

11. เข็มนาฬิกาของนาฬิกาชนิดหนึ่งยาว 4 หน่วย เริ่มเดินจากตำแหน่ง 12 นาฬิกา จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของพื้นที่เซกเตอร์ที่ถูกกวาดผ่านโดยเข็มนาฬิกา ณ เวลาใด ๆ

12. ก้อนหินหล่นลงไปในบ่อน้ำเกิดระลอกคลื่นแผ่ออกเป็นวงกลม ซึ่งรัศมีของวงกลมเพิ่มขึ้นในอัตรา 3 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าพื้นที่ของวงกลมวงนี้เพิ่มขึ้นในอัตราเท่าใดเมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที

13. น้ำมันรั่วไหลออกจากเรือบรรทุกน้ำมันแผ่ออกเป็นวงกลม โดยพื้นที่ของวงกลมเพิ่มขึ้นในอัตราคงที่ 6 ตารางไมล์ต่อชั่วโมง จงหาว่ารัศมีของวงกลมวงนี้เพิ่มขึ้นในอัตราเท่าใดในขณะที่วงกลมมีพื้นที่ 9 ตารางไมล์

14. บอลลูกทรงกลมขยายตัวออกโดยที่ปริมาตรเพิ่มขึ้นในอัตรา 3 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที จงหาว่าเส้นผ่านศูนย์กลางของบอลลูกนี้เพิ่มขึ้นในอัตราเท่าใดในขณะที่บอลลูกนี้มีรัศมี 1 ฟุต

15. บอลลูกทรงกลมถูกปล่อยลงมาจากทำให้รัศมีของบอลลูกหดสั้นลงในอัตราคงที่ 15 เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่าบอลลูกนี้ถูกปล่อยลงมาจากด้วยอัตราเท่าใดในขณะที่บอลลูกนี้มีรัศมี 9 เซนติเมตร

16. บันไต่ยาว 17 ฟุตพิงอยู่กับกำแพง ถ้าส่วนปลายด้านล่างของบันไดถูกดึงออกจากกำแพงไปตามแนวราบด้วยความเร็ว 5 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าส่วนปลายด้านบนของบันไดจะเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็วเท่าใด เมื่อส่วนปลายด้านบนของบันไดอยู่เหนือจากพื้น 8 ฟุต

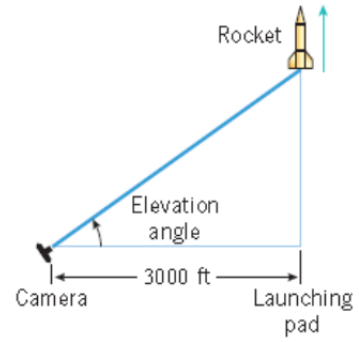
17. บันไต่ยาว 13 ฟุตพิงอยู่กับกำแพง ถ้าส่วนปลายด้านบนของบันไดเคลื่อนลงไปตามกำแพงด้วยความเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าส่วนปลายด้านล่างจะเคลื่อนที่ออกจากกำแพงด้วยความเร็วเท่าใด เมื่อส่วนปลายด้านบนของบันไดอยู่เหนือจากพื้น 5 ฟุต

18. แผ่นไม้กระดานพิงอยู่กับกำแพง ถ้าส่วนปลายด้านล่างของแผ่นไม้ซึ่งอยู่ห่างจากกำแพง 2 ฟุต ถูกดันเข้าหากำแพงด้วยความเร็ว 6 นิ้วต่อวินาที จงหาว่ามุมแหลมที่ไม้กระดานทำกับพื้นเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด

19. สนามซอฟต์บอลที่มีลักษณะสี่เหลี่ยม มีความยาวด้านละ 60 ฟุต ผู้เล่นวิ่งจากเบสแรกไปเบสที่สอง ที่จุดซึ่งห่างจากเบสที่สอง 10 ฟุต ด้วยความเร็ว 25 ฟุตต่อวินาที จงหาความเร็วของผู้เล่นที่จุดนั้นจากจุดโฮมเบส

20. จรวดพุ่งขึ้นไปตามแนวตั้งและถูกบันทึกตำแหน่งโดยสถานีเรดาร์ซึ่งอยู่บนพื้นดินที่อยู่ห่างจากจุดปล่อยจรวด 5 ไมล์ จงหาว่าเมื่อจรวดพุ่งขึ้นไปที่ระดับความสูง 4 ไมล์จะมีความเร็วเป็นเท่าใด เมื่อระยะห่างจากสถานีเรดาร์กับจรวดเพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 2,000 ไมล์ต่อชั่วโมง

21. จากภาพของกล้องถ่ายภาพและจรวดดังรูปที่ 3.4.5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางของจรวดที่วัดจากกล้องจะเป็นเท่าใด เมื่อจรวดอยู่สูงจากพื้น 4000 ฟุต และพุ่งขึ้นในแนวตั้งด้วยอัตรา 880 ฟุตต่อวินาที



