16} \\
\cline{2-2}
4a^2+4a+1 \big) & 3a^4 + 8a^3 + a^2 - 8a - 4 \\
 & - \ (3a^4 + 3a^3 + \frac{3}{4}a^2) \\
\cline{2-2}
 & 5a^3 + \frac{1}{4}a^2 - 8a^2 \\
 & - \ (5a^3 + 5a^2 + \frac{5}{4}a) \\
\cline{2-2}
 & -\frac{19}{4}a^2 - \frac{37}{4}a - 4 \\
 & - \ (-\frac{19}{4}a^2 - \frac{19}{4}a - \frac{19}{16}) \\
\cline{2-2}
 & -\frac{9}{2}a - \frac{45}{16} \\
\end{array}$$

เนื่องจาก $(2a+1)^2$ หารลงตัว จะได้ว่า $-\frac{19}{2}a - \frac{45}{16} = 0$

ดังนั้น $a = -\frac{5}{8}$, $\exists a \in \mathbb{Z}$ เกิดข้อขัดแย้ง

สรุปได้ว่า ไม่มีรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง $(b-1, b, b+2)$

บทที่ 6

สรุปผลการศึกษา

ในการค้นคว้าอิสระเราได้ศึกษาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง จากรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนที่เกือบจะเป็นรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+1)$ ที่มีอยู่เป็นจำนวนอนันต์

ผลการศึกษาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง เป็นดังนี้
รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง จะได้ว่า
1. ถ้าความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนเกือบจะด้านเท่า เป็น $b-n, b$ และ $b+n$ ตามลำดับ แล้ว b เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับ $n \geq 2$
2. ถ้ารูปสามเหลี่ยม $(b-n, b, b+n)$ รูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง แล้วความสูงที่สอดคล้องกับฐาน b คือ $h = \sqrt{\dfrac{3b^2 - 12n^2}{4}}$ สำหรับ $n \geq 2$
3.ไม่มีรูปสามเหลี่ยม $(b-1, b, b+2)$ ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมเฮโรเนียนด้านเท่าดัดแปลง

บรรณานุกรม

[1] Nelsen, R. B., Almost Equilateral Triangles, Mathematics Magazine, 93:5,378-379, DOI:10.1080/0025570X.2020.1817708

[2] BYJU'S., (2023), Heron's Formula, http://www.byjus.com/maths/heron-formula (30 ตุลาคม 2566)

[3] Richardson, B., (2010), Super-Heronian Triangles, https://www.math.wichita.edu/heronian/heronian.htm (6 พฤศจิกายน 2566)

[4] ปรารถนา ใจผ่อง, *แนวคิดหลักมูลของคณิตศาสตร์ (Fundament Concepts of Mathematics)*, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2562.

[5] สายัญ ปันมา, *เอกสารการประกอบการสอน กระบวนวิชา 206217*, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2553.

[6] Richard Hammack, *Book of Proof*, Virgnia Commonwealth University, 2013.

[7] Mary Gu, (2016-2022), How do I create a long division equation in LaTeX?, https://opentextbc.ca/pressbooks/chapter/how-do-i-write-long-division (1 ตุลาคม 2567)

[8] Creative Commons (CC), (2566), ทฤษฎีบทพีทาโกรัส, https://th.wikipedia.org/wiki/ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (23 ตุลาคม 2567)

Altered Equilateral Heronian Triangles

Busaraporn Chaiwong, ID 640510549

Asst. Prof. Dr. Penying Rochanakul

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

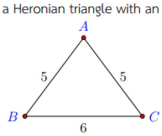
Abstract

In this independent study, we study and extend results on nearly equilateral Heronian triangle, triangle with integer side lengths and integer areas. we define altered equilateral Heronian triangle to be triangle whose sides and area are integer with given difference. Also show that there are an infinite number of such triangles.

Preliminaries

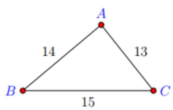
Definition 1. *Heronian triangle* is a triangle whose side lengths (a, b, c) and area K are all positive integers.

Example 2. Triangle $(5, 5, 6)$ is a Heronian triangle with an area of 12 square units.



Definition 3. *Almost equilateral Heronian triangle* is a Heronian triangle whose sides $(b-1, b, b+1)$ are consecutive integers.

Example 4. Triangle $(13, 14, 15)$ is almost equilateral Heronian triangle with an area of 84 square units.



Definition 5. Let m, n be integers such that $m \neq 0$. We say that

m *divides* n *exactly* if and only if there exists an integer A such that $n = Am$.

We write $m \mid n$ "instead of m dividing n exactly"

Example 6. $3 \mid 21$ is a multiple of 21 because $21 = 3(7)$ where 7 is an integer.