▲ Figure 3.4.5

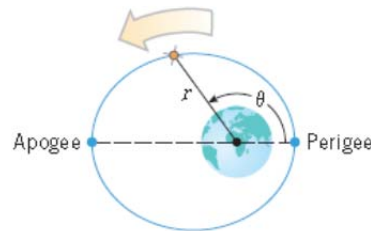
22. จากภาพของกล้องถ่ายภาพและจรวดดังรูปที่ 3.4.5 อัตราการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมของกล้องถ่ายภาพเมื่อเทียบกับจรวดจะเป็นเท่าใด เมื่อ

จรวดอยู่สูงเป็นมุม $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน และมีอัตราความเร็วเพิ่มขึ้นเป็น 0.2 เรเดียนต่อวินาที

23. ดาวเทียมมีการโคจรเป็นแนววงรี (elliptical orbit) รอบโลก และมีระยะทางจากดาวเทียมไปยังจุดศูนย์กลางของโลกในหน่วยไมล์ดังนี้

$$r = \frac{4995}{1 + 0.12 \cos \theta}$$

เมื่อ θ เป็นมุมที่วัดจากจุดที่ดาวเทียมอยู่ใกล้พื้นโลกมากที่สุด (ดูรูปประกอบ)



◀ Figure Ex-23

(a) จงหาความสูงของดาวเทียมที่จุด perigee (จุดที่ดาวเทียมอยู่ใกล้โลกมากที่สุด)

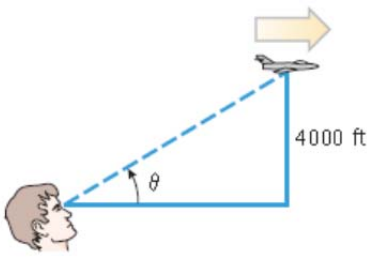
และที่จุด apogee (จุดที่ดาวเทียมอยู่ไกลโลกมากที่สุด) และกำหนดให้รัศมีของโลกคือ 3960 ไมล์

(b) เมื่อ θ คือ 120° และมุม θ เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2.7° ต่อวินาที จงหาความสูงของดาวเทียม และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูง ณ ขณะนั้น และเขียนอัตราการเปลี่ยนแปลงในหน่วยไมล์ต่อวินาที

24. เครื่องบินบินขนานกับพื้นโลกด้วยความสูง 4000 ฟุต เหนือจุดสังเกตการณ์ (ดูรูปประกอบ) เมื่อเครื่องบินทำมุม θ เท่ากับ 30° และความเร็วเป็น 300 ไมล์/ชั่วโมง

(a) มุม θ ลดลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด ณ ขณะนั้น (ตอบในหน่วยดีกรีต่อวินาที)

- (b) อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางระหว่างเครื่องบินและจุดสังเกตการณ์จะเป็นเท่าใด ณ ขณะนั้น (ตอบในหน่วย ฟุตต่อวินาที) โดยใช้ 1 ไมล์ เท่ากับ 5280 ฟุต



◀ Figure Ex-24

25. แท็งค์น้ำรูปโคนที่มีปลายแหลมอยู่ด้านล่าง รัศมีด้านบน 10 ฟุต สูง 24 ฟุต ถ้าน้ำไหลเข้าสู่แท็งค์ด้วยอัตรา 20 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการเพิ่มของระดับความลึกของน้ำ ณ ขณะนี้น้ำลึก 16 ฟุต

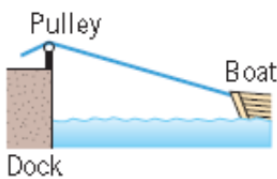
26. เมล็ดพืชไหลลงไปตามรางด้วยอัตรา 8 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที ทำให้เกิดกรวยรูปกรวยซึ่งความสูงของกรวยเมล็ดพืชจะเป็นสองเท่าของรัศมีเสมอ จงหาอัตราการเพิ่มของความสูงของกรวยเมล็ดพืช ณ ขณะที่ความสูงเป็น 6 ฟุต

27. ทราโยไหลลงไปตามรางทำให้เกิดกรวยรูปกรวยที่มีความสูงเท่ากับเส้นผ่านศูนย์กลางเสมอ ถ้าความสูงเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 5 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการไหลของทราโย ขณะที่กรวยมีความสูงเป็น 10 ฟุต

28. ข้าวสาลีไหลลงไปตามรางด้วยอัตรา 10 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที ทำให้เกิดกรวยข้าวสาลีรูปกรวยที่มีรัศมีเท่ากับครึ่งหนึ่งของความสูงเสมอ จงหาอัตราการเพิ่มของความยาวเส้นรอบวงของกรวยข้าวสาลี ขณะที่กรวยข้าวสาลีมีความสูง 8 ฟุต

29. เครื่องบินกำลังไต่ระดับความสูงขึ้นเป็นมุม 30 องศาจากแนวระนาบ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงความสูงของเครื่องบิน ขณะที่ความเร็วของเครื่องบินเท่ากับ 500 ไมล์ต่อชั่วโมง

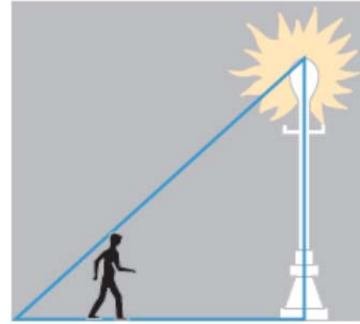
30. เรือลำหนึ่งถูกดึงเข้าอู่เรือโดยใช้เชือกผูกติดกับรถบนอู่เรือ (ดังรูป) เชือกของเรือผูกติดกับหัวเรือ ณ ตำแหน่งที่ต่ำกว่ารถ 10 ฟุต ถ้าเชือกถูกดึงผ่านรถด้วยอัตรา 20 ฟุตต่อนาที แล้วจงหาอัตราที่เรือแล่นเข้าสู่อู่เรือเมื่อความยาวของเชือกเท่ากับ 125 ฟุต



◀ Figure Ex-30

31. จากข้อ 30 จงหาอัตราที่เชือกถูกดึง หากเราต้องการให้เรือแล่นเข้าสู่อู่เรือด้วยอัตรา 12 ฟุตต่อนาที ณ ตำแหน่งที่เชือกยาว 125 ฟุต

32. ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุต กำลังเดินด้วยอัตรา 3 ฟุตต่อวินาที เข้าหาไฟทางที่มีความสูง 18 ฟุต (ดังรูป)

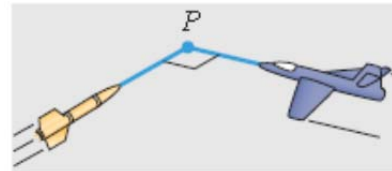


◀ Figure Ex-32

- (a) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวของเงาของชายคนนี้
(b) จงหาอัตราการเคลื่อนที่ของปลายเงาของชายคนนี้

33. ไฟนำทางในการเดินเรืออันหนึ่ง ซึ่งหมุนครบหนึ่งรอบทุก 10 วินาที อยู่บนเรือลำหนึ่งซึ่งทอดสมอห่างจากชายฝั่ง 4 กิโลเมตร จงหาความเร็วของลำแสงที่เคลื่อนที่ผ่านชายฝั่งเมื่อลำแสงนี้ทำมุม 45 องศากับชายฝั่ง

34. เครื่องบินลำหนึ่งกำลังบินที่ความสูงคงที่ ด้วยความเร็วคงที่ 600 ไมล์ต่อชั่วโมง ชีปนาวุธที่ใช้ต่อสู้เครื่องบินรบถูกยิงในแนวเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของเครื่องบินซึ่งจะทำให้ยิงถูกเครื่องบินลำนี้ที่จุด P (ดังรูป) ณ ตำแหน่งที่เครื่องบินห่างจากตำแหน่ง P เท่ากับ 2 ไมล์ ชีปนาวุธห่างจากตำแหน่ง P เป็นระยะ 4 ไมล์ และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1200 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาอัตราการลดลงของระยะทางระหว่างชีปนาวุธและเครื่องบิน



◀ Figure Ex-34

35. จงแก้โจทย์ข้อ 34 ภายใต้สมมติฐานว่ามุมระหว่างเส้นทางการบินคือ 120 องศา โดยใช้กฎของ cosine

36. เฮลิคอปเตอร์ตำรวจบินไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 100 ไมล์ต่อชั่วโมง ที่ความสูงคงที่ 1/2 ไมล์ ด้านล่างรถยนต์ขับไปทางทิศตะวันตกบนทางหลวงด้วยความเร็ว 75 ไมล์ต่อชั่วโมง ในขณะที่เฮลิคอปเตอร์บินผ่านทางหลวง รถยนต์อยู่ทางทิศตะวันออกของเฮลิคอปเตอร์ 2 ไมล์

- (a) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะห่างระหว่างรถและเฮลิคอปเตอร์ ขณะที่เฮลิคอปเตอร์บินผ่านทางหลวง
(b) ในขณะนั้นระยะห่างระหว่างรถและเฮลิคอปเตอร์เพิ่มขึ้นหรือลดลง

37. อนุภาคเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งที่มีสมการคือ $\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$ สมมติว่า