Definition 7. Let b be an integer. We say that

1. b is an even number if and only if $2 \mid n$

   That is, b is an even number if and only if there is an integer l such that $b = 2l$

2. b is an odd number if and only if n is not even

   That is, b is an odd number if and only if there is an integer l such that $b = 2l + 1$

Example 8. 4 is even since $2 \mid 4$ has $4 = 2(2)$ where 2 is an integer.

5 is odd since $2 \nmid 5$ has $5 = 2(2) + 1$ where 2 is an integer.

Result

1) **Almost equilateral Heronian triangle**

Theorem. If the triangle $(b-1, b, b+1)$ is an almost equilateral Heronian triangle, then b is an even integer.

Theorem. h is the height of the triangle that satisfies the base b. if and only if $h > 0$ satisfies the equation $3b^2 - (2h)^2 = 12$.

Theorem. If $(b-1, b, b+1)$ is an almost equilateral Heronian triangle, then $(2b + 2h - 1, 2b + 2h, 2b + 2h + 1)$ is an almost equilateral Heronian triangle. Where h is the height of the almost Heronian triangle $(b-1, b, b+1)$ that satisfies the base b.

Corollary. There are infintely many altered equilateral Heronian triangle.

2) **Altered Equilateral Heronian Triangles**

Theorem. *Altered Equilateral Heronian Triangles* is a triangle $(b-n, b, b+n)$ with integer area, i.e., it is a Heronian triangle when $n > 1$.

Theorem. If $(b-n, b, b+n)$ is an almost equilateral Heronian triangle, then b is an even integer.

Theorem. If $(b-n, b, b+n)$ is an altered equilateral Heronian triangle Then the height of the triangle corresponding to the base b is $h = \sqrt{\frac{3b^2 - 12n^2}{4}}$

Theorem. If h is the height corresponding to the base b, then h is an integer.

Theorem. If $(b-n, b, b+n)$ is a multiple of the altered equilateral Heronian triangle, then $(2b + 2h - n, 2b + 2h, 2b + 2h + n)$ is a multiple of the altered equilateral Heronian triangle.

Theorem. Let $(b-n, b, b+n)$ be an altered equilateral Heronian triangle, then $gcd(b-n, b, b+n) = 1$ if and only if $gcd(b, n) = 1$.

Theorem. If the altered equilateral Heronian triangle $(b-n, b, b+n)$ is a multiple of an almost equilateral Heronian triangle Then the altered equilateral Heronian triangle $(2b + 2h - n, 2b + 2h, 2b + 2h + n)$ will be a multiple of an almost equilateral Heronian triangle.

Corollary. There are infintely many altered equilateral Heronian triangle.

3) **The existence of an altered equilateral Heronian triangle**

$b-1$	b	$b+2$	s	A
3	4	6	6.5	5.332682252
4	5	7	8	9.797958971
5	6	8	9.5	14.98123827
6	7	9	11	20.97617696
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2038	2039	2041	3059	1800846.037
2039	2040	2041	3060.5	1802612.584
2040	2041	2043	3062	1804379.998
2041	2042	2044	3063.5	1806148.277

$\therefore$ There is no altered equilateral Heronian triangle $(b-1, b, b+2)$.

Conclusions

1. If the lengths of the three sides of an almost equilateral Heronian triangle are $b-n, b$ and $b+n$ respectively, then b is an even integer for $n \geq 2$.
2. If triangle $(b-n, b, b+n)$ is an altered equilateral Heronian triangle, then the height corresponding to the base b is $h = \sqrt{\frac{3b^2 - 12n^2}{4}}$ for $n \geq 2$.
3. There is no triangle $(b-1, b, b+2)$ that is an altered equilateral Heronian triangle.

Reference

[1] Nelsen, R. B., Almost Equilateral Triangles, Mathematics Magazine, 93:5,378-379, DOI:10.1080/0025570X.2020.1817708

[2] BYJU'S., (2023), Heron's Formula, http://www.byjus.com/maths/heron-formula (October 30, 2023)

[3] Richardson, B., (2010), Super-Heronian Triangles, https://www.math.wichita.edu/heronian/heronian.htm (November 6, 2023)

[4] Pradthana Jaipong, *Fundamental Concepts of Mathematics* , Faculty of Science, Chiang Mai University, 2019.

[5] Sayan Panma, *Teaching Documents Course 206217*, Department of Mathematics, Faculty of Science Chiang Mai University, 2010.

[6] Richard Hammack, *Book of Proof*, Virgnia Commonwealth University, 2013.

[7] Mary Gu, (2016-2022), How do I create a long division equation in LaTeX?, https://opentextbc.ca/pressbooks/chapter/how-do-i-write-long-division (October 1, 2024)

[8] Creative Commons (CC), (2023), Pythagoras'theorem, https://th.wikipedia.org/wiki/Pythagoras'theorem (October 23, 2024)