อนุภาคเคลื่อนที่ตามแนวแกน x ในทิศทางบวกด้วยอัตราเร็ว 6 หน่วยต่อวินาทีที่จุด (1,2)

- (a) จงหาอัตราเร็วตามแนวแกน y ที่จุดนั้น
- (b) อนุภาคกำลังเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงที่จุดนั้น

38. จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งที่มีสมการคือ $y = \sqrt{x^3 + 17}$ เมื่อ P อยู่ที่จุด (2,5) ค่า y เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วยต่อวินาที จงหาว่าค่า x เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

39. กำหนดให้จุด P เคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรง $y = 2x$ อยากทราบว่าจะระยะทางระหว่างจุด P และจุด (3,0) เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าไรที่จุด (3,6) เมื่อกำหนดให้ x มีค่าลดลงด้วยอัตรา 2 หน่วยต่อวินาทีที่จุดนั้น

40. กำหนดให้จุด P เคลื่อนที่ตามแนวเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ สมมติว่า x มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วยต่อวินาที เมื่อ $x = 3$

- (a) อยากทราบว่าจะระยะทางระหว่างจุด P และจุด (2,0) เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใดที่จุดนั้น
- (b) อยากทราบว่ามุมที่เกิดจากแกนนอนตัดกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด (2,0) เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใดที่จุดนั้น

41. กำหนดให้วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนวเส้นโค้ง $y = \frac{x}{x^2-1}$ จงหาจุด x ทั้งหมดที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ x เทียบกับเวลามีค่าเป็นสามเท่าของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับเวลาที่จุดนั้น [ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า $\frac{dx}{dt}$ ไม่เคยเป็นศูนย์]

42. กำหนดให้วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนวเส้นโค้ง $y = 16x^2 + 9y^2 = 144$ จงหาจุด x ทั้งหมดที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ x เทียบกับเวลามีค่าเป็นเท่าที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับเวลาที่จุดนั้น [ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า $\frac{dx}{dt}$ และ $\frac{dy}{dt}$ ไม่เคยเป็นศูนย์ที่จุดเดียวกัน]

43. สมการเลนส์สะท้อนในทางฟิสิกส์กล่าวว่า

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$$

โดยที่ s แทนระยะทางจากวัตถุถึงเลนส์ S แทนระยะทางจากภาพของวัตถุถึงเลนส์ และ f แทนระยะโฟกัสของเลนส์ สมมติว่าเลนส์อันหนึ่งมีระยะโฟกัส 6 เซนติเมตร และวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เข้าหาเลนส์ด้วยความเร็ว 2 เซนติเมตรต่อวินาที อยากทราบว่าจะระยะทางจากภาพของวัตถุถึงเลนส์เปลี่ยนด้วยความเร็วเท่าไรเมื่อวัตถุอยู่ห่างจากเลนส์ 10 เซนติเมตร และที่ตำแหน่งนั้นภาพของวัตถุเคลื่อนที่เข้าหาหรือออกห่างจากเลนส์

44. น้ำถูกกักเก็บอยู่ในอ่างเก็บน้ำรูปกรวย (ยอดแหลมอยู่ด้านล่าง) สมมติว่าระเหยไปด้วยอัตราซึ่งแปรผันตรงกับพื้นที่ผิวน้ำที่สัมผัสกับอากาศ จงแสดงว่าความลึกของน้ำจะลดลงด้วยอัตราคงที่ที่ไม่ขึ้นกับขนาดของอ่างเก็บน้ำ

45. ดาวหางผ่านเข้าสู่ชั้นบรรยากาศโลกและเผาไหม้ด้วยอัตราซึ่งแปรผันตรงกับพื้นที่ผิวของดาวหาง ณ เวลานั้นสมมติรูปร่างของดาวหางเป็นทรงกลมตลอดเวลา จงแสดงว่ารัศมีของดาวหางลดลงด้วยอัตราคงที่

46. บนนาฬิกาอันหนึ่งเข็มนาฬิกายาว 4 นิ้ว และเข็มชั่วโมงยาว 3 นิ้ว ระยะทางระหว่างปลายเข็มทั้งสองจะเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใดตอน 9 นาฬิกา

47. เทกาแพด้วยอัตราคงที่ 20 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที ลงในแก้วกาแฟซึ่งมีรูปร่างเหมือนกรวยตัด (ดังรูป) ถ้ารัศมีปากแก้วและก้นแก้วเป็น 4 และ 2 เซนติเมตรตามลำดับ และความสูงของถ้วยเป็น 6 เซนติเมตร ในขณะที่ความสูงของกาแฟเป็นครึ่งของความสูงถ้วย ความสูงของระดับกาแฟจะเปลี่ยนด้วยอัตราเท่าใด (Hint: ต่อทางก้นแก้วออกไปให้เป็นรูปกรวย)



◀ Figure Ex-47